EJEMPLO 1:

Determinar la expresión general de $y(x)$ tal que: $\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = 0}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $\boldsymbol{m^2 - 3m + 2 = 0}$.

Las raíces son $\boldsymbol{m_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2\,.1} = \frac{3 \pm 1}{2}}$.

Luego, $\boldsymbol{m_1 = 2}$ y $\boldsymbol{m_2 = 1}$.

Solución general: $\boldsymbol{y = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{2x}}$.

Verificación:

$$\boldsymbol{y' = c_1\, e^{x} + 2\, c_2\, e^{2x}}$$

$$\boldsymbol{y'' = c_1\, e^{x} + 4\, c_2\, e^{2x}}$$

$$\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = c_1\, e^{x} + 4\, c_2\, e^{2x} - 3\,(c_1\, e^{x} + 2\, c_2\, e^{2x}) + 2\,(c_1\, e^{x} + c_2\, e^{2x}) =}$$

$$\boldsymbol{= c_1\, e^{x} + 4\, c_2\, e^{2x} - 3\, c_1\, e^{x} - 6\, c_2\, e^{2x} + 2\, c_1\, e^{x} + 2\, c_2\, e^{2x} = 0}$$

EJEMPLO 2:

Determinar la expresión general de $y(x)$ tal que: $\boldsymbol{y'' + y = 0}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es: $\boldsymbol{m^2 + 1 = 0}$.

$$\boldsymbol{m_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4.1.1}}{2\,.\,1} = \frac{\pm 2i}{2}}$$

Las raíces son complejas son: $\boldsymbol{m = \pm i}$.

Luego,

$$\boldsymbol{y(x) = e^{\,0x}[c_1\,cos(1x) + c_2\,sen(1x)]} \;\;\Rightarrow\;\; \boldsymbol{y(x) = c_1\,cos(x) + c_2\,sen(x)}$$

Verificación:

$$\boldsymbol{y' = -c_1\,sen(x) + c_2\,cos(x)}$$

$$\boldsymbol{y'' = -c_1\,cos(x) - c_2\,sen(x)}$$

$$\boldsymbol{y'' + y = -c_1\,cos(x) - c_2\,sen(x) + c_1\,cos(x) + c_2\,sen(x) = 0}$$

EJEMPLO 3:

Determinar la expresión general de $y(x)$ tal que: $\boldsymbol{y'' + 2y' + y = 0}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $\boldsymbol{m^2 + 2m + 1 = 0}$.

$$\boldsymbol{m_{1,2} = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4.1.1}}{2\,.\,1} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1}$$

Tiene dos raíces iguales $\boldsymbol{m = -1}$.

Entonces la solución general es $\boldsymbol{y = c_1 e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}}$.

Verificación:

$$\boldsymbol{y' = -c_1 e^{-x} + c_2\, e^{-x} - c_2\, x\, e^{-x}}$$

$$\boldsymbol{y'' = c_1 e^{-x} - 2\, c_2\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}}$$

$$\boldsymbol{y'' + 2y' + y =}$$

$$\boldsymbol{= c_1 e^{-x} - 2\, c_2\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} + 2(-c_1 e^{-x} + c_2\, e^{-x} - c_2\, x\, e^{-x}) + c_1 e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} =}$$

$$\boldsymbol{= c_1 e^{-x} - 2\, c_2\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} - 2\, c_1 e^{-x} + 2\, c_2\, e^{-x} - 2 c_2\, x\, e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} = 0}$$

EJEMPLO 4:

Ecuación diferencial con un parámetro. Resolver $\boldsymbol{y'' + ky' + y = 0, k \in \mathbb{R}}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $\boldsymbol{m^2 + km + 1 = 0}$.

Las raíces son $\boldsymbol{x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}}$.

Las raíces serán reales (iguales o distintas) o complejas, según el valor de $\boldsymbol{k}$. Así, se distinguen tres casos según $\boldsymbol{k^2 - 4}$ sea positivo, negativo o nulo.

Como las soluciones son diferentes, deben tratarse como casos distintos:

- $\boldsymbol{k^2 - 4 = 0} \implies \mathbf{k} = \pm\mathbf{2}$ la ecuación característica tiene dos raíces reales iguales $\implies$

$$\implies \boldsymbol{y = Ae^{\frac{-k}{2}x} + Bxe^{\frac{-k}{2}x}}$$

- $\boldsymbol{k^2 - 4} > 0 \implies \boldsymbol{k} \in (-\infty, \mathbf{-2}) \cup (\mathbf{2}, \boldsymbol{\infty})$ la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas

$$\implies \boldsymbol{y = Ae^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}x} + Be^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2}x}}$$

- $\boldsymbol{k^2 - 4} < 0 \implies \boldsymbol{k} \in (\mathbf{-2}, \mathbf{2})$ la ecuación característica tiene dos raíces complejas $\implies$

$$\implies \boldsymbol{y = e^{\frac{-k}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}\mathrm{x}\right) + B\,sen\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}\mathrm{x}\right)\right]}$$