8 Geometría Analítica del plano

Contenidos

Objetivos

- Reconocer los elementos de un vector identificando cuando dos vectores son equipolentes.
- Hacer operaciones con vectores libres tanto analítica como gráficamente.
- Calcular el punto medio de un segmento y la distancia entre dos puntos dados.
- Conocer y calcular las distintas formas de la ecuación de una recta.
- Averiguar la posición relativa de dos rectas.
- Calcular rectas paralelas y perpendiculares a una dada.

Autor: Xosé Eixo Branco

Antes de empezar

Investiga

Pulsa en el botón e intenta resolver el problema de la búsqueda del tesoro

En la escena de la derecha puedes ver una explicación sobre "La recta de Euler"
Empieza situando los vértices del triángulo en donde te parezca oportuno.
Pulsa en En la parte inferior de la escena para acceder a las distintas explicaciones:

Contesta:
¿Cómo se llama el punto en el que se cortan las alturas de un triángulo? ________________
¿Cómo se llama el punto en el que se cortan las medianas de un triángulo? ________________
¿Cómo se llama el punto en el que se cortan las mediatrices de un triángulo? ____________
¿A qué recta se le conoce con el nombre de "Recta de Euler"? ________________________
____
¿Cuál es la relación entre las distancias entre los tres puntos anteriores? ______________
____

Pulsa para ir a la página siguiente.

1. Vectores

1.a. Vectores fijos y vectores libres

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y utiliza la escena de la derecha para comprender mejor los conceptos que se explican.
Contesta:
¿Cuántos puntos se necesitan para determinar un vector? _______
¿Qué nombre reciben esos puntos? ___________________________
¿Cuáles son los elementos que caracterizan a un vector?

Elemento	Definición

¿Cómo se calculan las componentes de un vector a partir de las coordenadas de so origen y de su extremo? ____

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AB}(\qquad\qquad , \qquad\qquad)$$

¿Cuándo se dice que dos vectores fijos son equipolentes? ______________________
____
¿A que se denomina vector libre? ______________________________________
____
¿Cuál es el vector de posición de un punto P? ______________________________
¿Cuáles son las coordenadas del vector de posición de un punto $P(x_0,y_0)$? ______________

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

1. Dados los puntos A(1,−2) y B(−4,1), calcula las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$.
2. Calcula el punto extremo de un vector equipolente a $\vec{v}(-7,4)$ y con origen en A(−2,−2).
3. Dados los puntos A(−1,−1) y B(−6,3), calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

Pulsa para ir a la página siguiente.

1.b. Operaciones con vectores

Suma de vectores

¿Cómo se obtienen las componentes del vector suma de dos vectores $\vec{u} = (u_x,u_y)$ y $\vec{v} = (v_x,v_y)$?

____

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}(u_x,u_y)\\ \vec{v}(v_x,v_y)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}+\vec{v} = (\qquad , \qquad)$$

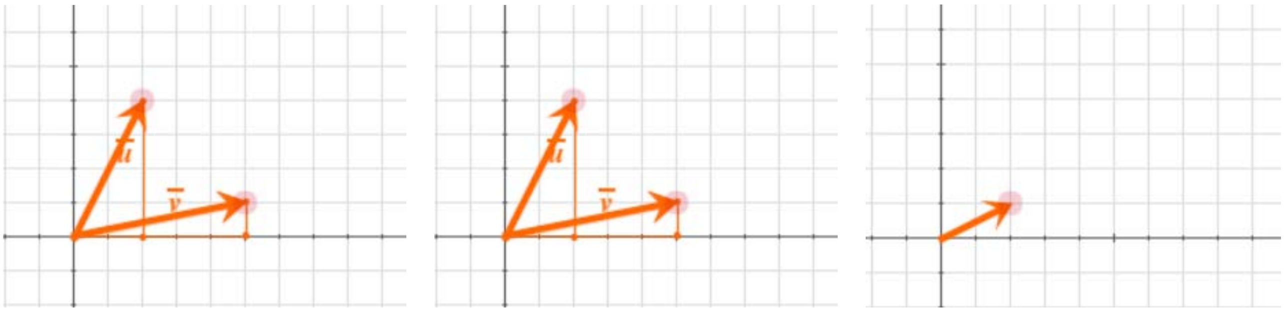
Producto de un vector por un escalar

¿Cómo se multiplica un vector por un escalar?

