EJEMPLO 12:

Resolver $y''' + y' = sec(x)$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $m^3 + m = (m^2 + 1)\, m = 0$. Tiene dos raíces complejas simples ($m = \pm i$) y una real, también simple ($m = 0$).

Luego, $y_c = c_1 \cos(x) + c_2\, sen\,(x) + c_3$.

Usando variación de los parámetros se propone la solución:

$$y_p = u_1 \cos(x) + u_2\, sen\,(x) + u_3$$

El sistema a resolver es:

$$S = \begin{cases} \cos(x)\ u_1' \ + sen(x)\, u_2' + 1\, u_3' = 0 \\ -sen\,(x)\, u_1' \ + \cos(x)\ u_2' + 0\, u_3' = 0 \\ -\cos(x)\, u_1' - sen\,(x)\, u_2' + 0\, u_3' = sec(x) \end{cases}$$

Usando Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen\,(x) & 1 \\ 0 & \cos(x) & 0 \\ sec(x) & -sen(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & sen\,(x) & 1 \\ -sen\,(x) & \cos(x) & 0 \\ -\cos(x) & -sen(x) & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow u_1 = \int u_1'\, dx = \int -1\, dx = \ u_1 = -x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 & 1 \\ -sen\,(x) & 0 & 0 \\ -\cos(x) & sec\,(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & sen\,(x) & 1 \\ -sen\,(x) & \cos(x) & 0 \\ -\cos x & -senx & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-tg\,(x)}{1} \quad \Rightarrow u_2 = \int u_2'\, dx = \int -tg\,(x)\, dx = ln\,|\cos(x)|$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & sen\,(x) & 0 \\ -sen\,(x) & \cos(x) & 0 \\ -\cos(x) & -sen(x) & sec(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & sen\,(x) & 1 \\ -sen\,(x) & \cos(x) & 0 \\ -\cos(x) & -sen(x) & 0 \end{vmatrix}} = \frac{sec(x)}{1} \quad \Rightarrow u_3 = \int u_3'\, dx = \int sec\,(x)\, dx = \ ln|sec(x) + tg(x)|$$

Reemplazando en $\boldsymbol{y_p = u_1 \cos(x) + u_2 \operatorname{sen}(x) + u_3}$:

$$\boldsymbol{y_p = (-x)\cos(x) + (\ln|\cos(x)|)\operatorname{sen}(x) + \ln|\sec(x) + tg\,(x)|}$$

Luego:

$$\boldsymbol{y = y_c + y_p = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x) + c_3 - x\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\ln|\cos(x)| + \ln|\sec(x) + tg\,(x)|}$$

EJEMPLO 13:

Optativo. Resolver $y^{(4)} - y^{(2)} = x^{-\frac{7}{2}}(4x^2 - 15)$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$m^4 - m^2 = (m^2 - 1)m^2 = 0$$

Tiene 4 raíces reales, dos simples $(m = \pm 1)$ y una doble $(m = 0)$.

Luego,

$$y_c = A_1 + A_2\, x + A_3\, e^x + A_4\, e^{-x}$$

Usando variación de los parámetros se propone la solución:

$$y_p = u_1 + u_2\, x + u_3\, e^x + u_4\, e^{-x}$$

El sistema a resolver es:

$$S = \begin{cases} u_1' + x\, u_2' + e^x\, u_3' + e^{-x}\, u_4' = 0 \\ u_2' + e^x\, u_3' - e^{-x}\, u_4' = 0 \\ e^x\, u_3' + e^{-x}\, u_4' = 0 \\ e^x\, u_3' - e^{-x}\, u_4' = x^{-\frac{7}{2}}(4x^2 - 15) \end{cases}$$

Matricialmente el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & e^x & e^{-x} \\ 0 & 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & 0 & e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x^{-\frac{7}{2}}(4x^2 - 15) \end{pmatrix}$$

El Wronskiano es:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & e^x & e^{-x} \\ 0 & 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & 0 & e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

Usando Cramer :

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x & e^x & e^{-x} \\ 0 & 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & 0 & e^x & e^{-x} \\ x^{-\frac{7}{2}}(4x^2 - 15) & 0 & e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{30x^{-\frac{5}{2}} - 8x^{-\frac{1}{2}}}{-2} = 4x^{-\frac{1}{2}} - 15x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = \int \left(4x^{-\frac{1}{2}} - 15x^{-\frac{5}{2}}\right) dx = 8x^{\frac{1}{2}} + 10x^{-\frac{3}{2}}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & x^{-\frac{7}{2}}(4x^2-15) & e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{30x^{-\frac{7}{2}} + 8x^{-\frac{3}{2}}}{-2} = 15x^{-\frac{7}{2}} - 4x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2 = \int \left(15x^{-\frac{7}{2}} - 4x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = -6x^{-\frac{5}{2}} + 8x^{-\frac{1}{2}}$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & e^{-x} \\ 0 & 1 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & x^{-\frac{7}{2}}(4x^2-15) & -e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{15x^{-\frac{7}{2}}e^{-x} - 4x^{-\frac{3}{2}}e^{-x}}{-2} = -7,5x^{-\frac{7}{2}}e^{-x} + 2\,x^{-\frac{3}{2}}e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_3 = \int \left(2x^{-\frac{3}{2}}e^{-x} - 7,5x^{-\frac{7}{2}}e^{-x}\right) dx = 3x^{-\frac{5}{2}}e^{-x} - 2\,x^{-\frac{3}{2}}e^{-x}$$

$$u_4' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & e^x & e^{-x} \\ 0 & 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & 0 & e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-15x^{-\frac{7}{2}}e^x + 4x^{-\frac{3}{2}}e^x}{-2} = 7,5x^{-\frac{7}{2}}e^x - 2x^{-\frac{3}{2}}e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_4 = \int \left(7,5x^{-\frac{7}{2}}e^x - 2x^{-\frac{3}{2}}e^x\right) dx = -3x^{-\frac{5}{2}}e^x - 2\,x^{-\frac{3}{2}}e^x$$

Finalmente:

$$y_p = u_1 + u_2\,x + u_3\,e^x + u_4\,e^{-x} =$$

$$= \left(8x^{\frac{1}{2}} + 10x^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(-6x^{-\frac{5}{2}} + 8x^{-\frac{1}{2}}\right)x + \left(3x^{-\frac{5}{2}}e^{-x} - 2\,x^{-\frac{3}{2}}e^{-x}\right)e^x + \left(-3x^{-\frac{5}{2}}e^x - 2\,x^{-\frac{3}{2}}e^x\right)e^{-x} = 16\sqrt{x}$$

$$y = y_c + y_p = A_1 + A_2\,x + A_3\,e^x + A_4\,e^{-x} + 16\sqrt{x}$$