Lección 2– Las Categorías - Identidad

Motivación – El concepto de identidad no es familiar, es trivial pero es matemáticamente fundamental

El concepto de identidad es fundamental en las matemáticas. Técnicamente, es una trivialidad, Por ejemplo, en operaciones aritméticas la identidad “no tiene efecto” puesto que deja al número sin cambiar:

$$a+0 = a, \qquad a\times 1 = a,$$

En el caso de las funciones, la identidad I tampoco “hace nada”; en términos de elementos:

$$I(x) = x,$$

O en términos de composición de funciones, que es más similar al caso de operaciones aritméticas, tenemos que tampoco “hace nada”:

$$I \circ f = f, \quad f \circ I = f$$

Sin embargo, la identidad juega un papel crucial en el método axiomático para poder deducir propiedades básicas de los entes en cuestión. Es el concepto de identidad que nos permite, por ejemplo, hablar del inverso de un elemento relativo a una operación dada. En el caso de las operaciones aritméticas, por ejemplo, la suma, dado un número arbitrario **a**, el inverso aditivo se define como un número **b** tal que **a + b = la identidad aditiva = 0**.

Por lo anterior no es sorprendente, que el concepto de identidad también juegue un papel fundamental en las categorías. Para ilustrarlo, vamos a ver en esta lección como se traduce el concepto de identidad en el ejemplo de una familia con la relación “**ser parte de**”.

Inicio 1 - El concepto de identidad en nuestro ejemplo

En los ejemplos en la escena de motivación, la identidad **I** es un elemento relativo a una operación dada ***** que cuando se aplica la operación entre este elemento y otro arbitrario **A** el resultado es el elemento arbitrario dado:

$$A * I = A$$

Para llevar el concepto ubicuo de identidad a las categorías, necesitamos primero una operación entre las flechas que al aplicarla a una flecha identidad y a otra flecha arbitraria va a resultar en la flecha arbitraria.

Sin embargo, en la categoría que estamos tratando de descubrir aún no hemos definido esta operación, así que para encontrar las flechas que van a jugar el papel de identidad vamos a tener que proceder de otra manera.

Vamos a proceder por analogía imitando a la función idéntica **I** que, en el caso de funciones, está definida como **I**(x)=x.

Para esto, vamos a pensar en flechas como ‘funciones’ que asocian a su **dominio** su **codominio**, e.g para la flecha **α**: **p** $\rightarrow$ **ph**, escribimos **α**(**p**) = **ph.**

En estos términos, para el objeto **p**, tendríamos una ‘función’ idéntica **I**(**p**) = **p** que escribiendo como flecha sería **I** : **p** $\rightarrow$ **p.**

Esta ‘función’ solo funciona para el objeto **p,** pero esto lo podemos aplicar a todos los objetos de nuestro ejemplo.

De esta forma obtenemos 8 identidades, una para cada **x** $\in$ **{n, p, h, m, ph, c, mh, f}** que denotamos como $\mathbf{I_x}$

Las flechas representan la relación “**ser parte de**” así que I_p : **p** $\rightarrow$ **p** significa que ‘papá **es parte de** papá’. Podemos entonces decir que cada miembro o grupo de miembros es parte de sí mismo.

Para la relación “**ser parte de**”, **ser parte de sí mismo** no es una manera común de ver las cosas, pero **tampoco** es incorrecto.

Desde el punto de vista de la relación “**ser parte de**”, ser parte de sí mismo no es una manera común de ver las cosas, pero **tampoco** es incorrecto.

Esto es una forma de completar la estructura matemática en forma similar al caso del miembro de la familia “**nadie**”.

Un aspecto mucho más importante es que matemáticamente va a jugar un papel crucial en el juego axiomático como en el caso de todos los ejemplos mencionados en la escena de motivación.

El concepto de identidad que hemos obtenido en la categoría que estamos descubriendo, constituye un ingrediente fundamental que ilustra el concepto general de categoría.

Genéricamente, las identidades que hemos encontrado son: x **es parte de** x, donde x es cualquiera de los miembros o grupos de miembros de la familia: nadie, papá, mamá, hijo, papá e hijo, pareja (de casados), mamá e hijo y familia:

nadie **es parte de** nadie
papá **es parte de** papá
mamá **es parte de** mamá
hijo **es parte de** hijo
papá e hijo **es parte de** papá e hijo
pareja **es parte de** pareja
mamá e hijo **es parte de** mamá e hijo
familia **es parte de** familia

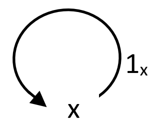
Cuando definamos la operación entre las flechas vamos a verificar que las identidades de hecho tienen la propiedad: **I** $\circ$ **f = f, f** $\circ$ **I = f,** donde ‘ $\circ$ ’ denota la operación que tenemos que definir.

