EJEMPLO 7:

Encontrar la solución particular de $\boldsymbol{2xy + 3x^2y + 3y^2 + (x^2 + 2y)y' = 0}$ usando la condición de frontera $\boldsymbol{y(1) = 2}$.

RESOLUCIÓN:

$$\underbrace{2xy + 3x^2y + 3y^2}_{P} + \underbrace{(x^2 + 2y)}_{Q}\, y' = 0$$

Explorando si existe factor $I(x)$:

$$\frac{(P_y - Q_x)}{Q(x,y)} = \frac{(2x + 3x^2 + 6y) - (2x)}{x^2 + 2y} = \frac{3x^2 + 6y}{x^2 + 2y} = 3$$

Notar que $I(x) = 3$ no depende de la variable y. Luego, puede concluirse que existe el factor integrante. El mismo será:

$$I(x) = e^{\int \frac{(P_y - Q_x)}{Q(x,y)} dx} = e^{\int 3dx} = e^{3x}$$

Luego, la *nueva* EDO $\underbrace{e^{3x}(2xy + 3x^2y + 3y^2)}_{P^*} + \underbrace{e^{3x}(x^2 + 2y)}_{Q^*}\, y' = 0$ será exacta.

Se verificará este hecho previamente (lo que permitiría detectar algún error). Es exacta si se cumple:

$$P^*{}_y = Q^*{}_x \Longrightarrow \frac{\partial e^{3x}(2xy + 3x^2y + 3y^2)}{\partial y} \overset{¿?}{=} \frac{\partial e^{3x}(x^2 + 2y)}{\partial x}$$

$$e^{3x}\,(2x + 3x^2 + 6y) \overset{¿?}{=} 3e^{3x}\,(x^2 + 2y) + e^{3x}2x$$

$$e^{3x}\,(2x + 3x^2 + 6y) = e^{3x}\,(3x^2 + 6y + 2x)$$

Ahora, verificada que la nueva EDO es exacta, se resolverá usando el procedimiento descripto en el apartado anterior, esto es, buscar la función f tal que $\begin{cases} f_x = e^{3x}\,(2xy + 3x^2y + 3y^2) \\ f_y = e^{3x}\,(x^2 + 2y) \end{cases}$

Se comenzará integrando la segunda ecuación del sistema (por simplicidad):

$$f = \int f_y dy = \int e^{3x}(x^2 + 2y)\, dy = \int (e^{3x}x^2 + 2ye^{3x})dy = e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 + h(x)$$

$$f = e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 + h(x)$$

Derivando la anterior y usando la primera condición del sistema:

$$f_x = 3y\, e^{3x}x^2 + 2xy\, e^{3x} + 3\, e^{3x}y^2 + h'(x) = e^{3x}(2xy + 3x^2y + 3y^2) \quad \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow\ 3y\, e^{3x}x^2 + 2xy\, e^{3x} + 3\, e^{3x}y^2 + h'(x) = e^{3x}2xy + 3e^{3x}x^2y + 3e^{3x}y^2 \Longrightarrow h'(x) = 0 \Longrightarrow h(x) = K$ (constante que se unifica con la proveniente de la solución $f(x,y) = C$).

Luego, la solución general es $\boldsymbol{e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 = C}$.

Para determinar la solución particular se determinará la constante $\boldsymbol{C}$ usando la condición de frontera $\boldsymbol{y(1) = 2}$, esto es, si $\boldsymbol{x = 1 \implies y = 2}$.

Reemplazando en $\boldsymbol{e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 = C}$ se tiene $\boldsymbol{e^{3.1}1^2 2 + e^{31}2^2 = 6\,e^3 = C}$.

Por lo tanto, la solución particular es $\boldsymbol{e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 = 6\,e^3}$.