EJEMPLO 18:

Resolver la ecuación $y''' - y'' = 4x$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $m^3 - m^2 = m^2(m-1) = 0$. Tiene todas raíces reales, una simple $(m = 1)$ y una doble $(m = 0)$.

Esto hace que $y_c = c_1\, e^x + c_2\, e^{0.x} + c_3\, x\, e^0 = c_1\, e^x + c_2 + c_3\, x$

Dado que $f(x) = 4x$ es un polinomio de primer grado, la función "imaginada" es otro polinomio del mismo grado: $y_p = Ax + B$. Notar que esta solución está contenida en y_c (en los sumandos $c_2 + c_3\, x$).

Se propone entonces $y_p = x\ (Ax + B)= A\, x^2 + B\, x$. Pero parte de ésta $(B\, x)$ también incluida en y_c (en el sumando $c_3\, x$). Se formula entonces $y_p = x^2(A\, x + B) = A\, x^3 + B\, x^2$. Notar que ninguno de los sumandos está contenido en y_c.

$$\left.\begin{aligned} y_p &= A\, x^3 + B\, x^2 \\ y'_p &= 3A\, x^2 + 2B\, x \\ y''_p &= 6A\, x + 2B \\ y'''_p &= 6A \end{aligned}\right\}$$

Remplazando en $y''' - y'' = 4x$:

$$6A - (6A\, x + 2B) = 4\, x$$

Luego, para que la anterior resulte una identidad:

$$\left.\begin{aligned} -6A \qquad &= 4 \\ 6A - 2B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{3} \\ B = -2 \end{cases}$$

Siendo entonces:

$$y_p = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2$$

Y la solución general:

$$y = A_1\, e^x + A_2 + A_3\, x - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$$