EJEMPLO 19:

Para cada EDO proponer (no resolver) la solución propia para el método de los coeficientes a determinar:

$a)\ -y''' + 3y'' - 4y = sen(3x)$

$b)\ -y''' + 3y'' - 4y = x^2\, sen(x) + x\, cos(x)$

$c)\ -y''' + 3y'' - 4y = x\ \ e^{2x}$

$d)\ \ 2y'' + 4y = sen(2x) + 3x\, cos\,(x)$

$e)\ \ y'' - 4y' = x^{-1}$

$f)\ y''' + y'' - 2y' = -Sh(x)$

RESOLUCIÓN:

En todos los casos, para proponer correctamente es **conveniente** conocer la solución complementaria. (EC: Ecuación característica).

$a)$ EC: $-m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1)$

$$y_c = A_1\, e^{2x} + A_2\, x\, e^{2x} + A_3\, e^{-x}$$

$$y_p = A\, sen(3x) + B\, cos(3x)$$

$$b)\ -y''' + 3y'' - 4y = \underbrace{x^2}_{\substack{polinomio\\ grado\ 2}}\ sen(x) + \underbrace{x}_{\substack{polinomio\\ grado\ 1}}\ cos(x)$$

EC: $-m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1)$

$$y_c = A_1\, e^{2x} + A_2\, x\, e^{2x} + A_3\, e^{-x}$$

$$y_p = (Ax^{\,2} + B\,x + C)sen(x) + (D\,x^2 + E\,x + F)\,cos\,(x)$$

$$c)\ -y''' + 3y'' - 4y = \underbrace{x}_{\substack{polinomio\\ grado\ 1}}\ \ e^{2x}$$

EC: $-m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1)$

$$y_c = A_1\, e^{2x} + A_2\, x\, e^{2x} + A_3\, e^{-x}$$

$$y_p = x^2\,(Ax+B)\,e^{2x} = \,(A\,x^3 + B\,x^2)\,e^{2x}$$

Advertir que no pudo elegirse $(A\,x+B)\,e^{2x}$ debido a que está contenida en la solución complementaria; y tampoco $x\,(A\,x+B)$ porque parte de ésta está contenida en y_c.

$d)$ $2y'' + 4y = sen(2x) + 3x\,cos(x)$

EC: $2m^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; m = \pm\sqrt{2}$

$$y_c = A_1\,cos(\sqrt{2}x) + A_2\,sen(\sqrt{2}x)$$

Para esta EDO conviene utilizar el principio de superposición ya que el seno y el coseno no tienen el mismo argumento (uno tiene $2x$ y el otro x).

Para: $2y'' + 4y = sen(2x)$

$$y_{p_1} = A\,sen(2x) + B\,cos(2x)$$

Para: $2y'' + 4y = 3x\,cos(x)$

$$y_{p_2} = (Ax+B)\,sen(3x) + (Cx+D)\,cos(3x)$$

$e)$ $y'' - 4y' = x^{-1}$

No es posible utilizar el método de coeficientes a determinar, dado que $x^{-1} = \frac{1}{x}$ no es una de las funciones a la que se le pueda aplicar el método. Notar que una combinación lineal de las derivadas de $\frac{1}{x}$ jamás podrá ser $\frac{1}{x}$.

$f)$ $y''' + y'' - 2y' = -2Sh(x)$

Si bien no es posible utilizar el método de coeficientes a determinar directamente, dado que $2Sh(x)$ no es una de las funciones que califica para aplicarlo. Es posible hacerlo si se utiliza la equivalencia $Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Se debe resolver $y''' + y'' - 2y' = -e^x + e^{-x}$.

Usando el principio de superposición, es conveniente encontrar la solución propia de $y''' + y'' - 2y' = -e^x$ e $y''' + y'' - 2y' = e^{-x}$ separadamente.

EC: $m^3 + 2m^2 - 2m = m(m-1)(m+2)$

Luego:

$$y_c = A_1 + A_2\,e^x + A_3\,e^{-2x}$$

Para $y''' + y'' - 2y' = -e^x$, $y_{p_1} = A\,x\,e^x$ (dado que $A\,e^x$ está incluida en y_c).

