EJEMPLO 5:

Resolver $\boldsymbol{y'} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x^2}$; siendo $\boldsymbol{x} > 0$.

RESOLUCIÓN:

La EDO $\boldsymbol{y'} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x^2}$ es lineal ya que tiene la forma $\boldsymbol{y'} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$. En ella, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ y $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^2}$, continuas en el intervalo dado: $\boldsymbol{x} > 0$.

La solución será:

$$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}^{\int \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}}}\left(\int \boldsymbol{e}^{\int \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{C}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}^{\int \frac{1}{x} \boldsymbol{dx}}}\left(\int \boldsymbol{e}^{\int \frac{1}{x} \boldsymbol{dx}} \boldsymbol{x^2}\, \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{C}\right)$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{x}|}}\left(\int \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{x}|} \boldsymbol{x^2}\, \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{C}\right) = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{x}|}\left(\int |\boldsymbol{x}| \boldsymbol{x^2}\, \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{C}\right)$$

Usando $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{x}|} = |\boldsymbol{x}|$ y el hecho que sólo se busca la solución si $\boldsymbol{x} > 0$:

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{x}|} = |\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}$$

$$y = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\left(\int \boldsymbol{x^3}\, \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{C}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\boldsymbol{x^4}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{C}\right)$$

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{\boldsymbol{x^3}}{\mathbf{4}} + \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{x}}\right)$$

Si el lector se pregunta por qué se eligió como dominio $\boldsymbol{x} > 0$, recordar que tanto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ como $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ deben ser continuas.

Se deja como ejercicio probar que al mismo resultado se llega si $\boldsymbol{x} < 0$.