EJEMPLO 2:

Por experimentación se sabe que la desintegración radiactiva se comporta según el siguiente principio: ***La tasa a la que una cantidad de un isótopo radiactivo se desintegra es proporcional a la cantidad de isótopo presente. La constante de proporcionalidad depende únicamente de la partícula radiactiva considerada.***

La vida media de un isótopo radiactivo es el tiempo que tarda una cantidad de material radiactivo en desintegrarse a la mitad de su cantidad original. Se sabe que la vida media del carbono 14 es 5730 años. Dicho dato es importante porque puede ser utilizado para determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del material orgánico, dado que el isótopo C-14 constituye una porción constante del carbono total y una vez que la materia muere, el C-14 presente se desintegra. Entonces, al medir la cantidad de C-14 que aún permanece en la materia orgánica puede calcularse el "tiempo desde la muerte". Utilizar los datos dados para determinar la cantidad de años de la que data un fósil que tiene un 10 % del C-14 original.

RESOLUCIÓN:

La EDO que modela la cantidad de carbono a través del tiempo será $\frac{dy}{dt} = \boldsymbol{k\, y(t)}$. Entonces, $\boldsymbol{y(t) = C_o e^{k\,t}}$. La constante $\boldsymbol{k}$ puede determinarse usando el dato que la vida media es $\boldsymbol{t_{v\frac{1}{2}} = 5730}$ años.

Luego, $\boldsymbol{y\left(t_{v\frac{1}{2}}\right) = 0,5C_o = C_o e^{k\,5730}}$.

Luego, $\boldsymbol{e^{5730\,k} = 0,5 \Rightarrow k = \frac{ln\,(0,5)}{5730} \cong -0.000120968}$.

Notar que $\boldsymbol{k}$ es negativa dado que la cantidad de C-14 disminuye (la función solución es una exponencial decreciente; luego, su razón de cambio es negativa).

La función que modela la cantidad de carbono presente luego de $\boldsymbol{t}$ años es:

$$\boldsymbol{y(t) = C_o e^{\frac{ln\,(0,5)}{5730}t}}$$

Llamando $\boldsymbol{t_m}$ al tiempo de data del fósil, y utilizando la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{y(t_m) = 0,1C_o = C_o e^{\frac{ln\,(0,5)}{5730}t_m}}$$

Así, $\boldsymbol{0,10 = e^{\frac{ln\,(0,5)}{5730}t_m} \Rightarrow ln\,0,10 = \frac{ln\,(0,5)}{5730}\,t_m \Rightarrow t_m = 5730\frac{ln\,(0,10)}{ln(0,5)} \Rightarrow t_m \cong 19000}$ años.