Desarrollo - Características de las identidades

Las identidades, como diagrama de flechas: **x** $\rightarrow$ **x**, tienen **dominio x** y **codominio x**, donde, **x** es cualquiera de los miembros o grupo de miembros de la familia, i.e. un elemento de: **{ n, p, h, m, ph, c, mh, f}**

Por ejemplo, de acuerdo con esta convención, **h** $\rightarrow$ **h** denota la relación familiar hijo es parte de hijo.

Usando la notación $\mathbf{1_x}$ nombramos a la flecha $\mathbf{1_x}$: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}$. Este diagrama lo podemos simplificar colapsando las **x**:



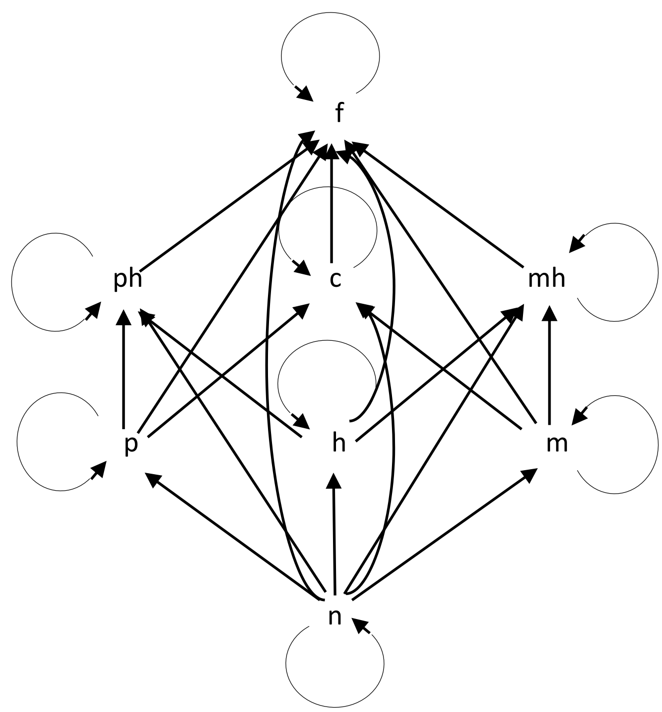
En esta notación podemos decir que **x** es parte de sí mismo. Obsérvese, que para cada objeto x de la colección de objetos **{ n, p, h, m, ph, c, mh, f}** hay exactamente una relación asociada al objeto con **dominio** y **codominio x**.

Este es un requerimiento general para una categoría arbitraria: A cada **objeto A** se le asocia un **morfismo** $\mathbf{1}_A$ llamado la identidad con **dominio** = **codominio** = **A**.

Veremos en otra lección que una consecuencia sencilla de los axiomas es que la identidad es única para cada objeto.

Cierre - Descubriendo las categorías: El concepto fundamental de identidad

Con el concepto de identidad podemos completar el diagrama que muestra la estructura de todas las relaciones posibles de la familia:



También es importante notar cuando no hay flechas entre miembros o grupos de miembros de la familia, por ejemplo, entre p y h, o entre p y mh.

Con el concepto de identidad tenemos otro ingrediente necesario para formar una categoría. Vamos a resumir los ingredientes que hasta ahora tenemos:

Dos colecciones:

1. Una colección finita o infinita de objetos
2. Una colección finita o infinita de morfismos (flechas)

Las dos colecciones están relacionadas de la siguiente manera:

a. A cada **morfismo** se le asocia un **objeto** llamado dominio y otro **objeto** llamado codominio. Dado un morfismo α, usamos la notación $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para indicar que el morfismo α tiene dominio A y codominio B.
b. A cada **objeto** A se le asocia un **morfismo** llamado la identidad con dominio = codominio = A. Con la notación de flechas escribimos: $1_{\mathbf{A}}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$

En lecciones subsecuentes vamos a poder definir una operación parcial entre los morfismos que satisface ciertas propiedades. Con esto completaremos la lista de ingredientes que constituyen una categoría.

Referencias

1. Lawvere, F. W. and Schanuel, S.H. (1991*). Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories.* Buffalo Workshop Press, Buffalo NY.

2. Magnan, F. and Reyes, G. E. (1994). Category Theory as a Conceptual Tool in the Study of Cognition (Ch. 5). In Macnamara, J. and Reyes, G. E. (Eds.). The logical foundations of cognition. Oxford University Press.