Teorema 2: ***Solución general de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales; forma matricial.***

H) $\boldsymbol{y_1}$ es solución de $\boldsymbol{a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = f_1(x)}$

$\boldsymbol{y_2}$ es solución de $\boldsymbol{a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = f_2(x)}$

T) $\boldsymbol{A_s \in R^{n\times n}}$ con coeficientes reales

$\boldsymbol{\vec{x}(t)}$ función vectorial derivable sobre $\boldsymbol{R^n}$

$\boldsymbol{\vec{K} \in R^n}$ cuyas componentes son constantes cualquiera

Demostración:

Por hipótesis:

$$e^{A_s t} = I + A_s t + \frac{1}{2!}(A_s t)^2 + \frac{1}{3!}(A_s t)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(A_s t)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_s^n t^n$$

Usando el teorema que expresa que una serie de potencias puede derivarse término a término sin que por ello cambie su radio de convergencia se tiene:

$$\frac{d\left(e^{A_s t}\vec{K}\right)}{dt} = \frac{d\left(e^{A_s t}\right)}{dt}\vec{K} = \frac{d\left(I + A_s t + \frac{1}{2!}(A_s t)^2 + \frac{1}{3!}(A_s t)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(A_s t)^n + \cdots\right)}{dt}\vec{K} =$$

$$= \frac{d\left(e^{A_s t}\vec{K}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}{A_s}^n t^n\,\vec{K} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n!}{A_s}^n t^n\right)\vec{K} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}{A_s}^n t^{n-1}\,\vec{K}$$

Notar que la derivada del primer término de la serie $\left(\frac{dI}{dt}\right)$ es nulo, de allí que la última sumatoria comience desde $\boldsymbol{n = 1}$. Haciendo algunas simplificaciones se tiene:

$$\frac{d\left(e^{A_s t}\vec{K}\right)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1!}{A_s}^n t^{n-1}\vec{K} \underbrace{=}_{\substack{cambiando\\ n-1=m}} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}{A_s}^{m+1}t^m\vec{K} \underbrace{=}_{\substack{Usando\\ {A_s}^{m+1}=A_s\,{A_s}^m}} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}A_s\,{A_s}^m t^m\,\vec{K} =$$

$$= \frac{d\left(e^{A_s t}\vec{K}\right)}{dt} \underbrace{=}_{\substack{Sacando\ \ factor\ común\\ las\ matriz\ As\ y\ extrayéndola\\ fuera\ de\ la\ sumatoria;\ ídem\ \vec{K}}} A_s\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}{A_s}^m t^m\right)\vec{K} \underbrace{=}_{\substack{Usando\ la\\ definición\ de\\ matriz\ exponencial}} A_s\,e^{A_s\,t}\,\vec{K}$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{e^{A_s\,t}\vec{K}}_{\vec{X}(t)}\right) = A_s\ \underbrace{e^{A_s\,t}\vec{K}}_{\vec{X}(t)}$$

Lo que prueba que $\vec{X}(t)$ es la solución general de la ecuación $\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t)$.