

## Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Calcular as razóns trigonométricas dun ángulo.
- Calcular todas as razóns trigonométricas dun ángulo a partir dunha delas.
- Resolver triángulos rectángulos cando se coñecen dous lados ou un lado e un ángulo.
- Resolver situacións relacionadas coa xeometría nas que se precise calcular ángulos e distancias entre dous puntos.
- Utilizar a calculadora para obter razóns ou ángulos.

Antes de empezar.

1. Os ángulos e a súa medida ..... páx. 4  
 Percorridos na circunferencia  
 Radiáns  
 Graos sexagesimais  
 De radiáns a graos  
 Medindo ángulos
2. Razóns trigonométricas ..... páx. 6  
 Razóns trigonométricas  
 Sen e cos na circunferencia  
 Tanxente na circunferencia  
 Razóns de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$
3. Relacións trigonométricas ..... páx. 8  
 Relacións fundamentais
4. Resolver triángulos rectángulos ..... páx. 9  
 Cun ángulo e a hipotenusa  
 Dados un ángulo e un cateto  
 Coñecidos dous lados
5. Razóns de ángulos calquera ..... páx. 10  
 Seno  
 Coseno  
 Tanxente
6. Aplicacións da trigonometría ..... páx. 11  
 Resolver problemas métricos

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumo

Auto-avaliación

Actividades para enviarlle ao titor



## Antes de empezar

<p>A trigonometría nace coa observación dos fenómenos astronómicos.</p> 	 <p>No conxunto megalítico de Stonehenge (Gran Bretaña), construído entre 2200 e 1600 a.C., o aliñamento de dúas grandes pedras indica o día máis longo do ano.</p>	 <p>O primeiro antecedente escrito da trigonometría encontrámolo no problema 56 do papiro de Rhind. Escrito por Ahmés arredor do 1800 a.C. transcribindo outro do 500 a.C.</p>
<p>Na antiga Babilonia introduciuse a medida do ángulo en graos.</p> <p>A división da circunferencia en <math>360^\circ</math>, probablemente vai unida á do ano en 360 días.</p> <p>Así, como o sol percorre unha circunferencia nun ano, un grao sería o percorrido nun día.</p> 	<p>Coa cultura grega a trigonometría experimentou un novo e definitivo impulso.</p> <p>Aristarco de Samos (s. III a.C.) achou a distancia ao sol e á lúa utilizando triángulos.</p> <p>Hiparco de Nicea (s. II a.C.) é considerado como o "inventor" da trigonometría.</p> <p>Ptolomeo, no século II, escribiu o "Almagesto" que influíu ao longo de toda a Idade Media.</p> 	<p>O desenvolvemento da trigonometría débelle moito á obra dos árabes, quen transmitiron a Occidente o legado grego.</p> <p>Foron os primeiros en utilizar a tanxente.</p> <p>Cara ao ano 833, Al-Kwuarizmi construíu a primeira táboa de senos.</p> 
<p>En Europa publicase en 1533, o primeiro tratado de trigonometría: "De trianguli omnia modi, libri V". Escrito en 1464 en Königsberg, por Johann Müller, coñecido como o Regiomontano.</p> 	<p>Newton utiliza en 1671 as coordenadas polares.</p> <p>A física dos fenómenos ondulatorios, como o producido por unha corda que vibra, levou a Euler (1707-1783) ao estudo das funcións trigonométricas.</p> 	<p>Hoxe, nos nosos días, as utilidades da trigonometría abarcan os máis diversos campos: da topografía á acústica, a óptica e a electrónica.</p> 



### Investiga

Seguramente verías este sinal nas estradas e coñeces o que indica: pendente prolongada.

Tamén lembrarás o concepto de pendente dunha recta. Segundo este o 10% significa que cada 100 m percorridos en horizontal, subimos (ou baixamos) 10 en vertical. Pero algúns interpretan os 100 m como o camiño real percorrido. Ti que opinas?, inflúe moito consideralo dunha ou outra forma?

### Lembra

Antes de seguir adiante convenche comprobar que lembrás a semellanza de triángulos e o Teorema de Pitágoras.

# Trigonometría

## 1. Os ángulos e a súa medida

**Trigonometría** é unha palabra que deriva do grego Τριγωνομετρία, Tri (Τρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρία) medida, é dicir, "medida de tres ángulos". Podes consultar a definición de trigonometría que dá o dicionario da R.A.E.

Neste curso tratarase unicamente a trigonometría plana.

Con obxecto de estudar os ángulos e a súa medida consideraremos que un ángulo é un percorrido na circunferencia con centro a orixe e de raio unidade ou circunferencia goniométrica, o punto de partida destes percorridos sitúase no punto de coordenadas (1,0) e a medida dun ángulo será a medida dese percorrido.

Os ángulos poden ter sentido positivo ou negativo segundo sexa o do seu percorrido; se é contrario ao das agullas do reloxo será positivo e se é igual, negativo.

### Radiáns

Medir un ángulo é medir o seu percorrido na circunferencia.

Como a medida de toda a circunferencia é  $2 \cdot \pi \cdot \text{raio}$ , resulta conveniente tomar como unidade de medida o raio.

