## EJEMPLO 10:

Determinar la expresión general de $\boldsymbol{y(x)}$ tal que $\boldsymbol{y'' + y = sec(x)}$.

### RESOLUCIÓN:

Dado que la ecuación característica $\boldsymbol{m^2 + 1 = 0}$ tiene raíces complejas porque $\boldsymbol{m = \pm i}$, entonces:

$$\boldsymbol{y_p = c_1\, cos(x) + c_2\, sen\,(x)}$$

Usando variación de los parámetros se propone la solución:

$$\boldsymbol{y_p = u_1\, cos(x) + u_2\, sen\,(x)}$$

El sistema a resolver es:

$$\boldsymbol{S = \begin{cases} u_1'\, cos(x) + u_2'\; sen\,(x) = 0 \\ u_1'(-sen(x)) + u_2'\; cos(x) = sec(x) \end{cases}}$$

Usando Cramer:

$$\boldsymbol{u_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & sen(x) \\ sec(x) & cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix}} = -sen(x)\, sec(x) = -tg(x)}$$

$$\boldsymbol{u_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} cos(x) & 0 \\ -sen(x) & sec(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix}} = 1}$$

Integrando:

$$\boldsymbol{u_1 = \int u_1'\, dx = \int -tg\,(x)\, dx = ln|cos\,(x)|}$$

$$\boldsymbol{u_2 = \int u_2'\, dx = \int 1\, dx = x}$$

La solución particular es:

$$\boldsymbol{y_p = u_1\, cos(x) + u_2 sen\,(x) = ln|cos(x)|\, cos\,(x) + x\; sen(x)}$$

La solución general es:

$$\boldsymbol{y = y_c + y_p = A_1\; cos(x) + A_2\, sen\,(x) + cos(x)\, ln|cos\,(x)| + x\; sen(x)}$$

## EJEMPLO 11:

Determinar la expresión general de $\boldsymbol{y(x)}$ tal que $\boldsymbol{y'' + y = cos(x)}$.

**RESOLUCIÓN:**

Dado que la ecuación característica $\boldsymbol{m^2 + 1 = 0}$ tiene raíces complejas porque $\boldsymbol{m = \pm i}$, entonces:

$$\boldsymbol{y_p = A_1\, cos(x) + A_2\, sen(x)}$$

Usando variación de los parámetros se propone la solución $\boldsymbol{y_p = u_1\ cos(x) + u_2\ sen(x)}$

El sistema a resolver es:

$$\boldsymbol{S = \begin{cases} u_1'\ cos(x) + u_2'\ sen\,(x) = 0 \\ u_1'\,(-sen(x)) + u_2'\,(cos(x)) = cos(x) \end{cases}}$$

Usando Cramer:

$$\boldsymbol{u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(x) \\ cos(x) & cos\,(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen\,(x) \\ -sen(\,x) & cos\,(x) \end{vmatrix}} = -sen\,(x)\,cos(x) \Rightarrow u_1 = \int u_1'\,dx = \int -sen\,(x)\,cos(x)\ dx = \frac{cos^2(x)}{2}}$$

$$\boldsymbol{u_2' = \frac{\begin{vmatrix} cos(x) & 0 \\ -\,sen(x) & cos\,(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen\,(x) \\ -sen(\,x) & cos\,(x) \end{vmatrix}} = cos^2(x)\ \Rightarrow u_2 = \int u_2'\,dx = \int cos^2(x)\ dx = \frac{1}{2}(x + sen\,(x)\,cos(x))}$$

$$\boldsymbol{y_p = u_1\, cos(x) + u_2\, sen\,(x) = \frac{cos^2(x)}{2} cos\,(x) + \frac{1}{2}(x + sen\,(x)\,cos(x))\,sen(x) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{x\,sen(x) + cos^3(x) + cos(x)sen^2(x)}{2} =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2}x\,sen\,(x) + \frac{1}{2}cos(x)(cos^2(x) + sen^2(x)) = \frac{1}{2}x\,sen\,(x) + \frac{1}{2}cos(x)}$$

Se omite el sumando $\boldsymbol{\frac{1}{2}cos(x)}$, dado que está incluido dentro del sumando $\boldsymbol{A_1\,cos(x)}$ de la solución característica.

Luego:

$$\boldsymbol{y_p = \frac{1}{2}x\,sen\,(x)}$$

$$\boldsymbol{y = y_c + y_p = A_1\,cos(x) + A_2\,sen\,(x) + \frac{1}{2}x\,sen(x)}$$