EJEMPLO 6:

Resolver $4x^3y + y + \left(x^4 + x - cos(y)\right)y' = 0$.

RESOLUCIÓN:

Para determinar si la EDO es exacta se debe usar el criterio de exactitud.

$$P(x,y) = 4x^3y + y \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 4x^3 + 1$$

$$Q(x,y) = x^4 + x - cos(y) \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^3 + 1$$

Dado que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, la ecuación es exacta.

Luego la solución es $f(x,y) = C$ siendo $f(x,y)$ una función tal que:

$$f_x(x,y) = P(x,y) = 4x^3y + y \qquad (1)$$

$$f_y(x,y) = Q(x,y) = x^4 + x - cos(y) \qquad (2)$$

Integrando la (1):

$$f = \int f_x(x,y)\,dx = \int (4x^3y + y)\,dx = x^4y + xy + h(y)$$

Al integrar respecto de la variable x debe agregar $h(y)$. Note que la misma al derivarse respecto de x es nula.

Derivando ahora la obtenida anteriormente con respecto a la variable y y utilizando la (2):

$$f_y = x^4 + x + h'(y) = x^4 + x - cos(y)$$

Luego, $h'(y) = -cos(y)$.

Finalmente, $h = sen(y)$.

Recordando que la solución responde a la forma $f(x,y) = C$, la solución es:

$$x^4y + xy + sen(y) = C$$