Teorema 6: *Solución general de la EDO LH de segundo orden con coeficientes reales constantes según el tipo de raíces de su polinomio característico.*

H) $ay'' + by' + cy = 0$

$p(m) = a\,m^2 + b\,m + c$

m_1 y m_2 raíces de $p(m)$

T) a) m_1 y m_2 raíces reales distintas $\Rightarrow$ $y = c_1\,e^{m_1 x} + c_2\,e^{m_2 x}$

b) $m_1 = m_2$ $\Rightarrow$ $y = c_1\,e^{m_1 x} + c_2\,x\,e^{m_1 x}$

c) $m_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$ raíces complejas conjugadas $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = c_1\,e^{\alpha x} cos(\beta x) + c_2\,e^{\alpha x} sen(\beta x)$

Demostración:

En todos los casos se buscan un par de soluciones *Li*. Se sabe que el polinomio $a\,m^2 + b\,m + c$ tiene exactamente dos raíces, pudiendo ser éstas reales (iguales o distintas) o complejas, dependiendo si $b^2 - 4ac$ es positivo, negativo o nulo. Se analizan por separado las tres posibilidades.

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, por el teorema de la ecuación característica las funciones $e^{m_1 x}$ y $e^{m_2 x}$ son dos soluciones de la EDO. Note que si $m_1 \neq m_2$ la única solución de $Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} = 0$ es $A = B = 0$, luego $e^{m_1 x}$ y $e^{m_2 x}$ son linealmente independientes. Luego la solución general será:

$$y = c_1\,e^{m_1 x} + c_2\,e^{m_2 x} = c_1\,e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x} + c_2\,e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x}$$

b) Si $b^2 - 4ac = 0$ tiene dos raíces reales iguales, $m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a}$, el teorema de la ecuación característica sólo aporta una de las soluciones:

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{-\frac{b}{2a}x}$$

Se debe probar que bajo estas condiciones $y_2 = xe^{-\frac{b}{2a}x}$ es también solución (solución propuesta).

Derivando:

$$y_2' = e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_2'' = -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x} = -\frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

Reemplazando en $\boldsymbol{a\,y'' + by' + cy}$, se pretende demostrar que se reduce a $\mathbf{0}$.

$$ay'' + by' + cy = a\left(-\frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x}\right) + b\left(e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}\right) + c\left(xe^{-\frac{b}{2a}x}\right)$$

Desarrollando y reagrupando:

$$ay'' + by' + cy = -\,be^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + be^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b^2}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + cxe^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$ay'' + by' + cy = \left(\frac{-b^2}{4a} + c\right)xe^{-\frac{b}{2a}x} \underbrace{=}_{\substack{Reemplazando \\ b^2=4ac}} \left(\frac{-4ac}{4a} + c\right)xe^{-\frac{b}{2a}x} = 0$$

Entonces que $ay'' + by' + cy = 0$, lo que prueba que $y_2 = xe^{-\frac{b}{2a}x}$ es solución de la EDO si $b^2 - 4ac = 0$ (esto es, si $-\frac{b}{2a}$ es raíz doble de la ecuación característica). Luego, la solución general es:

$$y = c_1\,e^{m_1\,x} + c_2 x\,e^{m_1\,x} = c_1\,e^{\frac{-b}{2a}\,x} + c_2 x\,e^{\frac{-b}{2a}\,x}$$

c) $p(m)$ tiene dos raíces complejas conjugadas si $b^2 - 4ac < 0$. Note que $m_1 \neq m_2$; luego, el teorema de la ecuación característica aporta las dos soluciones *Li* buscadas.
Éstas son $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ e $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$. Así la solución general puede expresarse como:

$$y(x) = Ae^{(\alpha+\beta i)x} + Be^{(\alpha-\beta i)x}$$

El problema radica que estas soluciones son complejas. Usando la forma exponencial de un complejo (ver apéndice):

$$y(x) = Ae^{\alpha x}(cos(\beta x) + i\,sen(\beta x)) + Be^{\alpha x}(cos(-\beta x) + i\,sen(-\beta x))$$

Siendo coseno una función par y el seno una impar:

$$y(x) = Ae^{\alpha x}(cos(\beta x) + i\,sen(\beta x)) + Be^{\alpha x}(cos(\beta x) - i\,sen(\beta x))$$

Reagrupando:

$$y(x) = \underbrace{(A+B)}_{c_1}e^{\alpha x}cos(\beta x) + \underbrace{i(A-B)}_{c_2}e^{\alpha x}sen(\beta x)$$

Esta expresión da las soluciones reales y complejas de la ecuación diferencial, aunque en este texto sólo se está interesado en los coeficientes que arrojan valores c_1 y c_2 reales. Es de observar que $e^{\alpha x}cos(\beta x)$ y $e^{\alpha x}sen(\beta x)$ son funciones linealmente independientes. Luego, la solución general es:

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\,cos(\beta x) + c_2\,sen(\beta x))$$