EJEMPLO 14:

Resolver la ecuación $\boldsymbol{y'' - y = 4x^2 - 3}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $\boldsymbol{m^2 - 1 = 0}$. Tiene 2 raíces reales ($\boldsymbol{m = \pm 1}$).

Luego $\boldsymbol{y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}}$.

Para la solución propia se debe proponer una posible. Dado que buscamos una función que derivada dos veces y sumada a su opuesta sea un polinomio de grado 2 $\boldsymbol{(4x^2 - 3)}$ "conjeturaremos" que $\boldsymbol{y_p = Ax^2 + Bx + C}$ (esto es porque $\boldsymbol{y'' - y}$ tiene altas probabilidades de ser también un polinomio de grado 2). Se deben determinar los coeficientes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ para que $\boldsymbol{y_p}$ verifique la EDO.

$$\left.\begin{aligned} y_p &= A\,x^2 + B\,x + C \\ y'_p &= 2A\,x + B \\ y''_p &= 2A \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando en $\boldsymbol{y'' - y = 4x^2 - 3}$:

$$\underbrace{2A}_{y''_p} - \underbrace{(A\,x^2 + B\,x + C)}_{y_p} = 4x^2 - 3 \Rightarrow -A\,x^2 - B\,x + 2A - C = 4x^2 - 3$$

Para obtener la solución debemos pensar que se buscan dos polinomios idénticos, y que esto se logra sólo si los coeficientes homólogos son iguales. Esto lleva a plantear el sistema:

$$\begin{cases} -A = 4 & \textit{igualando coeficientes de } x^2 \\ -B = 0 & \textit{igualando coeficientes de } x \\ 2A - C = -3 & \textit{igualando terminos independientes} \end{cases} \xRightarrow[resolviendo]{} \begin{cases} A = -4 \\ B = 0 \\ C = -5 \end{cases}$$

Siendo:

$$y_p = -\,4x^2 - 5$$

La solución de la EDO dada será:

$$y = A_1 e^{x} + A_2\, e^{-x} - 4x^2 - 5$$

EJEMPLO 15:

Resolver la ecuación $\boldsymbol{y'' - y = cos(x)}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $\boldsymbol{m^2 - 1 = 0}$. Tiene 2 raíces reales ($\boldsymbol{m = \pm 1}$).

Luego, $\boldsymbol{y_c = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-x}}$.

Para la solución propia se debe proponer una factible. Se "conjetura" $\boldsymbol{y_p = A\,cos(x) + B\,sen(x)}$. Se deben determinar los coeficientes $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ para que $\boldsymbol{y_p}$ verifique la EDO.

$$\left.\begin{aligned} y_p &= A\,cos(x) + B\,sen(x) \\ y'_p &= -A\,sen(x) + B\,cos(x) \\ y''_p &= -A\,cos(x) - B\,sen(x) \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando en $\boldsymbol{y'' - y = \cos(x)}$:

$$\underbrace{\left(-A\,cos(x) - B\,sen(x)\right)}_{y''_p} - \underbrace{\left(A\,cos(x) + B\,sen(x)\right)}_{y_p} = \cos(x) \Rightarrow -2A\,cos(x) - 2B\,sen(x) = \cos(x)$$

Para que esta expresión sea una identidad los coeficientes se elegirán con las condiciones:

$$\begin{cases} -2A = 1 & \textit{igualando coeficientes de } cos(x) \\ -2B = 0 & \textit{igualando coeficientes de } sen(x) \end{cases} \xrightarrow[\textit{resolviendo}]{} \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Luego:

$$y_p = -\frac{1}{2}\,cos(x)$$

Y la solución general es:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\,cos(x)$$

Notar que aquí también, al igual que en el ejemplo anterior, la elección de la solución propia se fundamenta en el hecho que tanto ella como sus derivadas pueden ser combinaciones lineales de la función $\boldsymbol{f(x)}$.

EJEMPLO 16:

Resolver $y'' + y = cos\,(x)$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica $m^2 + 1 = 0$ tiene raíces complejas porque $m = \pm i$.

Entonces $y_p = c_1\, cos(x) + c_2 sen\,(x)$.

Dado que buscamos una función que al sumarle su segunda derivada dé $cos(x)$, al igual que en el ejemplo anterior, se puede imaginar una $y_p = A\,cos(x) + B\,sen(x)$.

Procediendo de igual manera:

$$\left.\begin{aligned} y_p &= A\,cos(x) + B\,sen(x) \\ y'_p &= -A\,sen(x) + B\,cos(x) \\ y''_p &= -A\,cos(x) - B\,sen(x) \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando en $y'' + y = cos\,(x)$:

$$\big(-A\,cos(x) - B\,sen(x)\big) + \big(A\,cos(x) + B\,sen(x)\big) = cos\,(x)$$

Sumandos los términos homólogos se obtiene:

$$¡0 = cos\,(x)!$$

Se obtuvo un sistema **incompatible** (recordar que la ecuación debe verificarse $\forall\, x$).

¿Porqué en el caso anterior el método permitió encontrar la solución y en éste no? La respuesta es sencilla: *la función "supuesta" no fue la correcta.*

Un lector avezado pudo notar que si la solución complementaria es $y_c = A\,cos(x) + B\,sen(x)$, nunca pudo haber tenido la misma "forma" la solución propia (la primera debe verificar $y'' + y = 0$ y la segunda $y'' + y = cos\,(x)$. Es por ello que es neurálgico para este método conocer la solución complementaria, porque en el caso que la propuesta hubiese coincidido con la misma, se debe elegir otra. La selección se hace con similar criterio, esto es, buscar una función cuyas derivadas conserven las características de $f(x)$. La técnica es proponer la misma que se eligió anteriormente, pero multiplicada por x.

EJEMPLO 17:

Resolver la misma ecuación del ejemplo anterior, $y'' + y = cos\,(x)$, usando

$$y_p = x(A\,cos(x) + B\,sen\,(x)).$$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} y_p &= x(A\,cos(x) + B\,sen\,(x)) \\ y'_p &= A\,cos(x) + B\,sen\,(x) + x(-A\,sen\,(x) + B\,cos(x)) \\ y''_p &= -A\,sen\,(x) + B\,cos(x) + (-A\,sen\,(x) + B\,cos(x)) + x(-A\,cos\,(x) - B\,sen(x)) \end{aligned}$$

Agrupando términos y reemplazando en $y'' + y = cos\,(x)$:

$$\underbrace{-2A\,sen\,(x) + 2\,B\,cos(x) + x(-A\,cos(x) - B\,sen(x))}_{y''_p} + \underbrace{x(A\,cos(x) + B\,sen\,(x))}_{y_p} = cos\,(x)$$

Simplificando:

$$-2A\,sen\,(x) + 2\,B\,cos(x) = cos\,(x)$$

$$\begin{cases} -2A = 0 & igualando\ coeficientes\ de\ sen(x) \\ 2B = 1 & igualando\ coeficientes\ de\ cos(x) \end{cases} \xRightarrow{resolviendo} \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{2}\,sen\,(x)$$

La solución general es:

$$y = c_1\,cos(x) + c_2 sen(x) + \frac{1}{2} x\,sen(x)$$

Éste es idéntico al *ejemplo 11*, que se resolvió como ilustración del método de variación de los parámetros. Notar que los cálculos fueron aquí más sencillos.