EJEMPLO 9:

Determinar la familia ortogonal de $\boldsymbol{x^2 - y^2 = k}$ y graficar algunas curvas de ambas.

RESOLUCIÓN:

En primer lugar se calcula $\boldsymbol{m_1}$. En este caso, al ser una función implícita $\boldsymbol{F(x,y) = K}$ puede usarse derivación implícita:

$$\frac{df_1}{dx} = y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

Luego la familia ortogonal deberá verificar la EDO:

$$y' = \frac{df_2}{dx} = -\frac{1}{\frac{df_1}{dx}} = -\frac{y}{x}$$

Resumiendo, se debe resolver:

$$y' = -\frac{y}{x}$$

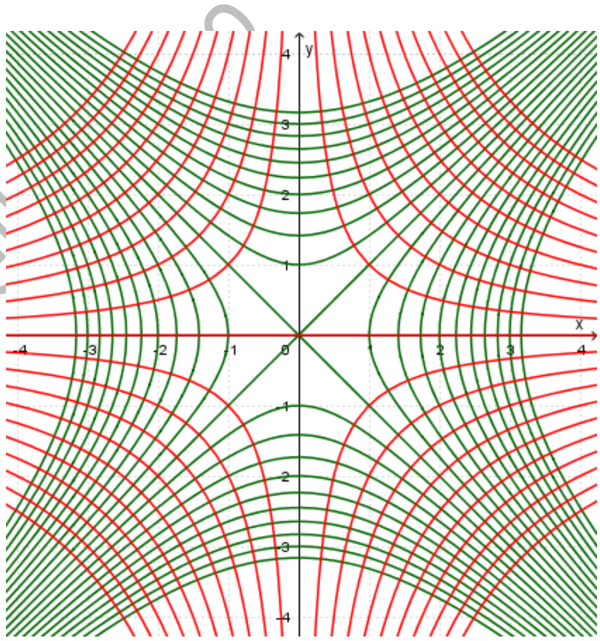
Separando variables:

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Resolviendo la ecuación:

$$\int -\frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Longrightarrow ln|y| = -ln|x| + C \Longrightarrow ln|yx| = C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow xy = C$$

La familia ortogonal de la familia de hipérbolas $\boldsymbol{x^2 - y^2 = k}$ es otra familia de hipérbolas $\boldsymbol{xy = C}$.



EJEMPLO 10:

Determinar la familia ortogonal de $\boldsymbol{y = k\, x^3}$ y graficar algunas curvas de ambas.

RESOLUCIÓN:

$$\boldsymbol{y = k\, x^3 \quad \Longrightarrow \quad m_1 = y' = k\, 3x^2}$$

Aquí es necesario reemplazar $\boldsymbol{k = \frac{y}{x^3}}$.

Luego:

$$\boldsymbol{m_1 = \frac{y}{x^3} 3x^2 = \frac{3y}{x}}$$

Entonces la familia ortogonal es tal que:

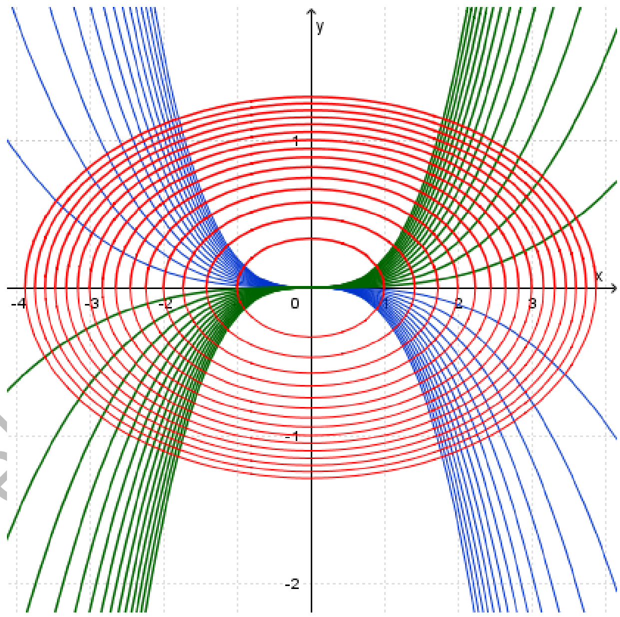
$$\boldsymbol{y' = \frac{df_2}{dx} = -\frac{1}{\frac{df_1}{dx}} = -\frac{x}{3y} \Longrightarrow 3y\, dy = -x\, dx}$$

Resolviendo la ecuación:

$$\boldsymbol{\int 3y\, dy = \int -x\, dx \Longrightarrow 3\,\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Longrightarrow 3y^2 + x^2 = C}$$

(notar $\boldsymbol{2C}$ es una constante)

Entonces, la familia de elipses $\boldsymbol{3y^2 + x^2 = C}$ es ortogonal a la familia de parábolas cúbicas $\boldsymbol{y = k\, x^3}$.



EJEMPLO 11:

Mostrar que las familias $\boldsymbol{y = k\, e^{-x}}$ e $\boldsymbol{y^2 = 2x + C}$ son ortogonales. Graficar.

RESOLUCIÓN:

$$\boldsymbol{f_1: y = k\, e^{-x}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{f_2:\ y^2 = 2x + C}$$

$$\boldsymbol{m_1 = y' = -ke^{-x} = -\frac{y}{e^{-x}}e^{-x} = -y \therefore \quad m_1 = -y}$$

Para calcular la pendiente en cada punto de la segunda familia se usará derivación implícita $(\boldsymbol{y^2 - 2x = C})$.

Luego:

$$\boldsymbol{m_2 = -\frac{-2}{2y} = \frac{1}{y} \Longrightarrow m_2 = \frac{1}{y}}$$

Finalmente para todo punto del plano $(\boldsymbol{x, y})$ se verifica $\boldsymbol{m_1 m_2 = -y\frac{1}{y} = -1}$. Por lo tanto las familias son ortogonales.

También pudo probarse que son ortogonales determinando la ecuación diferencial que representa a una de ellas y resolviendo $\frac{df_2}{dx} = -\left(\frac{df_1}{dx}\right)^{-1}$.