Teorema 9: ***Método de variación de los parámetros para*** $ay'' + by' + cy = f(x)$

H) y_1; y_2 soluciones *Li* de $ay'' + by' + cy = 0$; $a \neq 0$

Existen dos funciones u_i derivables tales que solucionan $S = \begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = \frac{f(x)}{a} \end{cases}$

T) $y_p = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$ es solución de $ay'' + by' + cy = f(x)$

Demostración:

Siendo $y_C = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ solución de la ecuación homogénea asociada a la que se desea resolver, este método consiste en suponer que la solución propia de $a\,y'' + b\,y' + cy = f(x)$ será $y_p = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$. Esta suposición es la que da origen al nombre del método, dado que se cambian los parámetros c_i por las funciones $u_i(x)$ (se hacen variables los parámetros). Se simplifica la notación de las funciones $y_i(x)$ y $u_i(x)$ con y_i y u_i prescindiendo de denotar que dependen de x. Así:

$$y_p = u_1\ y_1 + u_2\ y_2$$

Calculando la primera derivada:

$$y'_p = u'_1\ y_1 + u_1 y'_1 + u'_2\ y_2 + u_2 y'_2$$

Reordenando:

$$y'_p = \underbrace{u'_1 y_1 + u'_2\ y_2}_{\substack{=0\ por\ hipótesis \\ (1^{\circ}\ ecuación\ de\ S)}} + u_1 y'_1 + u_2 y'_2 \quad \Rightarrow\ y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2$$

Calculando $y_{p''}$:

$$y''_p = u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2$$

La y_p será solución de la EDO $a\,y'' + b\,y' + cy = f(x)$ si la verifica. Reemplazando y_p , y'_p e y''_p en el primer miembro de la ecuación se tiene:

$$a(u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2) + b(u_1 y'_1 + u_2 y'_2) + c(u_1\ y_1 + u_2\ y_2) \overset{¿?}{=} f(x)$$

Agrupando los términos que tienen factor común u_i:

$$\boldsymbol{u_1}\left(\underbrace{\boldsymbol{a y_1'' + b\, y_1' + c\, y_1}}_{=\mathbf{0}}\right) + \boldsymbol{u_2}\left(\underbrace{\boldsymbol{a y_2'' + b y_2{}' + c\, y_2}}_{=\mathbf{0}}\right) + \boldsymbol{a}(\underbrace{\boldsymbol{u_2' y_2' + u_1' y_1'}}_{\frac{f(x)}{a}}) \overset{¿?}{=} \boldsymbol{f(x)}$$

Los dos términos entre paréntesis son nulos por hipótesis, ya que $\boldsymbol{y_1}$ e $\boldsymbol{y_2}$ son soluciones de la EDO homogénea. El tercer paréntesis, también por hipótesis es equivalente a $\frac{f(x)}{a}$, por la segunda ecuación de $\boldsymbol{S}$. Entonces, utilizando $\boldsymbol{y_p}$ se redujo la EDO a la identidad $\boldsymbol{f(x) = f(x)}$.

Por ello, $\boldsymbol{y_p}$ es solución propia.