____

$$\vec{u}(u_x,u_y) \rightarrow t\cdot\vec{u} = (\qquad , \qquad)$$

En la escena puedes ver las dos formas de obtener gráficamente la suma de dos vectores (para pasar de una a otra has de pulsar en la parte inferior izquierda en "de otra forma") y la interpretación geométrica del producto por un escalar.
Completa la suma gráfica, en sus dos formas y el producto (para t = 3)



Pulsando en **propiedades** se abre una ventana con las que tienen estas dos operaciones con vectores. Completa la siguiente tabla con las que faltan:

Propiedades de la suma de vectores

• Propiedad CONMUTATIVA	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
•	
•	
•	
	El elemento opuesto es el que tiene: ______________________________

Propiedades del producto por un escalar

•	Y con las dos operaciones, la PROPIEDAD DISTRIBUTUVA:
•	
•	•

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

4. Dados los vectores $\vec{u}(2,4)$ y $\vec{v}(-3,3)$, efectúa gráficamente la operación: $2\vec{u}+\vec{v}$.

5. Dados los vectores $\vec{u}(-1,2)$ y $\vec{v}(2,-3)$, efectúa gráficamente la operación: $3\vec{u}-2\vec{v}$.

6. Dados los vectores $\vec{u}(1,-2)$, $\vec{v}(-3,1)$ y $\vec{w}(3,5)$, efectúa la operación: $4\vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$.

7. Dados los vectores $\vec{u}(0,-3)$, $\vec{v}(3,-2)$ y $\vec{w}(-4,1)$, efectúa la operación: $3\vec{u}-2\vec{v}-5\vec{w}$.

Pulsa para ir a la página siguiente.

1.c. Combinación lineal de vectores

Lee en pantalla la explicación teórica de este apartado fijándote en los ejemplos que se muestran en la escena para comprender mejor los conceptos que se explican y contesta:

¿Cuándo se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes?

____

Fórmula:

En caso contrario se dice que son: ____________________

¿Cuándo se dice que un vector $\vec{w}$ es combinación lineal de otros dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

____

Fórmula:

¿Cuándo se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base?

____

La base más utilizada es la formada por los vectores: ____________________________

Se denomina: ____________________

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

8. Los vectores $\vec{u}(3,1)$ y $\vec{v}(1,-2)$ tienen distinta dirección. Expresa el vector $\vec{w}(4,-1)$ como combinación lineal de ellos.

9. Los vectores $\vec{u}(1,-3)$ y $\vec{v}(-1,1)$ tienen distinta dirección. Expresa el vector $\vec{w}(-6,12)$ como combinación lineal de ellos.

Pulsa para ir a la página siguiente.

1.d. Punto medio de un segmento

Lee en pantalla la explicación y observa en la escena de la derecha cómo se obtiene la fórmula para calcular el punto medio de un segmento.

Completa:

Las coordenadas del **punto medio** de un segmento son ____

____.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{array}\right\} \rightarrow M = \left(\underline{\qquad\qquad} , \underline{\qquad\qquad} \right)$$

El punto medio divide al segmento en dos partes iguales, de la misma manera se pueden calcular los puntos que dividen al segmento en tres, cuatro o más partes iguales.

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

10. Calcula el punto medio de los segmentos de extremos:

a) A (7,–6) y B(5,2) c) A (3,–5) y B(4,7)

b) A (–5,4) y B(7,8) d) A (–2,0) y B(7,3)

11. Si A (–7,–4) y B(5,8), calcula los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

12. Si A (5,3) y B(–7,–5), calcula los puntos que dividen al segmento AB en cuatro partes iguales.

13. Si A (7,4) y B(–8,–6), calcula los puntos que dividen al segmento AB en cinco partes iguales.

Pulsa para ir a la página siguiente.

1.e. Producto escalar

Lee en pantalla la explicación y observa en la escena ejemplos y propiedades del producto escalar.
Completa la fórmula para calcular el producto escalar de dos vectores en el siguiente recuadro:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{u}(u_x, u_y)\\ \vec{v}(v_x, v_y)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = \qquad\qquad}$$

Si conocemos el módulo de ambos vectores y el ángulo que forman, su producto escalar también se puede obtener mediante la fórmula:

$$\boxed{\vec{u} \circ \vec{v} = \qquad\qquad}$$

Pulsando en "explicación" puedes ver que ambas definiciones son equivalentes.

En la escena puedes ver como se calcula el producto escalar de dos vectores utilizando ambas fórmulas.
Elige tú los vectores que quieras, moviendo los extremos de los dos que aparecen, utilizando el ratón. Copia un ejemplo de cada uno de los métodos a continuación:

1 **Ejemplo de producto de vectores conocidas sus componentes:**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}(\quad,\quad)\\ \vec{v}(\quad,\quad)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} \circ \vec{v} =$$

Propiedades del producto escalar

- $\vec{u} \circ \vec{v}$ ____
- Conmutativa: ______________________
- Homogénea: ________________________
- Distributiva respecto de la suma: __________________________________

2 **Ejemplo de producto de vectores a partir de sus módulos y el ángulo que forman:**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}(\quad,\quad)\\ \vec{v}(\quad,\quad)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}|\vec{u}| =\\ |\vec{v}| =\end{array}\qquad\qquad\qquad\qquad\right\} \rightarrow \vec{u} \circ \vec{v} =$$

➔ Comprueba que con los dos procedimientos el resultado obtenido es el mismo.