Nas figuras, os ángulos represéntanse nunha circunferencia de raio 1, isto non significa que o raio mida 1 cm ou 1 pé ou 1 m, senón que o raio é a unidade de medida tomada. Por razóns evidentes esta unidade chámase **radián**.

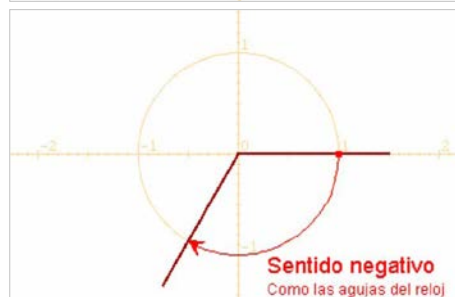
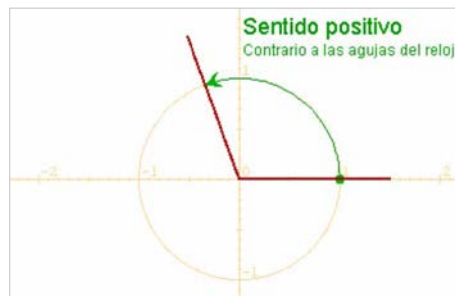
### Grados sexagesimais

Xa coñeces o sistema sexagesimal de medida de ángulos.

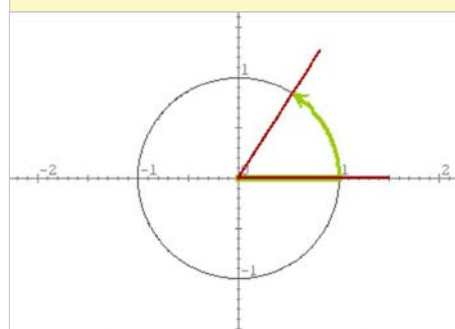
Ao dividir a circunferencia en 360 partes iguais, obtemos un grao, á súa vez cada grao componse de 60 minutos e cada minuto de 60 segundos.

Así un ángulo mídese en:

**graos° minutos' segundos"**



O ángulo de **1 radián** é aquel cuxo percorrido na circunferencia é igual ao raio.



$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

De graos a radiáns:

✓ multiplicamos por  $\frac{\pi}{180}$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

De radiáns a grados:

✓ multiplicamos por  $\frac{180}{\pi}$

## De graos a radiáns e de radiáns a graos

O semiperímetro da semicircunferencia é  $\pi \cdot$  raio

$$\pi \text{ radiáns} = 180 \text{ graos}$$

é dicir,  $\pi$  veces un radián = 180 veces un grao

$$\pi \cdot 1 \text{ radián} = 180 \cdot 1 \text{ grao}$$

Se despexamos o grao resulta:

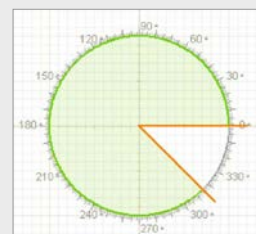
$$1 \text{ grao} = \pi/180 \text{ radiáns} \sim 0.0175 \text{ radiáns}$$

Se despexamos o radián resulta:

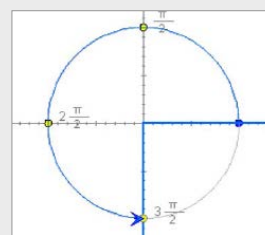
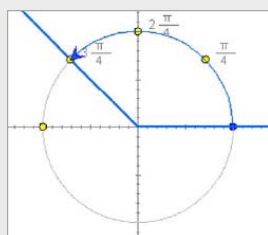
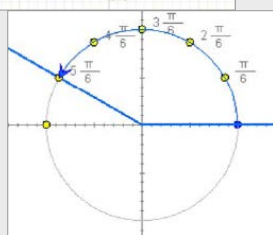
$$1 \text{ radián} = 180/\pi \text{ graos} \sim 57.2957 \text{ graos}$$

## EXERCICIOS resoltos

1. Debuxa na circunferencia goniométrica os ángulos de  $120^\circ$ ,  $-50^\circ$  e  $315^\circ$ .



2. Debuxa na circunferencia goniométrica o ángulo de  $5\pi/6$ ,  $3\pi/4$ , e  $3\pi/2$  rad.



3. Pasa a radiáns: a)  $150^\circ$ , b)  $210^\circ$ , c)  $270^\circ$ , d)  $60^\circ$

$$a) 150^\circ = \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$b) 210^\circ = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$c) 270^\circ = \frac{270 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

$$d) 60^\circ = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

4. Pasa a graos: a)  $11\pi/6$  rad, b)  $\pi/4$  rad, c)  $5\pi/4$  rad, d)  $2\pi/3$  rad

$$a) \frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 330^\circ$$

$$b) \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$$

$$c) \frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225^\circ$$

$$d) \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120^\circ$$



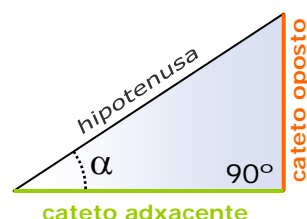
## 2. Razóns trigonométricas

Nos triángulos semellantes os ángulos son iguais e os lados homólogos son proporcionais. A razón entre os lados dun triángulo determina a súa forma.

