Lección 3 – Las Categorías – Composición

Objetivo
El objetivo de esta unidad interactiva es continuar con el estudio de las categorías, functores y transformaciones naturales. En esta lección introducimos el concepto de composición de morfismos en las categorías, el cual es el último y más importante ingrediente en la definición de éstas.

Motivación – combinando relaciones

En esta lección introducimos el concepto de composición de morfismos en las categorías, el cual es el último y más importante ingrediente que necesitamos en la definición de éstas. En este audio, en forma breve, damos antecedentes de la importancia de este concepto en las matemáticas en general y especialmente en las categorías.

La importancia de la composición de morfismos entre objetos se manifiesta proveyéndonos con una herramienta que nos permite un "cálculo de relaciones" a través del cual podemos estudiar propiedades de las relaciones entre objetos.

El ejemplo tradicional de categoría es el de la categoría de conjuntos. Otros ejemplos tradicionales de categorías son las categorías de conjuntos estructurados, e.g., grupos, espacios topológicos, etc., que están relacionadas por funciones que preservan la estructura, e.g, homomorfismos, en el caso de grupos, funciones continuas, en el caso de espacios topológicos, etc.

Lo que le da a estas categorías de conjuntos su poder es el concepto de función. La propiedad más importante de las funciones es la operación parcial, llamada composición, que crea una nueva función dada dos funciones. Para estudiar estos conjuntos estructurados, uno estudia todas las funciones entre ellos.

El concepto de categoría generaliza el concepto de función en el sentido de una relación abstracta entre objetos. En el ejemplo de la familia con la relación "**es parte de**" tenemos un ejemplo donde la relación entre objetos no es una función.

Inicio 1 - Ejemplos

En esta escena vamos a ver como se define una **operación parcial de composición** entre dos morfismos en la categoría de la familia con la relación "**es parte de**".

Cuando tenemos dos relaciones en donde, usando el lenguaje de flechas, el codominio de una (la punta) es el dominio de la otra (la cola), podemos formar una tercera relación, por ejemplo:

papá $\rightarrow$ **pareja de casados** y **pareja de casados** $\rightarrow$ familia

Podemos simplificar la notación sobrelapando "**pareja de casados**" indicando las dos relaciones en forma sucesiva como lo indica el siguiente diagrama:

papá $\rightarrow$ **pareja de casados** $\rightarrow$ familia

Estamos diciendo que si papá es parte de **pareja de casados** y **pareja de casados** es parte de familia entonces **papá es parte de familia**, lo cual es intuitivamente obvio. Usando la notación de flechas, esta relación la podemos escribir como una ecuación de diagramas que nos da esta última relación:

papá $\rightarrow$ pareja de casados $\rightarrow$ familia = papá $\rightarrow$ familia

También, lo podemos expresar como un diagrama de flechas:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{pareja de casados} \arrow[dr, "\beta"] & \\
\text{papá} \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & \text{familia}
\end{tikzcd}$$

Si en lugar de la notación gráfica de flechas usamos los nombres de éstas, podemos expresarlo simbólicamente como sigue:

$$\beta \circ \alpha = \gamma \qquad (1)$$

Observa que en esta notación invertimos el orden de los morfismos y el símbolo "$\circ$" lo usamos para denotar la operación que resulta de considerar a dos relaciones en forma sucesiva. También, el lado izquierdo de la ecuación (1) debe leerse de derecha a izquierda para que tenga el mismo sentido que tiene con la notación de flechas.

Definición

La **operación parcial** que resulta de considerar dos relaciones en forma sucesiva la llamamos **composición** de relaciones.

Esta es una **operación parcial** porque no siempre podemos hacer la composición de dos flechas arbitrarias. Para poder componer dos flechas, las flechas tienen que ser "compatibles", i.e. se tienen dos relaciones en donde la punta de una es la cola de la otra. Si esta **regla de compatibilidad** no se cumple decimos que la composición no es válida, lo que expresado en lenguaje natural, en nuestro ejemplo, también es obvio.

Ejemplos

Es obvio que no podemos componer "**hijo** es parte de **papá e hijo**" con "**mamá** es parte de **pareja de casados**" y concluir la relación inválida "hijo es parte de pareja de casados."

Por otro lado, si dos morfismos cumplen la regla de compatibilidad, los requisitos de una categoría piden que la composición sea un morfismo de la categoría. En nuestro ejemplo, dados dos objetos, en esta categoría solo tenemos dos posibilidades para morfismos entre éstos: 0 o 1 morfismos. Este no es el caso en categorías en general.

Vamos a ver ahora la consecuencia de que haya 0 o 1 morfismo entre dos objetos. Consideremos 3 morfismos $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{: n \to x}$, $\boldsymbol{\beta}\mathbf{: x \to y}$, $\boldsymbol{\gamma}\mathbf{: n \to y}$. Por la regla de compatibilidad de composición de flechas, podemos componer $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{: n \to x}$ con $\boldsymbol{\beta}\mathbf{: x \to y}$ y obtener $\boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\alpha}\mathbf{: n \to x \to y}$, que por la unicidad de morfismos debe ser $\boldsymbol{\gamma}\mathbf{: n \to y}$. De nuevo enfatizamos que esto resulta en esta categoría porque si hay un morfismo entre dos objetos éste es único, lo que no se puede esperar en categorías arbitrarias.

Por ejemplo, $\mathbf{n \to ph \to f} = \mathbf{n \to f}$, que dice que si "**nadie** es parte de **ph**" y "**ph** es parte de **f**" entonces "**nadie** es parte de **f**".

