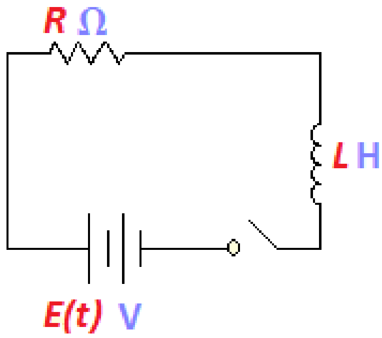
EJEMPLO 12:

En el gráfico se muestra un circuito eléctrico sencillo. En el mismo hay una batería que genera fuerza electromotriz capaz de mantener una diferencia de potencial $\boldsymbol{E(t)}$ y una corriente $\boldsymbol{I(t)}$, la que se medirá en amperes $\boldsymbol{A}$. El circuito tiene además una resistencia $\boldsymbol{R}$ y un inductor de inductancia $\boldsymbol{L}$.



Se desea conocer la corriente $\boldsymbol{I(t)}$ que se generará en el circuito.

a) Para cualquier $\boldsymbol{E(t)}$; $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{L}$

b) $\boldsymbol{E(t) = 12V;\ R = 2\Omega;\ L = 1H.}$

c) $\boldsymbol{E(t) = 12\ sen(t);\ R = 2\Omega;\ L = 1H.}$

<u>**Nota**</u>: en el Sistema Internacional de Unidades:

El voltio $\boldsymbol{V}$ se define como la diferencia de potencial a lo largo de un conductor cuando una corriente de $\boldsymbol{1A}$ utiliza $\boldsymbol{1W}$ (watt) de potencia: $\boldsymbol{V = W/A}$.

Ampere $\boldsymbol{A}$ es la unidad de intensidad de corriente eléctrica. El Coulomb $\boldsymbol{C}$ es la cantidad de carga desplazada por una corriente de $\boldsymbol{1A}$ en el tiempo de $\boldsymbol{1}$ segundo $\boldsymbol{s}$. Así $\boldsymbol{A = \frac{C}{s}}$.

El Ohm $\boldsymbol{\Omega}$ es la unidad de resistencia eléctrica equivalente a $\boldsymbol{\Omega = \frac{V}{A}}$.

El Henrio $\boldsymbol{H}$ es la inductancia eléctrica de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de $\boldsymbol{1V}$, cuando la corriente eléctrica que recorre el circuito varía uniformemente a razón de $\boldsymbol{1A}$ por segundo. Equivale $\boldsymbol{H = \Omega\, s}$.

RESOLUCIÓN:

a) La ley de Ohm expresa que en cada resistencia $\boldsymbol{R}$ la caída de potencial es proporcional a la resistencia y a la corriente ($\boldsymbol{\Delta V_R = RI}$), mientras que la caída en el inductor es proporcional tanto a la inductancia como a la variación de corriente en él ($\boldsymbol{\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}}$). Una de las leyes de Kirchoff establece que el voltaje que proporciona la fuente $\boldsymbol{E(t\,)}$ es equivalente a la suma de las caídas de potencial en el circuito (en éste debido a la resistencia y a la inductancia).

$$\boldsymbol{E(t) = \Delta V_L + \Delta V_R = L\frac{dI}{dt} + IR}$$

Note que la EDO resultante $\boldsymbol{L\frac{dI}{dt} + IR = E(t)}$ es lineal.

Reescribiéndola $\boldsymbol{I'(t) + \frac{R}{L}\,I(t) = \frac{E(t)}{L}}$, siendo $\boldsymbol{P(t) = \frac{R}{L}}$ y $\boldsymbol{Q(t) = \frac{E(t)}{L}}$.

Luego, la solución general es $\boldsymbol{-I(t) = \frac{1}{e^{\int \frac{R}{L}dt}}\left(\int e^{\int \frac{R}{L}dt}\,\frac{E(t)}{L}\,dt + C\right)}$.

Para calcular la solución particular debe usarse la condición inicial $\boldsymbol{I(0) = 0}$.

Advertir que si $\boldsymbol{R}$ está dada en que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{L}$ en $\boldsymbol{H}$, entonces $\frac{R}{L} = \frac{\Omega}{H} = \frac{\Omega}{\Omega\, s} = s^{-1}$, luego $e^{\int \frac{R}{L} dt}$ es adimensional si $\boldsymbol{t}$ es el tiempo en segundos.

Por otro lado:

$$\frac{E(t)}{L} = \frac{V}{H} = \frac{W/A}{\Omega\, s} = \frac{W/A}{V/A\ s} = \frac{W}{s} = \frac{A}{s}$$

Luego $\int e^{\int \frac{R}{L} dt} \frac{E(t)}{L} dt$, estará en Ampere si $\boldsymbol{E}$ está en Voltios, $\boldsymbol{L}$ en Henrios, $\boldsymbol{R}$ en Ohms y $\boldsymbol{t}$ en segundos.