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

14. Dados los vectores $\vec{u}(-1,2)$ y $\vec{v}(2,-3)$, calcula $\vec{u} \circ \vec{v}$.

15. Dados los vectores $\vec{u}(3,-2)$ y $\vec{v}(-2,2)$, comprueba que se cumple la propiedad conmutativa.

16. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 60º y sus módulos son $|\vec{u}| = 7$ y $|\vec{v}| = 8$. Calcula su producto escalar.

17. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 30º y sus módulos son $|\vec{u}| = \sqrt{75}$ y $|\vec{v}| = 10$. Calcula su producto escalar

18. Dados los vectores $\vec{u}(4,-4)$, $\vec{v}(-3,4)$ y $\vec{w}(2,-4)$, comprueba que se cumple la propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma.

Pulsa para ir a la página siguiente.

1.f. Aplicaciones del producto escalar

Distancia entre dos puntos

Dados los puntos A(x_1,x_2) y B(y_1, y_2), la distancia entre ellos es ____________________ ____.

$$\left.\begin{matrix} A(x_1,y_1) \\ B(x_2,y_2) \end{matrix}\right\} \rightarrow d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| =$$

Ángulo entre dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, podemos calcular el coseno del ángulo que forman y por tanto el ángulo:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

En la escena puedes ver ejemplos de distancias entre puntos y ángulos entre vectores.

1. **Ejemplo de cálculo de la distancia entre dos puntos:**

   Elige tú los puntos que quieras, moviéndolos con el ratón y copia aquí un ejemplo:

   $$\left.\begin{matrix} A(\quad , \quad) \\ B(\quad , \quad) \end{matrix}\right\} \rightarrow d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| =$$

2. **Ejemplo de cálculo del ángulo formado por dos vectores:**

   Elige tú los vectores que quieras, moviendo los extremos con el ratón y copia un ejemplo:

   $$\left.\begin{matrix} \vec{u}(\quad , \quad) \\ \vec{v}(\quad , \quad) \end{matrix}\right\} \rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Vectores ortogonales

¿Qué son vectores **ortogonales**? ____

Pulsa en "practicar" para ver algún ejemplo de vectores ortogonales.

Lee la explicación que aparece en esa ventana y contesta:

¿Cuál es la condición que han de cumplir dos vectores para ser **ortogonales**?

____

Copia aquí dos ejemplos de los que aparecen en esa escena:

1.- Calcula el valor de m para que los vectores ________________ sean ortogonales	
2.- Calcula un vector ortogonal a _______ y que tenga el mismo módulo.	

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

19. Resuelve el problema planteado en el inicio del tema "la búsqueda del tesoro".

20. Calcula la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a) A (2,−1) y B(3,4) c) A (3,−2) y B(7,−5)

b) A (−3,2) y B(7,−5) d) A (−2,0) y B(7,8)

21. Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{u}(3,-2)$ y $\vec{v}(-2,3)$ c) $\vec{u}(1,-2)$ y $\vec{v}(2,1)$

b) $\vec{u}(5,2)$ y $\vec{v}(-2,3)$ d) $\vec{u}(3,4)$ y $\vec{v}(-3,0)$

22. Calcula "m" para que los siguientes pares de vectores sean ortogonales

a) $\vec{u}(m,-2)$ y $\vec{v}(-2,3)$ c) $\vec{u}(8,-6)$ y $\vec{v}(3,m)$

b) $\vec{u}(m,2)$ y $\vec{v}(4,-6)$ d) $\vec{u}(5,-2)$ y $\vec{v}(m,6)$

23. Calcula un vector ortogonal a cada uno de los siguientes y que tenga el mismo módulo.

a) $\vec{u}(m,-2)$ y $\vec{v}(-2,3)$ c) $\vec{u}(8,-6)$ y $\vec{v}(3,m)$

b) $\vec{u}(m,2)$ y $\vec{v}(4,-6)$ d) $\vec{u}(5,-2)$ y $\vec{v}(m,6)$

Pulsa para ir a la página siguiente.

2. Rectas

2.a. Ecuaciones de una recta

Lee en pantalla la explicación y observa en la escena ejemplos de las distintas formas de las ecuaciones de una recta.

Contesta y completa:

¿Qué se necesita para determinar la ecuación de una recta?

¿Cuál es la fórmula por la que se obtiene el vector de posición de un punto cualquiera de una recta?

