Teorema 4: ***Combinación lineal de la soluciones de una EDO homogénea.***

H) $\boldsymbol{y_1(x)}$ **e** $\boldsymbol{y_2(x)}$ soluciones de $\boldsymbol{a_0\, y(x) + a_1\, y'(x) + \cdots + a_n\, y^{(n)}(x) = 0}$ $\quad (*)$

$\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$ constantes cualesquiera;

$\boldsymbol{a_i}$ son funciones continuas en algún intervalo $\boldsymbol{I}$.

T) $\boldsymbol{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}$ también es solución de:

$\boldsymbol{a_0\, y(x) + a_1\, y'(x) + \cdots + a_n\, y^{(n)}(x) = 0}$

Demostración:

Por propiedades de la derivada:

$$\boldsymbol{y^{(n)} = c_1 {y_1}^{(n)} + c_2 {y_2}^{(n)}}$$

Reemplazando en el primer miembro de la EDO:

$$\boldsymbol{a_0[c_1 y_1 + c_2 y_2] + a_1[c_1 {y_1}' + c_2 {y_2}'] + \cdots + a_n[c_1 {y_1}^{(n)} + c_2 {y_2}^{(n)}]}$$

Reagrupando y utilizando como factor común a $\boldsymbol{c_1}$ y a $\boldsymbol{c_2}$:

$$\boldsymbol{c_1}\left[\underbrace{\boldsymbol{a_0 y_1 + a_1 y_1' + \cdots + a_n {y_1}^{(n)}}}_{=\,0 \text{ ya que por hipótesis } y_1 \text{ es solución de la ecuación homogénea } (*)}\right] +$$

$$+\boldsymbol{c_2}\left[\underbrace{\boldsymbol{a_0 y_2 + a_1 y_2' + \cdots + a_n {y_2}^{(n)}}}_{=\,0 \text{ ya que por hipótesis } y_2 \text{ es solución de la ecuación homogénea } (*)}\right] = \boldsymbol{0}$$

Lo que significa que:

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$$

Verifica:

$$\boldsymbol{a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = 0}$$

Lo que prueba la tesis.