En forma similar vamos a ver ahora la consecuencia de que haya 0 o 1 morfismo entre dos objetos dados en el caso de las identidades, i.e., cuando componemos un morfismo con el morfismo identidad. Esto es, queremos ver cuál es el efecto de componer la flecha $\mathbf{1_a: a \to a}$ con $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{: a \to b}$, y con $\boldsymbol{\beta}\mathbf{: b \to a}$ respectivamente con a, b $\in$ { n, p, h, m, ph, c, mh, f,}.

Para que esta composición sea intuitiva, veamos un ejemplo concreto: $\mathbf{h \to h \to ph}$. Este morfismo debe ser el único que existe entre h y ph: $\mathbf{h \to ph}$. En lenguaje cotidiano esto lo expresaríamos como "**hijo** es parte de **sí mismo** e **hijo** es parte de **papá e hijo**" que podemos simplificar a "**hijo** es parte de **papá e hijo**", que corresponde a la conclusión anterior. Usando flechas, esta conclusión la escribimos $\mathbf{h \to h \to ph} = \mathbf{h \to ph}$. O usando un diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
& \text{hijo} \arrow[dr, "\alpha"] & \\
\text{hijo} \arrow[ur, "1_h"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & \text{papá e hijo}
\end{tikzcd}
$$

En forma similar, podemos ver que $\mathbf{h \to ph \to ph} = \mathbf{h \to ph}$.

Definición

Vimos en otra lección que la relación $\mathbf{x \to x}$, i.e. **x** es parte de **sí mismo**, es la relación **idéntica**. A la propiedad de que la composición de una relación con la relación idéntica nos da la misma relación, la vamos a llamar la **propiedad de la identidad**. En símbolos,

$$\mathbf{x \to x \to y} = \mathbf{x \to y}$$

y también

$$\mathbf{y \to x \to x} = \mathbf{y \to x}.$$

Usando la notación de nombres de flechas, $\mathbf{1_x} = \mathbf{x \to x}$, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y \to x}$ y recordando que el orden se invierte cuando usamos esta notación, podemos escribir, $\boldsymbol{\alpha} \circ \mathbf{1_x} = \boldsymbol{\alpha}$. Similarmente, escribiendo $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{y \to x}$ tenemos que $\mathbf{1_x} \circ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$.

Ejercicios

1. Variando x, u, en: $\mathbf{x} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \to \mathbf{u}$ determinar el valor de la composición:
   $\mathbf{x} \to \mathbf{x} \to \mathbf{u}$, donde x, u $\in$ { n, p, h, m, ph, c, mh, f,}
2. Variando x, u, en: $\mathbf{x} \to \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \to \mathbf{u}$ determinar el valor de la composición:
   $\mathbf{x} \to \mathbf{u} \to \mathbf{u}$, donde x, u $\in$ { n, p, h, m, ph, c, mh, f,}

Desarrollo - Composición de relaciones y propiedades de la composición

En la escena de inicio vimos que en nuestro ejemplo una de las propiedades fundamentales de la composición, esto es, que el resultado de componer un morfismo con la identidad apropiada es el morfismo dado. En esta escena vamos a construir la **tabla de composición parcial de la categoría**.

Ejercicios

Llenar la tabla de composición de morfismos. Variando x, y, u, z en: x $\to$ y (**x es parte de y**), u $\to$ z (**u parte de z)** determinar:

a. si la flecha es válida. Por ejemplo, p parte de h no es una flecha válida, i.e. "papá es parte de hijo" no es una relación familiar.
b. si la composición es válida, cuál es el resultado de la composición.

Cierre

En esta última escena, resumimos los conceptos hasta ahora encontrados con los cuales ya casi tenemos todos los ingredientes requeridos para formar la noción de categoría.

Dos colecciones:

1. Una colección finita o infinita de objetos
2. Una colección finita o infinita de morfismos (flechas)

Las dos colecciones están relacionadas de la siguiente manera:

a. A cada **morfismo** se le asocia un **objeto** llamado dominio y otro **objeto** llamado codominio. Dado un morfismo α, usamos la notación $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para indicar que el morfismo α tiene **dominio A** y **codominio B**.
b. A cada **objeto** A se le asocia un **morfismo** llamado la identidad con dominio = codominio = A. Con la notación de flechas escribimos: $1_{\mathbf{A}}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$

3. Existe una **operación parcial** entre los morfismos que satisface ciertas propiedades:

a. Si **α** y **β** son dos morfismos con **dominio** de **β = codominio** de **α**, la composición de **α** y **β** está definida y es un morfismo de la categoría. En símbolos, dados $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $\boldsymbol{\beta}: \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, la composición de **α** y **β** es un morfismo de la categoría denotado por $\boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\alpha}$
b. El resultado de componer $1_{\mathbf{A}}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ con $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, i.e. $\boldsymbol{\alpha} \circ 1_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\alpha}$, y el resultado de componer $\boldsymbol{\beta}: \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ con $1_{\mathbf{C}}$: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es $\boldsymbol{\beta}: \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, i.e. $1_{\mathbf{C}} \circ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$.

Solo nos falta una propiedad más que la composición debe satisfacer, la asociatividad, que vamos a estudiar en una lección subsecuente.

Referencias

1. Lawvere, F. W. and Schanuel, S.H. (1991*). Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories.* Buffalo Workshop Press, Buffalo NY.
2. Lawvere, F. W. and Rosebrughl, R. (2003*). Sets for Mathematics: A First Introduction to Categories.* Cambridge University Press, NY.
3. Magnan, F. and Reyes, G. E. (1994). Category Theory as a Conceptual Tool in the Study of Cognition (Ch. 5). In Macnamara, J. and Reyes, G. E. (Eds.). The logical foundations of cognition. Oxford University Press.