Ecuaciones de una recta que pasa por un punto **$P(x_1,y_1)$** y de vector director: **$\vec{v}\,(v_x,v_y)$**

• Ecuación vectorial	
• Ecuaciones paramétricas	
• Ecuación continua	
• Ecuación general	
• Ecuación explícita	

En la escena de la derecha puedes escoger tú el punto y el vector que quieras y con ellos ver las distintas ecuaciones de la recta, así como el procedimiento para pasar de unas formas a otras. Copia un ejemplo aquí, escribiendo en cada caso la operación que se realiza para hacer el paso correspondiente:

Ecuaciones de una recta que pasa por un punto **P(,   )** y de vector director: **$\vec{v}$ (,   )**

• Ecuación vectorial	
• Ecuaciones paramétricas	
• Ecuación continua	
• Ecuación general	
• Ecuación explícita	

Pulsa en el botón para hacer un ejercicio. Repítelo varias veces.

EJERCICIOS

24. Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por P(−1,2) y de vector director $\vec{v}$ (2,−3).

25. Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por P(0,−2) y de vector director $\vec{v}$ (3,-1).

26. Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por P(1,−3) y de vector director $\vec{v}$ (2,0).

Pulsa para ir a la página siguiente.

2.b. Otras ecuaciones de la recta

Lee en pantalla la explicación y observa en la escena ejemplos de estas dos nuevas formas de ecuaciones de una recta.
Contesta y completa:

¿Cuál es el valor de la pendiente de una recta?

¿Con qué ángulo se relaciona la pendiente?

¿Cómo se denomina al punto de corte de la recta con el eje OY?

Ecuaciones de una recta que pasa por un punto **P(x_1,y_1)** y de pendiente "**m**":

- Ecuación punto-pendiente

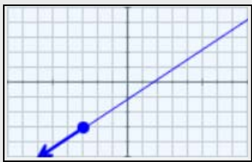
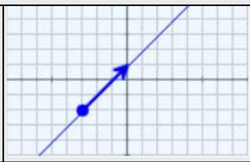
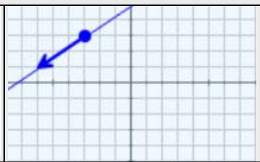
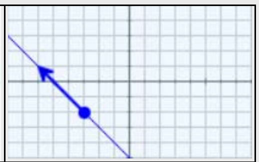
Si se conocen dos puntos de la recta:____

- Ecuación por dos puntos

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

27. Asocia cada recta con su ecuación

				
$\begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$	$(x,y) = (-3,3) + t(-3,-2)$	$\dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y+2}{3}$	$3x - 3y + 3 = 0$	$y = x - 5$

28. Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por P(2,−1) y de vector director $\vec{v}$ (0,1).

29. Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por P(−1,−4) y de vector director $\vec{v}$ (−2,3).

30. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(−5,2) y Q(3,2). Escribe también su ecuación en forma explícita.

31. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(2,1) y Q(−3,1). Escribe también su ecuación en forma explícita.

32. Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos P(−5,−4) y Q(−9,−1).

33. Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos P(3,−1) y Q(−2,5).

34. Dada la ecuación de la recta en forma continua: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2}$, escribe las demás formas de expresar esta ecuación (Vectorial, Paramétricas, General, Punto-pendiente y Explícita)

35. Dada la ecuación de la recta en forma paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = -3 + t \\ y = -2t \end{array}\right\}$, escribe las demás formas de expresar esta ecuación (Vectorial, Continua, General, Punto-pendiente y Explícita)

36. Dada la ecuación de la recta en forma general: $2x + 5y - 7 = 0$, escribe las demás formas de expresar esta ecuación (Vectorial, Paramétricas, General, Punto-pendiente y Explícita)

Pulsa para ir a la página siguiente.

2.c. Posiciones relativas de dos rectas

Lee en pantalla la explicación sobre las distintas posiciones relativas que pueden tener dos rectas en el plano y observa en la escena ejemplos de cada una de esas posiciones, fijándote bien en la relación entre los coeficientes de las rectas en cada caso.

Contesta y completa:

¿Cuándo dos rectas son **secantes**?

¿Cuándo dos rectas son **paralelas**?

¿Cuándo dos rectas son **coincidentes**?

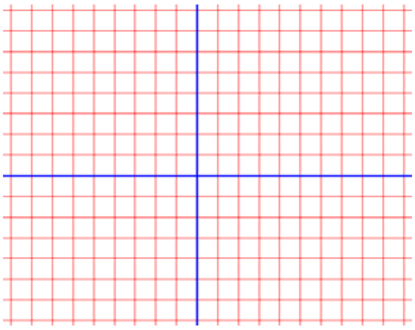
Atendiendo a los coeficientes de las respectivas ecuaciones generales, en cada caso se cumple:

Secantes	Paralelas	Coincidentes
—— ≠ ——	—— = —— ≠ ——	—— = —— = ——

En la escena repite varias veces pulsando el "Otras rectas" y en cada caso elige la posición relativa correcta en la que aparecen las rectas mostradas.

