Teorema 5: ***La ecuación característica.***

H) $\boldsymbol{y = e^{mx}}$ es solución de:

$$\boldsymbol{a_n\, y^{(n)} \; + \; a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_o y(x) = 0}$$

T) $\boldsymbol{m}$ es solución de la ecuación:

$$\boldsymbol{a_n m^n + \; a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_o = 0}$$

Demostración :

Para demostrar este teorema se usará el recurso muy común del "ensayo y error", que en otras palabras es proponer una solución elegida, ya sea azarosamente, o con algún criterio intuitivo y aceptarla o descartarla, según se verifique o no la ecuación. En matemática suele decirse "por inspección". Dado que se buscan funciones tales que una combinación lineal de sus derivadas se anule, es bastante lógico pensar que la misma debe tener la particularidad que sus derivadas se parezcan entre sí y a ella misma. Una función que califica es:

$$\boldsymbol{y = e^{mx}}$$

Así:

$$\boldsymbol{y' = me^{mx}}$$

$$\boldsymbol{y'' = m^2 e^{mx}}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{y^{(n)} = m^n e^{mx}}$$

Reemplazando en la EDO homogénea:

$$\boldsymbol{a_0 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_2 m^2 e^{mx} + \cdots + a_n m^n e^{mx} = 0}$$

$$\boldsymbol{e^{mx}(a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \cdots + a_n m^n) = 0}$$

Dado que:

$$\boldsymbol{e^{mx} \neq 0}$$

Se necesita entonces que:

$$\boldsymbol{a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \cdots + a_n m^n = 0}$$

Que es lo que se pretendía demostrar.
El lector puede probar que la recíproca también es cierta.