Teorema 5: ***Método de variación de las constantes para determinar la solución propia.***

H) Dada $\vec{x}'(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$
A_s matriz cuadrada de tamaño n
$\vec{f}(t)$ con funciones componentes continuas

T) $\overrightarrow{X_p}(t) = e^{A_s\,t}\int e^{-A_s\,t}\vec{f}(t)\,dt$ es solución propia del sistema inhomogéneo.

Demostración:

Por las similitudes mencionadas anteriormente entre los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones diferenciales lineales, no será casual que se utilice el método de *variación de parámetros o de constantes* para determinar $\overrightarrow{X_p}(t)$.

Se supondrá entonces que $\overrightarrow{X_p}(t) = e^{A_s\,t}\,\vec{u}(t)$; esto es, se *varía* el vector constante $\vec{K}$ por la función vectorial $\vec{u}(t)$.

Derivando m. a m.:

$$\overrightarrow{X'_p} = A_s\,\underbrace{e^{A_s\,t}\,\vec{u}}_{\overrightarrow{X_p}(t)} + e^{A_s\,t}\,\vec{u}'$$

Así:

$$\overrightarrow{X'_p} = A_s\,\overrightarrow{X_p} + e^{A_s\,t}\,\vec{u}' \qquad (1)$$

Por otro lado, $\overrightarrow{X_p}$ es solución de $\vec{x}'(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$

Entonces:

$$\overrightarrow{X'_p} = A_s\,\overrightarrow{X_p} + \vec{f}(t) \qquad (2)$$

Utilizando las fórmulas (1) y (2): $e^{A_s\,t}\,\vec{u}' = \vec{f}(t)$.

Sabiendo que $e^{A_s\,t}$ es no singular, es posible despejar $\vec{u}' = e^{-A_s\,t}\vec{f}(t)$, y a partir de ésta calcular $\vec{u}(t) = \int e^{-A_s\,t}\vec{f}(t)\,dt$, siendo entonces la solución propia $\overrightarrow{X_p}(t) = e^{A_s\,t}\int e^{-A_s\,t}\vec{f}(t)\,dt$.