Dibuja un ejemplo de cada tipo en los siguientes sistemas de coordenadas.

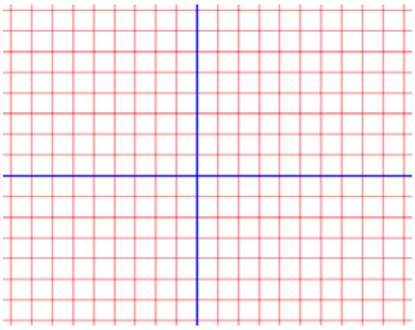
Secantes



Recta 1:
Recta 2:
Relación entre coeficientes:

—— ≠ ——

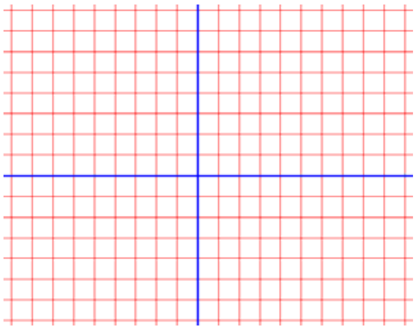
Paralelas



Recta 1:
Recta 2:
Relación entre coeficientes:

—— = —— ≠ ——

Coincidentes



Recta 1:
Recta 2:
Relación entre coeficientes:

—— = —— = ——

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

37. Una recta tiene como vector director $\vec{v}(2,3)$ y pasa por el punto P(–1,2); otra recta tiene de pendiente $m = \frac{3}{2}$ y pasa por el punto Q(1,–2). ¿Cómo son estas rectas?

38. Una recta tiene como vector director $\vec{v}(2,1)$ y pasa por el punto P(3,2); otra recta tiene de pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y pasa por el punto Q(1,0). ¿Cómo son estas rectas?

Pulsa para ir a la página siguiente.

2.d. Rectas paralelas y perpendiculares

Lee en pantalla la explicación sobre los procedimientos a seguir para obtener una paralela o una perpendicular a una recta dada.
Contesta y completa:

¿Cuándo son **paralelas** dos rectas?	
Para escribir la ecuación de una recta **paralela** a otra por un punto P…	
¿Cuándo son **perpendiculares** dos rectas?	
Para escribir la ecuación de una recta **perpendicular** a otra por un punto P…	

En la escena puedes ver ejemplos de calculo de paralelas y perpendiculares.

1 **Ejemplo de cálculo de una paralela**

Ecuación en forma continua:	Punto por el que pasa:	Recta paralela en forma continua:
Ecuación en forma general:	Punto por el que pasa:	Recta paralela en forma general:
Ecuación en forma explícita:	Punto por el que pasa:	Recta paralela en forma explícita:

2 **Ejemplo de cálculo de una perpendicular**

Ecuación en forma continua:	Punto por el que pasa:	Recta perpendicular en forma continua:
Ecuación en forma general:	Punto por el que pasa:	Recta perpendicular en forma general:
Ecuación en forma explícita:	Punto por el que pasa:	Recta perpendicular en forma explícita:

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

39. Calcula el valor de "a" para que las rectas r y s sean paralelas, en cada uno de los siguientes apartados:

a) r) $\frac{x+5}{-3}=\frac{y+4}{2}$; s) $\frac{x+8}{9}=\frac{y+8}{a}$

b) r) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y+4}{4}$; s) $\frac{x+5}{a}=\frac{y-1}{-6}$

c) r) $-2x + 4y + 12 = 0$; s) $x + ay + 4 = 0$

d) r) $4x + 6y - 18 = 0$; s) $ax - 9y + 8 = 0$

40. Calcula el valor de "a" para que las rectas r y s sean perpendiculares, en cada uno de los siguientes apartados:

a) r) $\frac{x-5}{3}=\frac{y+3}{2}$; s) $\frac{x-8}{a}=\frac{y+5}{-9}$

b) r) $\frac{x+4}{3}=\frac{y-4}{-4}$; s) $\frac{x+7}{12}=\frac{y-2}{a}$

c) r) $2x + 3y - 18 = 0$; s) $ax + 2y - 12 = 0$

d) r) $3x + 3y - 25 = 0$; s) $ax + 9y + 50 = 0$

41. Dada la recta de ecuación $\frac{x+5}{-3}=\frac{y+4}{2}$, calcula una paralela que pase por el punto P(1,–2)

42. Dada la recta de ecuación $\frac{x+5}{-3}=\frac{y+4}{2}$, calcula una perpendicular que pase por el punto P(1,–2)

43. Dada la recta de ecuación $2x + 3y - 8 = 0$, calcula una paralela que pase por el punto P(3,2)

44. Dada la recta de ecuación $2x + 3y - 8 = 0$, calcula una perpendicular que pase por el punto P(3,2)

45. Dada la recta de ecuación $y = 3x - 2$, calcula una paralela que pase por el punto P(0,1)

46. Dada la recta de ecuación $y = 3x - 2$, calcula una perpendicular que pase por el punto P(0,1)

47. Dada la recta de ecuación $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$, calcula una paralela que pase por el punto P(2,1)