Dado un triángulo rectángulo, as razóns trigonométricas do ángulo agudo  $\alpha$  defínense:

- ✓ O **seno** é o cociente entre o cateto oposto e a hipotenusa.
- ✓ O **coseno** é o cociente entre o cateto adxacente e a hipotenusa.
- ✓ A **tanxente** é o cociente entre o cateto oposto e o cateto adxacente.

Estas razóns non dependen do tamaño do triángulo senón do ángulo.



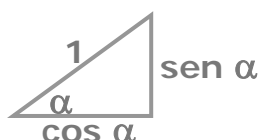
$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{cos } \alpha &= \frac{\text{cateto adxacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{tg } \alpha &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adxacente}} \end{aligned}$$

### Senos e cosenos na circunferencia

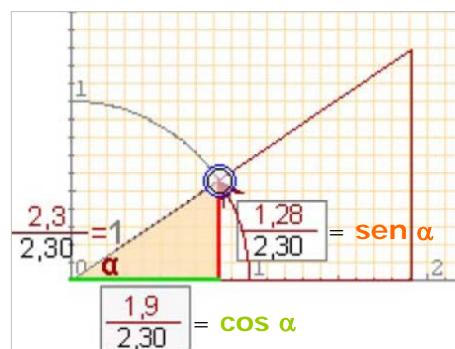
Na figura representouse o ángulo  $\alpha$  na circunferencia goniométrica ou de raio unidade.

No triángulo rectángulo que se forma como a hipotenusa é 1, o cateto oposto é o **sen  $\alpha$**  e o adxacente o **cos  $\alpha$** .

É importante lembrar o seguinte triángulo:



Observa que **(cos  $\alpha$ , sen  $\alpha$ )** son as **coordenadas** do punto final do ángulo  $\alpha$  na circunferencia de raio unidade.



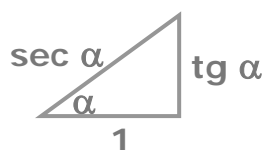
### Tanxente na circunferencia

Na figura compréndese por que o cociente entre o cateto oposto e o cateto adxacente se chama tanxente, o seu valor queda definido sobre a recta tanxente á circunferencia no punto  $(1,0)$ .

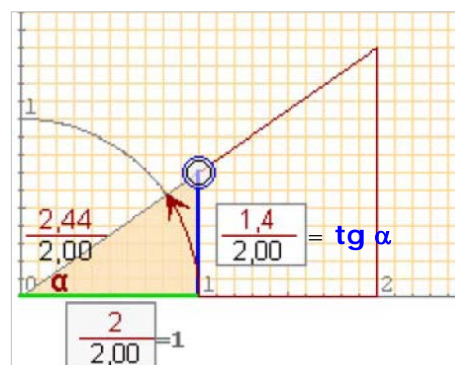
Observa que cando o cateto adxacente vale 1, a hipotenusa é igual á inversa do cos  $\alpha$ .

O cociente:

$$\frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adxacente}}$$



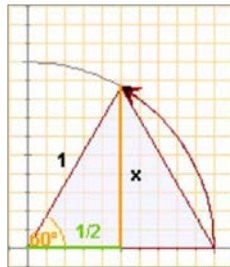
chámase secante de  $\alpha$  e abréviase con sec  $\alpha$ .



Nun triángulo equilátero os ángulos miden **60°**

Co Teorema de Pitágoras calcúlase a altura

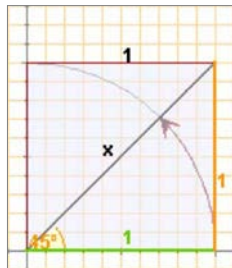
$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Tomamos un cadrado de lado **1**

Co Teorema de Pitágoras calcúlase a diagonal

$$\text{diag} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



## Razóns de 30°, 45° e 60°

Os ángulos de 30°, 45° e 60° aparecen con bastante frecuencia, fíxate como se calculan as súas razóns a partir da definición se buscamos os triángulos adecuados.

	sen	cos	tg
<b>30°</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
<b>45°</b>	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
<b>60°</b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Memorizar esta táboa é fácil se observas a orde que gardan. Unha vez aprendidos os senos coas raíces consecutivas, os cosenos saen en orde inversa.



## Coa calculadora

- Dado un ángulo  $\alpha$  obter as súas razóns trigonométricas.

Por exemplo o  $\text{sen } 28^\circ 30'$

Pon a calculadora en modo **DEG**

Teclea 28  ° ' " 30  ° ' " **sin**

Obtemos:  0,477158760

Nalgunas calculadoras hai que premer a tecla **sin** antes de introducir o ángulo, comproba como funciona a túa.

Se queremos obter o  $\text{cos } \alpha$  ou a  $\text{tg } \alpha$  procederemos da mesma forma pero pulsando as teclas **cos** e **tan** respectivamente.

- Dada unha razón obter o ángulo  $\alpha$  correspondente.