Así, teniendo cuidado de utilizar las unidades del sistema internacional es posible prescindir de ellas en la resolución de la ecuación.

b) $\boldsymbol{R = 2\Omega;\ L = 1H}$ y $\boldsymbol{E(t) = 12V}$.

$$\frac{R}{L} = \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{E(t)}{L} = \frac{12}{1} = 12$$

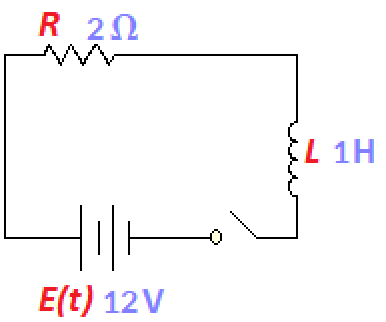
$$I(t) = \frac{1}{e^{\int 2\, dt}} \left(\int e^{\int 2 dt} 12\, dt + C \right) = \frac{1}{e^{2\,t}} \left(12 \frac{e^{2t}}{2} + C \right) = 6 + \frac{C}{e^{2t}}$$

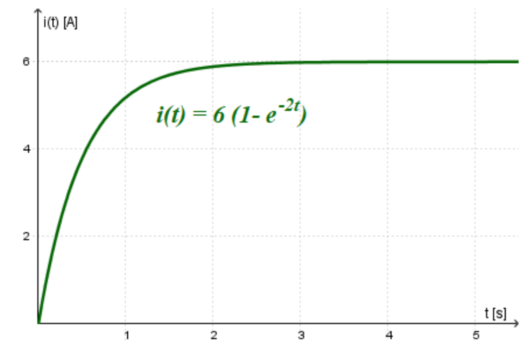
Utilizando $I(0) = 0 = 6 + \frac{C}{e^0};\ \ C = -6$.

Luego:

$$I(t) = 6(1 - e^{-2t})$$

Notar que, en este caso particular, rápidamente la corriente se estabiliza en $\boldsymbol{6A}$, prácticamente.





c) $\mathbf{R = 2\Omega;\ } \boldsymbol{L = 1H}$ y $\boldsymbol{E(t) = 12\ sen(6t)\ V}$

$$\frac{R}{L} = \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{E(t)}{L} = \frac{12}{1} = 12\ sen(6t)$$

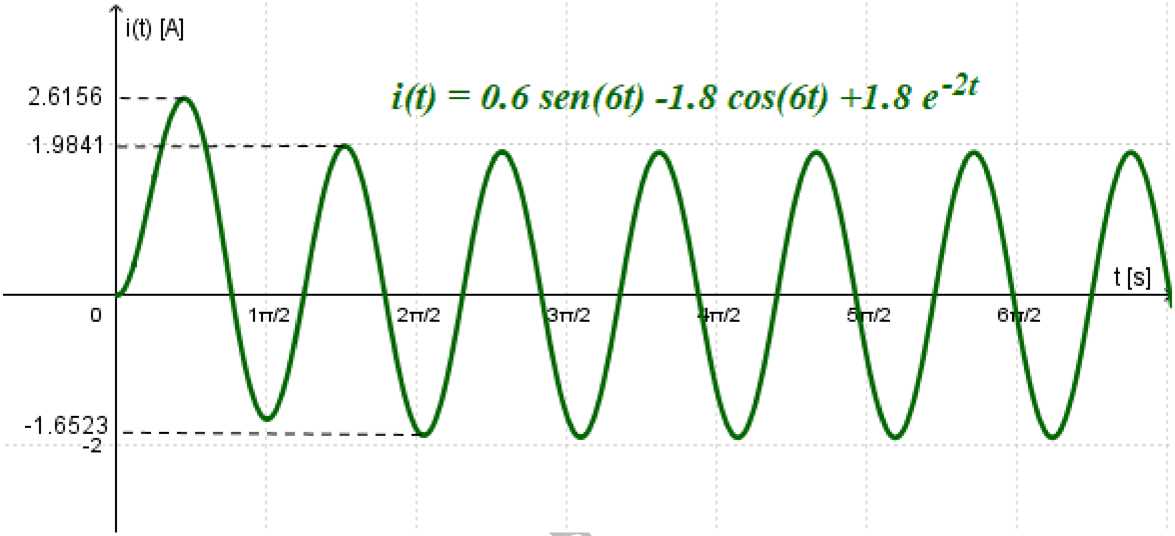
$$I(t) = \frac{1}{e^{\int 2\, dt}} \left(\int e^{\int 2\, dt} 12\ sen(6t) dt + C \right) = \frac{1}{e^{2\,t}} \left(12 \int e^{2t}\ sen(6t)\, dt + C \right)$$

Siendo $\int e^{2t}\ sen(6t)dt = \frac{e^{2t}}{20}[\,sen(6t) - 3\,cos\,(6t)]$

$$I(t) = \frac{1}{e^{2t}}\left(12\ \frac{e^{2t}}{20}[\,sen(6t) - 3\,cos\,(6t)] + C\right)$$

Utilizando $I(0) = 0 = -1{,}8 + C \implies C = 1{,}8$.

$$I(t) = 0{,}6\,sin(6t) - 1{,}8\,cos\,(6t) + 1{,}8\,e^{-2t}$$



Tanto de la expresión analítica de $I(t)$ como de su gráfico se desprende que la corriente no es periódica, sin embargo, cuando $t \to \infty$, el sumando $1{,}8\,e^{-2t}$ pierde su influencia sobre la corriente ($lim_{n\to\infty}\,1{,}8\,e^{-2t} = 0$), entonces $I(t)$ tiende a estabilizarse en un comportamiento periódico ($I(t) = 0{,}6\,sin(6t) - 1{,}8\,cos\,(6t)$), donde la corriente máxima será $I_{max} \cong 1.897$.