48. Dada la recta de ecuación $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$, calcula una perpendicular que pase por el punto P(2,1)

Pulsa para ir a la página siguiente.

3. Circunferencias

3.a. Ecuación de una circunferencia

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y observa en la escena de la derecha cómo se obtiene la ecuación de una circunferencia (puedes cambiar el centro de posición con el ratón, y variar el radio con el pulsador que se encuentra en la esquina superior derecha).

Contesta y completa:

¿Cuál es la definición de circunferencia?

La definición de circunferencia nos lleva a la ecuación:

Desarrollando esta expresión, obtenemos:

Que podemos escribir: ____

Donde **A =** ______, **B =** ______ y **C =** _________________

Así podemos calcular las coordenadas del centro o el valor del radio a partir de la ecuación.

Ejemplos

Ecuación de la circunferencia de centro C(−2,3) y radio 5:	**A** = − 2 · (−2) = **+4** **B** = − 2 · 3 = **− 6** **C** = $(-2)^2 + 3^2 - 5^2$ = **−12**	**$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$**
Centro y radio de la circunferencia: **$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$**	**A** = − 2 · a = −2 → **a = 1** **B** = − 2 · b = **4** → **b = −2** **C** = $1^2 + (-2)^2 - r^2$ = **−4** → **r = 3**	**Centro: C (1,−2)** **Radio: r = 3**

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

EJERCICIOS

49. Halla la ecuación de la circunferencia de centro C(3,4) y radio 4

50. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto C(−1,−1) y que pasa por el punto (2,3)

51. Calcula el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

b) $x^2 + y^2\ 4y - 21 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 26 = 0$

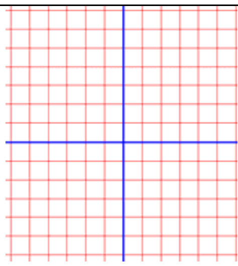
d) $x^2 + y^2 + 6y = 0$

Pulsa para ir a la página siguiente.

Recuerda lo más importante – RESUMEN

Vector Fijo
Origen: Extremo:
Componentes: $\overrightarrow{AB}$

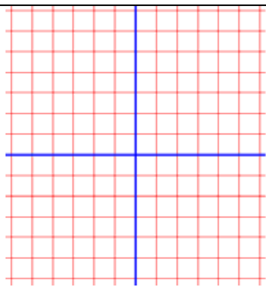
Vector libre
____
____.



Caracterizan a un vector:
-
-
-

Operaciones con vectores
$\vec{u}$(,) ; $\vec{v}$(,)

- **Suma**
- **Producto por un escalar**

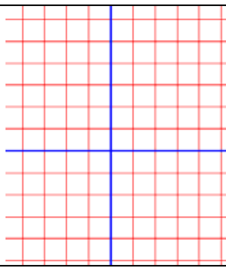


Producto escalar
Dos formas de calcularlo:
-
-

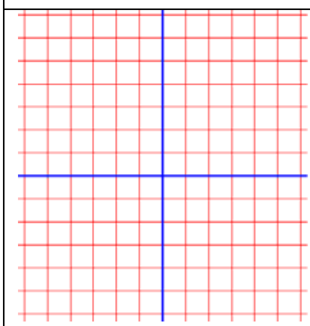
Punto medio dun segmento

A (,) ; B(,)

M:



- **Módulo dun vector**
- **Distancia entre dos puntos**
- **Ángulo entre dos vectores**

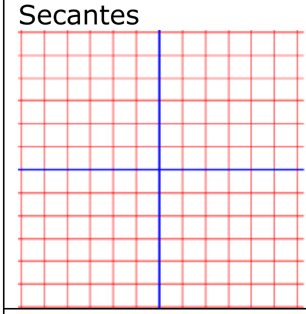


Ecuaciones de la recta

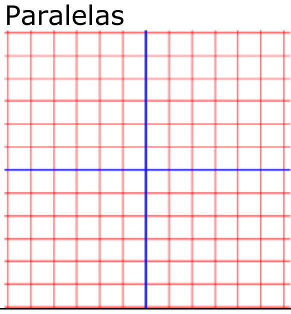
- Vectorial:
- Paramétricas
- Continua
- General
- Punto- Pendiente
- Explícita