Co mesmo valor que tes na pantalla:  0,477158760

Comproba que a calculadora segue en modo **DEG**

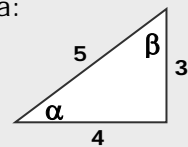
Teclea **SHIFT sin**

Obtemos:  28,5 en graos, se queremos graos, minutos e segundos, pulsamos **SHIFT**  ° ' " obtendo  28° 30''

## EXERCICIOS resoltos

5. No triángulo da figura calcula:

- a)  $\text{sen } \alpha$       d)  $\text{sen } \beta$   
 b)  $\text{cos } \alpha$       e)  $\text{cos } \beta$   
 c)  $\text{tg } \alpha$       f)  $\text{tg } \beta$



a)  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$       d)  $\text{sen } \beta = \frac{4}{5} = 0,8$

b)  $\text{cos } \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$       e)  $\text{cos } \beta = \frac{3}{5} = 0,6$

c)  $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$       f)  $\text{tg } \beta = \frac{4}{3} = 1,3$

6. Obtén coa calculadora:

- a)  $\text{sen } 30^\circ = 0,5$   
 b)  $\text{cos } 60^\circ = 0,5$   
 c)  $\text{tg } 45^\circ = 1$

7. Obtén coa calculadora os ángulos  $\alpha$  e  $\beta$  do exercicio 5.

$\alpha$ : Tecleamos 0  . 6 **SHIFT sin**  → 36,87°

$\beta$ : Tecleamos 0  . 8 **SHIFT sin**  → 53,13°

Observa que en efecto suman 90°.

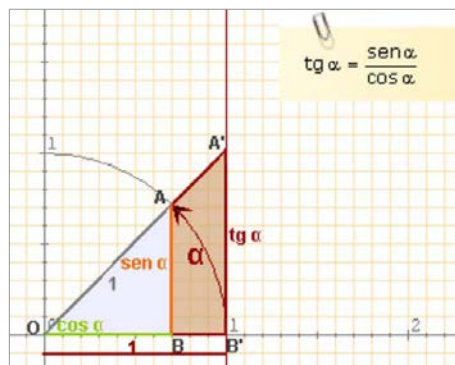
# Trigonometría

## 3. Relacións fundamentais

Ao aplicar a semellanza e o teorema de Pitágoras aos triángulos rectángulos "básicos", é dicir, con hipotenusa=1 ou con cateto adxacente=1, obtéñense as relacións fundamentais da trigonometría:

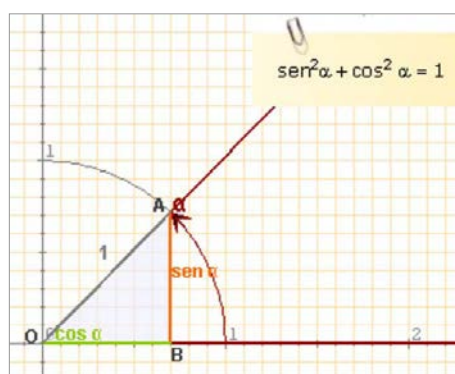
Os triángulos OBA e OB'A' son semellantes:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{tg } \alpha}{1} \quad \text{lo } \text{g} \quad \boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}}$$



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triángulo OBA da figura obtemos:

$$\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1}$$

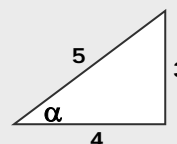


### EXERCICIOS resoltos

8. Comproba no ángulo  $\alpha$  do triángulo da figura que se cumpren as relacións fundamentais.

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \text{tg } \alpha$$



9. Calcula o coseno e a tanxente dun ángulo agudo  $\alpha$  tal que  $\text{sen } \alpha = 0,3$

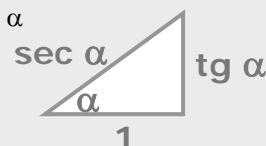
$$\text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - 0,3^2 = 1 - 0,09 = 0,81 \Rightarrow \text{cos } \alpha = \sqrt{0,81} = 0,9$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$$

10. Comproba que se cumpre a relación:  $1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{sec}^2 \alpha$$

Lembra o triángulo:

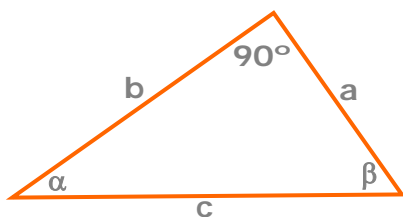




## 4. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo é calcular os datos descoñecidos, lados ou ángulos, a partir dos coñecidos.

Vexamos os casos que se poden presentar.



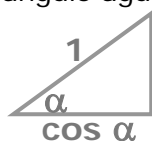
Calcular a altura do monte.



