EJEMPLO 5:

Determinar la expresión general de $\boldsymbol{y(x)}$ tal que: $\boldsymbol{4y''' - y' = 0}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$\boldsymbol{4m^3 - m = 0}$$

Factorizando:

$$\boldsymbol{4m^3 - m = 4\,m\left(m^2 - \tfrac{1}{4}\right) = 4\,m\left(m - \tfrac{1}{2}\right)\left(m + \tfrac{1}{2}\right)}$$

Las raíces son reales y simples: $\boldsymbol{0}$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

Luego, la solución es:

$$\boldsymbol{y = A_1\, e^{-0x} + A_2\, e^{-\frac{1}{2}x} + A_3\, e^{\frac{1}{2}x} = A_1 + A_2\, e^{-\frac{1}{2}x} + A_3\, e^{\frac{1}{2}x}}$$

EJEMPLO 6:

Resolver $\boldsymbol{y^{(4)} + y^{(3)} - 7y^{(2)} - y^{(1)} + 6y = 0}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$\boldsymbol{m^4 + m^3 - 7m^2 - m + 6 = 0}$$

Usando el lema de Gauss pueden determinarse sus raíces (o al menos dos de ellas, para luego de factorizar parcialmente el polinomio y usar la resolvente para determinar las restantes).

Las raíces son todas reales y distintas: $\boldsymbol{3; -1; 1; 2}$.

Luego, la solución es:

$$\boldsymbol{y = A_1\, e^{-3x} + A_2\, e^{-x} + A_3\, e^{x} + A_4\, e^{2x}}$$

EJEMPLO 7:

Resolver $\boldsymbol{y^{(4)}+4y^{(3)}+14y^{(2)}+4y^{(1)}+13y=0}$ sabiendo que $\boldsymbol{y=cos(x)}$ la soluciona.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$\boldsymbol{m^4+4m^3+14\,m^2\;+4m+13=0}$$

Para conocer las 4 raíces se usa el hecho que $\boldsymbol{cos(x)}$ es solución. Ello implica que la ecuación característica admite el cero complejo $\boldsymbol{0\pm i}$, ($\boldsymbol{cos(x)=e^{0x}cos(x)}$). La ecuación característica tendrá como factor el polinomio $\boldsymbol{m^2+1}$. Usando cociente de polinomios puede concluirse que:

$$\boldsymbol{m^4+4m^3+14\,m^2\;+4m+13=(m^2+1)(m^2+4m+13)}$$

La resolvente permite concluir que las dos raíces restantes serán también complejas: $\boldsymbol{-2\pm 3i}$.

Luego, la solución es:

$$\boldsymbol{y=A_1\,cos(x)+A_2\,sen(x)+A_3\,e^{-2x}\,cos(3x)+A_4e^{-2x}\,sen(3x)}$$

EJEMPLO 8:

Resolver $\boldsymbol{y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y' - y = 0}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$\boldsymbol{m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = 0}$$

Las raíces de ésta son $\boldsymbol{m = -1}$ y $\boldsymbol{m = 1}$ (con orden de multiplicidad 3). Puede probarse esto utilizando el Lema de Gauss para determinar las dos primeras raíces ($\mathbf{1}$ y – $\mathbf{1}$).

Usar la regla de Ruffini para factorizar:

$$\boldsymbol{m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = (m-1)(m+1)(m^2 - 2m + 1)}$$

Finalmente, emplear la resolvente para probar que las dos raíces restantes también son iguales a $\mathbf{1}$.

La ecuación característica factorizada es entonces:

$$\boldsymbol{m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = (m-1)^3(m+1)}$$

Luego, la solución es:

$$\boldsymbol{y = A_1 e^{-x} + A_2\, e^{x} + A_3\, x\, e^{x} + A_4\, x^2\, e^{x}}$$

EJEMPLO 9:

Resolver $\boldsymbol{y^{(4)} + 6y^{(2)} + 9y = 0}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$\boldsymbol{m^4 + 6m^2 + 9 = 0}$$

Notando que es un trinomio cuadrado perfecto:

$$\boldsymbol{m^4 + 6m^2 + 9 = (m^2 + 3)^2 = 0}$$

Luego el par de raíces complejas $\pm\sqrt{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{i}$ son raíces cuyo orden de multiplicidad es **2**.

Luego, la solución es:

$$\boldsymbol{y = A_1\ x\, cos\left(\sqrt{3}\, x\right) + A_2\, x\, sen\left(\sqrt{3}\, x\right) + A_3\, cos\left(\sqrt{3}\, x\right) + A_4\, sen\left(\sqrt{3}\, x\right)}$$