Posiciones relativas de dos rectas $Ax + By + C = 0$; $A'x + B'y + C' = 0$

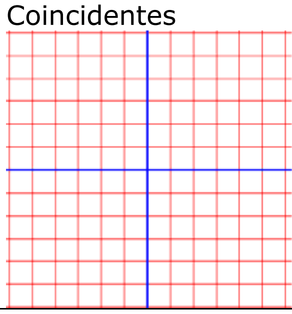
Secantes



Paralelas



Coincidentes



Ecuación de la circunferencia
Centro: C(a,b)
Radio: r

Pulsa para ir a la página siguiente.

Para practicar

Ahora vas a practicar resolviendo distintos EJERCICIOS. En las siguientes páginas encontrarás EJERCICIOS de:

Vectores
Rectas

Completa el enunciado con los datos con los que te aparece cada EJERCICIO en la pantalla y después resuélvelo. Es importante que primero lo resuelvas tú y después compruebes en el ordenador si lo has hecho bien.

Vectores

Vectores equipolentes

1. Dados los puntos A(,), B(,), C(,) y D(,); calcula los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{DC}$. ¿Cuáles son equipolentes?:

Operaciones con vectores (Dos tipos de ejercicios)

2. Dados los vectores $\vec{u}$(,), $\vec{v}$(,) y $\vec{w}$(,), efectúa la operación:.

3. Los puntos A(,), B(,) y C(,) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el cuarto vértice, D, aplicando la suma de vectores.

Punto medio y distancias (Cuatro tipos de ejercicios)

4. Calcula el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo de vértices A(,), B(,), C(,) y D(,). Calcula también la medida de las diagonales.

5. Comprueba que el triángulo de vértices A(,), B(,) y C(,) y el de vértices los puntos medios de sus lados, son semejantes.

6. Los puntos A(,), B(, 2), C(,) y D(,) son los vértices de un trapezoide. Comprueba que los puntos medios de sus lados forman un paralelogramo.

7. Calcula el simétrico del punto A(, 1) respecto del P(,). Comprueba también que la distancia de A a P es la mitad de la distancia de A a su simétrico.

Combinaciones lineales (Dos tipos de ejercicios)

8. Calcula las componentes del vector $\vec{w} =$, sabiendo que $\vec{u} =$ y $\vec{v} =$

9. Expresa el vector $\vec{w} =$ como combinación lineal de $\vec{u} =$ y $\vec{v} =$

Producto escalar (Dos tipos de ejercicios)

10. Dados los vectores $\vec{u}$(,) y $\vec{v}$(,), calcula su producto escalar, sus módulos y el ángulo que forman.

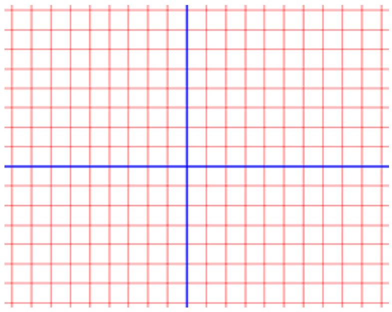
11. Comprueba mediante vectores y con el teorema de Pitágoras que el triángulo de vértices A(,), B(,) y C(,) es rectángulo.

Rectas

Una recta (Cuatro tipos de ejercicios)

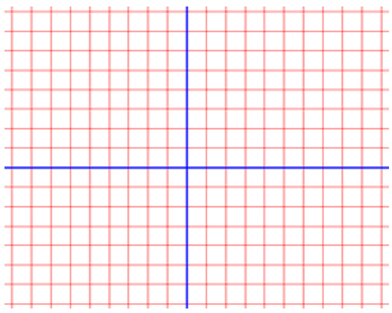
12. Dada la recta r, indica qué tipo de ecuación es, represéntala y calcula:

- Un punto de la misma
- Un vector direccional
- La pendiente



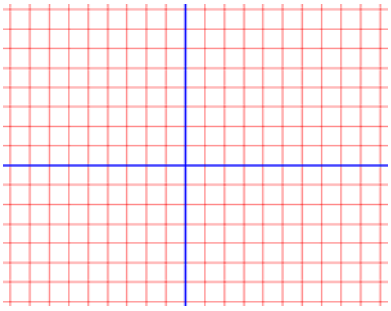
13. Dada la recta r, indica qué tipo de ecuación es, represéntala y calcula:

- Un punto de la misma
- Un vector direccional
- La pendiente



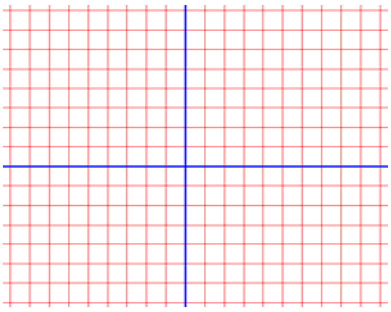
14. Dada la recta r, indica qué tipo de ecuación es, represéntala y calcula:

- Un punto de la misma
- Un vector direccional
- La pendiente



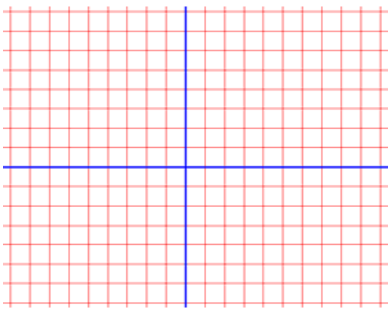
15. Dada la recta r, indica qué tipo de ecuación es, represéntala y calcula:

- Un punto de la misma
- Un vector direccional
- La pendiente

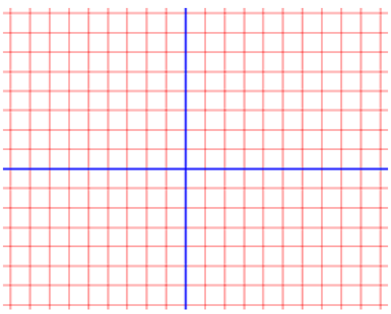


Halla la ecuación (Cuatro tipos de ejercicios)

16. Halla la ecuación explícita de la recta de la gráfica

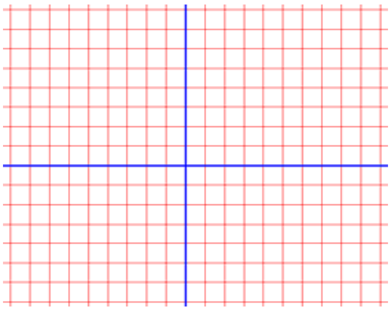


17. Halla la ecuación general de la recta que pasa por los puntos P(,) y Q(, ,)



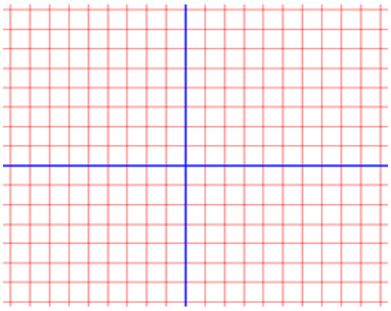
18. La recta r pasa por el punto P(,) y tiene como vector director $\vec{v}$(,). Halla su ecuación en forma:

a) Vectorial b) Continua c) General



19. La recta r pasa por el punto P(,) y tiene pendiente ___. Halla su ecuación en forma:

a) Punto-pendiente b) Explícita c) General



Dos rectas (Tres tipos de ejercicios)

20. Halla la ecuación de la recta paralela a r por el punto P

r) P(,)

21. Halla la posición relativa de las rectas r y s

r) s)

22. Halla la ecuación de la recta perpendicular a r por el punto P

r) P(,)

En un triángulo (Cuatro tipos de ejercicios)

23. Comprueba que las rectas r_1, r_2 y r_3 forman un triángulo y calcula sus vértices

r_1) r_2) r_3)

24. Dado el triángulo de vértices A(,), B(,) y C(,), calcula:

➔ Las ecuaciones de las mediatrices de cada lado y las coordenadas del circuncentro

25. Dado el triángulo de vértices A(,), B(,) y C(,), calcula:

➔ Las ecuaciones de las medianas y las coordenadas del baricentro

26. Dado el triángulo de vértices A(,), B(,) y C(,), calcula:

➔ Las ecuaciones de las alturas y las coordenadas del ortocentro

Autoevaluación

Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

1	Dados los puntos A(,) y B(,). Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$	
2	Un vector equipolente al $\vec{v}$(,) tiene su ______ en el punto ___(,). Calcula su ____________.	
3	Dados los vectores $\vec{u}$(,) y $\vec{v}$(,) Calcula _____________ .	
4	Dados los vectores $\vec{u}$(,) y $\vec{v}$(,) Calcula su producto escalar.	
5	Dados los puntos A(,) y B(,). Calcula la distancia del origen de coordenadas al punto medio del segmento AB.	
6	Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(,) y tiene como vector director $\vec{v}$(,)	
7	¿Cuál es la posición relativa de las dos rectas siguientes? r: ____________ s: _____________	
8	Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(,) y es paralela a la recta ________________.	
9	Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(,) y es perpendicular a la recta ___________.	
10	Halla la ecuación de la circunferencia de centro C(,) y que pasa por el punto P(,).	