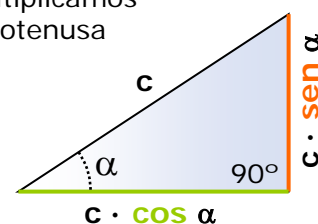
$$x = 650 \cdot \text{sen } 30^\circ = 650 \cdot 0,5 = 325$$

### a) Coñecidos un ángulo e a hipotenusa

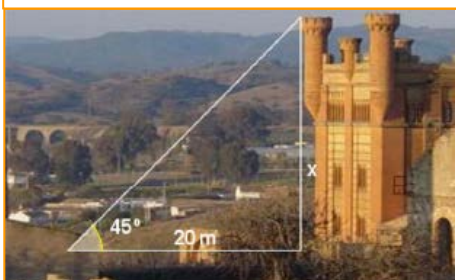
Para calcular os catetos dun triángulo rectángulo do que se coñecen as medidas da **hipotenusa** e dun ángulo agudo, pensaremos no triángulo:



que multiplicamos pola hipotenusa



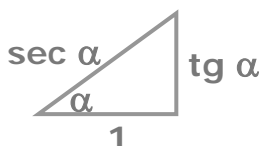
Calcular a altura da torre.



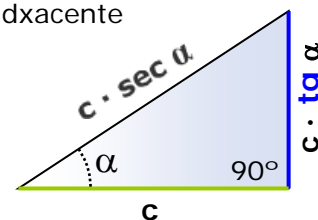
$$x = 20 \cdot \text{tg } 45^\circ = 20 \cdot 1 = 20\text{m}$$

### b) Coñecidos un ángulo e un cateto

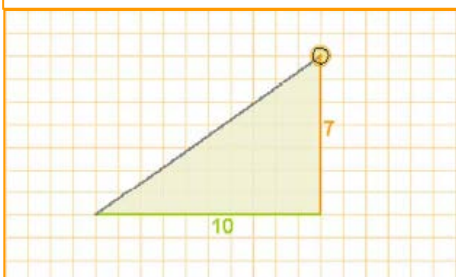
Para calcular os lados dun triángulo rectángulo do que se coñecen as medidas un **cateto** e dun ángulo non recto, pensaremos no triángulo:



que multiplicamos polo cateto adxacente



Resolver o triángulo.



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$$

Coa calculadora:  $\text{atan}(0,7) = 35^\circ$   
E o outro ángulo:  $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

### c) Coñecidos dous lados

Para calcular o outro lado do triángulo aplicarase o teorema de Pitágoras, o ángulo determinarase como

o arco cuxa tanxente é  $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adxacente}}$

ou ben como o arco cuxo seno é  $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

dependendo dos datos iniciais.

Para calcular o outro ángulo abonda con restar de  $90^\circ$ .

## 5. Razóns de calquera ángulo

Lembra que (**cos  $\alpha$** , **sen  $\alpha$** ) eran as **coordenadas** do punto final do ángulo  $\alpha$  na circunferencia de raio unidade. Isto que vimos para os ángulos agudos podemos facelo extensible a ángulos calquera.

### O seno

O seno dun ángulo é a coordenada **vertical** do punto final do percorrido do ángulo sobre a circunferencia goniométrica.

Observa que o valor está comprendido entre -1 e 1.

### O coseno

Do mesmo xeito que o seno dun ángulo é a ordenada, o coseno é a **abscisa** do punto final do percorrido que marca o ángulo na circunferencia.

O seu valor tamén está comprendido entre -1 e 1.

### A tanxente

Coa relación fundamental **tg  $\alpha = \text{sen} \alpha / \text{cos} \alpha$**  amplíase a definición de tanxente en ángulos agudos a un ángulo calquera.

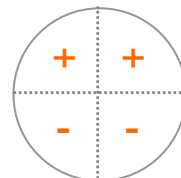
A tanxente represéntase na recta tanxente á circunferencia goniométrica no punto (1,0).

Para os ángulos de  $90^\circ$  e  $270^\circ$ , o coseno é 0 polo que non está definida a tanxente; canto máis se achega un ángulo a  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ , máis grande se fai en valor absoluto a tanxente, diremos que é infinito.

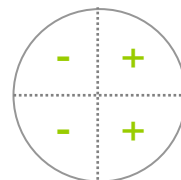


A circunferencia goniométrica é unha circunferencia de raio unidade e centro a orixe de coordenadas.

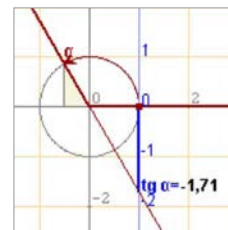
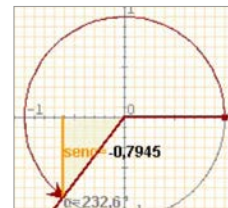
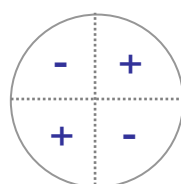
SIGNO DO SENO



SIGNO DO COSENO



SIGNO DA TANXENTE



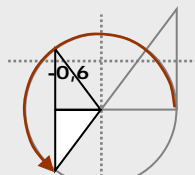
### EXERCICIOS resoltos

11. Debuxa un ángulo do terceiro cuadrante cuxo cos sexa -0,6 e calcula o seno e a tanxente.

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64$$

$\text{sen} \alpha = \pm \sqrt{0,64} = \pm 0,8$  Como está no terceiro cuadrante será -0,8

$$\text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{4}{3}$$



12. Calcula  $\text{cos} \alpha$  sendo  $\text{tg} \alpha = -2$  e  $\alpha$  do cuarto cuadrante.

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$\text{cos} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$  e eliximos o positivo xa que  $\alpha$  está no 4º cuadrante.