Para $y''' + y'' - 2y' = e^{-x}$, $y_{p_2} = B\,e^{-x}$

EJEMPLO 20:

Resolver la ecuación $y''' - 4y' = x^2 + x\,sen(2x)$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica, $m^3 - 4m = (m-2)(m+2)m = 0$ tiene 3 raíces reales simples.

Luego:

$$y_c = A_1 e^{2x} + A_2 e^{-2x} + A_3$$

Usando el principio de superposición, se resolverán por separado $y''' - 4y' = x^2$ e $y''' - 4y' = x\ sen(2x)$.

- $y''' - 4y' = x^2$

Dado que x^2 es un polinomio de segundo grado, se propone:

$$y_p = x\,(A\,x^2 + B\,x + C)$$

Notar que si se adoptara $A\,x^2 + B\,x + C$, C está incluida en la y_c (representada por el sumando A_3).

$$\left.\begin{array}{l} y_p = A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x \\ y'_p = 3A\,x^2 + 2B\,x + C \\ y''_p = 6A\,x + 2B \\ y'''_p = 6A \end{array}\right\}$$

Sustituyendo en $y''' - 4y' = x^2$:

$$6A - (3A\,x^2 + 2B\,x + C) = x^2$$

Igualando los coeficientes de ambos polinomios:

$$\left\{\begin{array}{c} 6A - 4C = 0 \\ -8B = 0 \\ -12A = 1 \end{array}\right. \xrightarrow[resolviendo]{} \left\{\begin{array}{l} A = -\dfrac{1}{12} \\ B = 0 \\ C = -\dfrac{1}{8} \end{array}\right.$$

Luego:

$$y_{p1} = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x$$

- $y''' - 4y' = x\,sen(2x)$

La $f(x) = x\,sen(2x)$ tiene la forma:

$$f(x) = e^{a\,x}\left[P_{n_1}(x)\cos(bx) + R_{n_2}(x)sen(bx)\right]$$

Siendo: $\alpha = 0$; $P_{n_1}(x) = 0$; $R_{n_2} = x$; $b = 2$.

Como el grado de $\boldsymbol{P}$ es $\boldsymbol{n_1 = 0}$ y el de $\boldsymbol{R}$ es $\boldsymbol{n_2 = 1}$, los polinomios que multiplicarán a $\boldsymbol{sen(2x)}$ y a $\boldsymbol{cos(2x)}$ serán de grado 1.

Se propone:

$$y_p = (Ax + B)\, sen(2x) + (Cx + D) cos\,(2x)$$

Luego:

$$y'_p = (A - 2D - 2C\,x)\, sen(2x) + (C + 2B + 2A\,x)\ cos(2x)$$

$$y'''_p = (-12A + 8D + 8C\,x)\, sen(2x) + (-12C - 8B - 8A\,x)\, cos(2x)$$

Sustituyendo en $\boldsymbol{y''' - 4y' = x\, sen(2x)}$:

$$(-12A + 8D + 8C\,x)\, sen(2x) + (-12C - 8B - 8A\,x)\ cos(2x) - 4[(A - 2D - 2C\,x)\, sen(2x) +$$

$$+(C + 2B + 2A\,x)\ cos(2x)] = x\ sen(2x)$$

Igualando los coeficientes:

$$\begin{cases} -12A + 8D - 4A + 8D = 0 \\ 8C + 8C = 1 \\ -12C - 8B - 4C - 8B = 0 \\ -8A - 8A = 0 \end{cases} \xrightarrow[resolviendo]{} \begin{cases} A = D = 0 \\ B = -\dfrac{1}{16} \\ C = \dfrac{1}{16} \end{cases}$$

$$y_{p_2} = -\frac{1}{16}\ sen(2x) + \frac{1}{16} x\, cos\,(2x)$$

Luego, usando el principio de superposición:

$$y_c = A_1 e^{2x} + A_2\, e^{-2x} + A_3 - \frac{1}{12}\, x^3 - \frac{1}{8} x + -\frac{1}{16}\ sen(2x) + \frac{1}{16}\, x\, cos\,(2x)$$