

**EJEMPLO 4:**

Resolver  $xy y' = x^2 + y^2$ .

**RESOLUCIÓN:**

$$xy y' = x^2 + y^2 \Rightarrow y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

Luego:

$$y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = \frac{1}{v} + v$$

Se reescribió la ecuación  $y' = f(v) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ . Entonces es homogénea; y para resolverla, se la transforma en una EDO de variables separadas haciendo el cambio  $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$ .

Entonces:

$$y' = v'x + v = \frac{1}{v} + v \Rightarrow v'x = \frac{1}{v} \Rightarrow v dv = \frac{dx}{x}$$

Integrando m. a m.:

$$\int v dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow 0,5 v^2 = \ln|x| + C$$

Volviendo a la variable original:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2 \ln|x| + C \Rightarrow y^2 = 2x^2 \ln|x| + Cx^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2x^2 \ln|x| + Cx^2}$$

En el siguiente gráfico se pueden apreciar algunas curvas integrantes de la familia solución.