### Observa

#### Ángulos suplementarios

$$\begin{aligned} \text{sen}(180^\circ - \alpha) &= \text{sen} \alpha \\ \text{cos}(180^\circ - \alpha) &= -\text{cos} \alpha \\ \text{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\text{tg} \alpha \end{aligned}$$

#### Ángulos que suman $360^\circ$

$$\begin{aligned} \text{sen}(360^\circ - \alpha) &= -\text{sen} \alpha \\ \text{cos}(360^\circ - \alpha) &= \text{cos} \alpha \\ \text{tg}(360^\circ - \alpha) &= -\text{tg} \alpha \end{aligned}$$

## 6. Resolver problemas métricos



A trigonometría é útil para resolver problemas xeométricos e calcular lonxitudes na realidade.

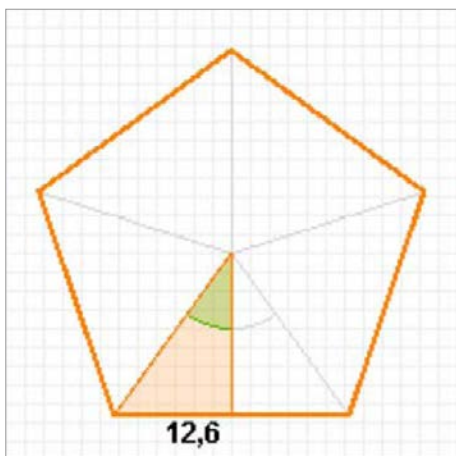
Cun teodolito como o da fotografía, pódense medir ángulos, tanto no plano vertical como no horizontal, que nos permiten, aplicando as razóns trigonométricas, calcular distancias ou calcular alturas de puntos inaccesibles.

Nestes casos aínda que o triángulo de partida non sexa rectángulo, trazando a súa altura podemos obter dous triángulos rectángulos que resolveremos cos datos que temos.

Vexamos algúns exemplos.

### Calcular áreas de polígonos regulares

Calcular a área dun pentágono regular de 25,2 cm de lado.



- ✓ A área dun polígono regular:  $\text{perímetro} \cdot \text{apotema} / 2$

Como se trata dun pentágono o ángulo central mide:

$$360^\circ / 5 = 72^\circ$$

- ✓ Fixámonos no triángulo rectángulo da figura no que un cateto é o apotema e outro a metade do lado. Neste triángulo:

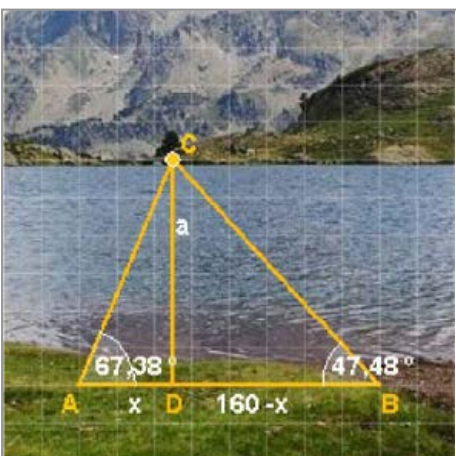
$$\text{tg}36^\circ = \frac{12,6}{a} \Rightarrow a = \frac{12,6}{\text{tg}36^\circ} = \frac{12,6}{0,72} = 17,34$$

Logo a área do pentágono é:

$$\text{Área} = \frac{25,2 \cdot 17,34}{2} = 1092,57 \text{ cm}^2$$

### Calcular medidas topográficas

Para medir a anchura dun río médironse os ángulos da figura desde dous puntos dunha beira distantes 160 m. Que anchura ten o río?



- ✓ A anchura do río é a altura do triángulo ACB que non é rectángulo, pero si o son os triángulos ADC e BDC.

$$\text{No triángulo ADC: } \text{tg}67,38^\circ = \frac{a}{x} \Rightarrow a = x \cdot \text{tg}67,38^\circ$$

$$\text{No BDC: } \text{tg}47,48^\circ = \frac{a}{160 - x} \Rightarrow a = (160 - x)\text{tg}47,48^\circ$$

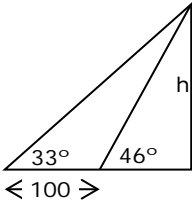
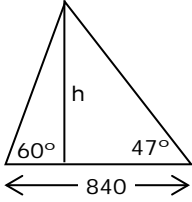
- ✓ Temos un sistema de dúas ecuacións que resolvemos por igualación:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2,40x \\ a = 1,09(160 - x) \end{array} \right\} \Rightarrow 2,40x = 1,09(160 - x) \Rightarrow 3,49x = 174,40$$

$$x = \frac{174,40}{3,49} = 50 \Rightarrow a = 2,40 \cdot 50 = 120 \text{ m}$$



## Para practicar

- Expresa en radiáns:
  - $15^\circ$
  - $120^\circ$
  - $240^\circ$
  - $345^\circ$
- Expresa en graos:
  - $\frac{\pi}{15}$
  - $\frac{3\pi}{10}$
  - $\frac{7\pi}{12}$
  - $\frac{11\pi}{6}$
- Acha coa calculadora as seguintes razóns redondeando a centésimas:
  - $\sin 25^\circ$
  - $\cos 67^\circ$
  - $\operatorname{tg} 225^\circ$
  - $\operatorname{tg} 150^\circ$
- Un ángulo dun triángulo rectángulo mide  $47^\circ$  e o cateto oposto 8 cm, calcula a hipotenusa.
- A hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 26 cm e un ángulo  $66^\circ$ . Calcula os catetos.
- Un ángulo dun triángulo rectángulo mide  $44^\circ$  e o cateto adxacente 16 cm, calcula o outro cateto.
- Nun triángulo rectángulo os catetos miden 15 e 8 cm, calcula os ángulos agudos.
- A hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 45 cm e un cateto 27 cm, calcula os ángulos agudos.
- Nun triángulo isósceles os ángulos iguais miden  $78^\circ$  e a altura 28 cm, calcula o lado desigual.
- Os lados iguais dun triángulo isósceles miden 41 cm e os ángulos iguais  $72^\circ$ , calcula o outro lado.
- O cos dun ángulo do primeiro cuadrante é  $3/4$ , calcula o seno do ángulo.
- A tanxente dun ángulo do primeiro cuadrante é  $12/5$  calcula o seno.
- O  $\sin \alpha = 3/5$  e  $\alpha$  é un ángulo do segundo cuadrante, calcula a  $\operatorname{tg} \alpha$ .
- O  $\cos \alpha = 3/5$  e  $\alpha$  é un ángulo do cuarto cuadrante, calcula a  $\operatorname{tg} \alpha$ .
- A  $\operatorname{tg} \alpha = 3$  e  $\alpha$  é un ángulo do terceiro cuadrante, calcula o  $\cos \alpha$ .
- O apotema dun polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula o lado.
- O lado dun hexágono regular mide 30 cm, calcula o apotema.
- O apotema dun octógono regular mide 8 cm, calcula a área do polígono.
- A lonxitude do raio dun pentágono regular é 15 cm. Calcula a área.
- A sombra dunha árbore cando os raios do sol forman coa horizontal un ángulo de  $36^\circ$ , mide 11m. Cal é a altura da árbore?
- O fio dunha cometa mide 50 m de longo e forma coa horizontal un ángulo de  $37^\circ$ , a que altura voa a cometa?
- Para medir a altura dun edificio mídense os ángulos de elevación desde dous puntos distantes 100 m, cal é a altura se os ángulos son  $33^\circ$  e  $46^\circ$ ?
 
- Dúas persoas distantes entre si 840 m, ven simultaneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de  $60^\circ$  e  $47^\circ$ , a que altura voa o avión?
 
- Para medir a altura dunha montaña mídense os ángulos de elevación desde dous puntos distantes 480 m e situados a 1200 m sobre o nivel do mar. Cal é a altura se os ángulos son  $45^\circ$  e  $76^\circ$ ?

## Para saber máis



### Que inclinación da estrada indica este sinal?

Se investigaches un pouco verías que uns din que ese 10% é a pendente matemática e outros defínela como pendente de tráfico. Sexa unha ou outra, a diferenza non é grande, o ángulo indicado será no primeiro caso  $\text{atan}(10/100)=5.71^\circ$  e  $\text{asen}(10/100)=5.74^\circ$  no segundo, e os problemas do noso coche para abordar esa pendente serán similares en ambos os casos.

A diferenza entre a pendente matemática ou a de tráfico será máis significativa se un sinal lle indica a un alpinista que a inclinación da montaña que vai subir é do 75%.

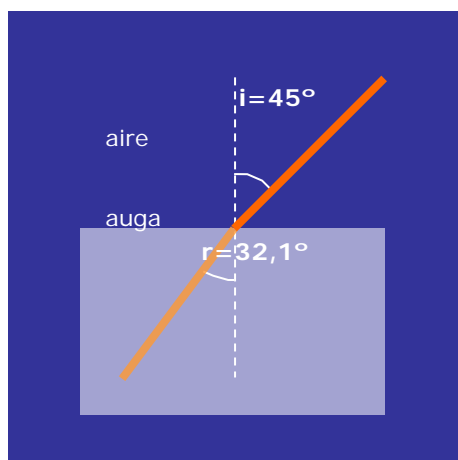
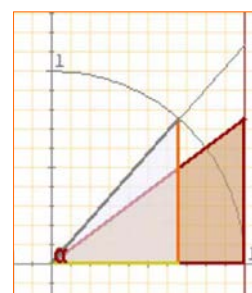
- ✓ A pendente matemática do 75% corresponde ao ángulo:

$$\text{atan}(75/100)=36.86^\circ$$

- ✓ A pendente de tráfico do 75% corresponde ao ángulo:

$$\text{asen}(75/100)=48.59^\circ$$

Na figura, a hipotenusa do triángulo marrón mostra a pendente ao interpretar o % como tanxente e no triángulo azul, interprétase o % como seno.



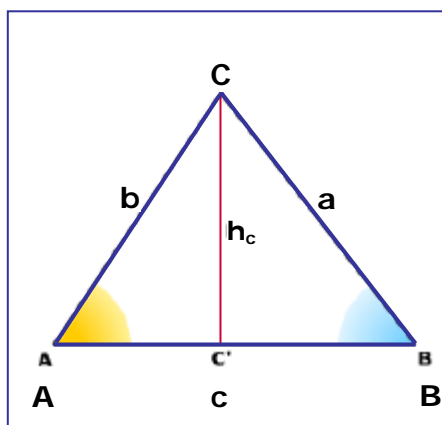
### A refracción da luz

É o fenómeno que se produce cando a luz pasa dun medio material a outro no que a velocidade de propagación é distinta. De aí que unha vara introducida en auga a vexamos "quebrada".

A relación entre o ángulo de incidencia "i" e o de refracción "r", vén dada pola seguinte relación, coñecida como Lei de Snell.

$$n_1 \cdot \text{sen } i = n_2 \cdot \text{sen } r$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  son, respectivamente, os índices de refracción do medio 1 e do medio 2, á súa vez o cociente entre a velocidade da luz no medio e a velocidade da luz no baleiro.



### Teorema do seno

Neste tema puidiches resolver triángulos que non eran rectángulos considerando a altura.

O resultado coñecido como Teorema do seno, permítenos resolver triángulos calquera se coñecemos un lado e dous ángulos.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

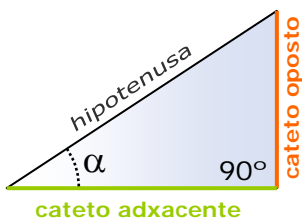




## Lembra o máis importante

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \quad \text{grao} \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{radiáns}$$

$$\text{radiáns} \xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}} \text{graos} \quad 1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$



- ✓ O **seno** é o cociente entre o cateto oposto e a hipotenusa.
- ✓ O **coseno** é o cociente entre o cateto adxacente e a hipotenusa.
- ✓ A **tanxente** é o cociente entre o cateto oposto e o cateto adxacente.

$$\text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} \quad \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

## Os ángulos e a súa medida

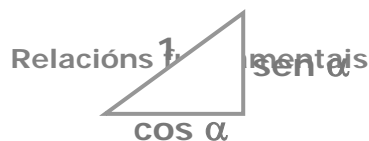
Para medir ángulos empregamos graos ou radiáns.

Un **radián** é o ángulo cuxo percorrido é igual ao raio con que se trazou.

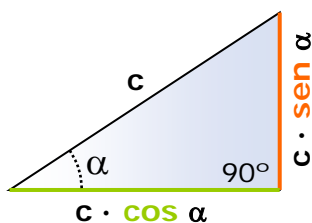
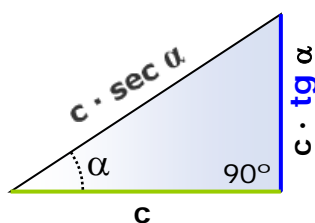
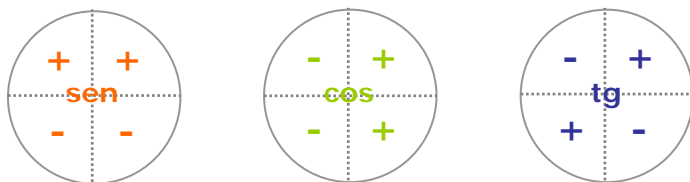
$$\text{sen} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adxacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adxacente}}$$

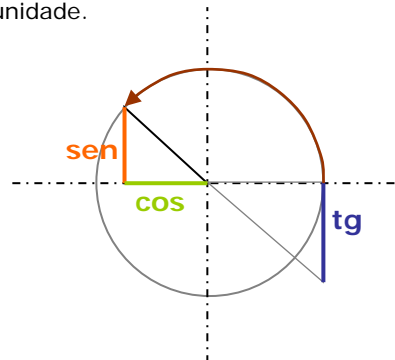


## SIGNO DAS RAZÓNS



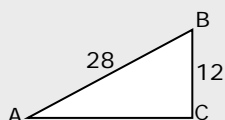
## Razóns de ángulos calquera

$(\text{cos} \alpha, \text{sen} \alpha)$  son as **coordenadas** do punto final do ángulo  $\alpha$  na circunferencia goniométrica ou de raio unidade.

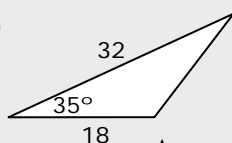


**Resolver** un triángulo rectángulo consiste en calcular as medidas dos seus seis elementos: tres lados e dous ángulos (o terceiro é 90°), coñecidos un lado e un ángulo ou dous lados.

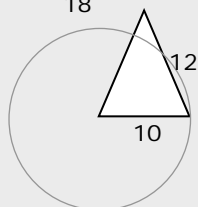
## Autoavaliación



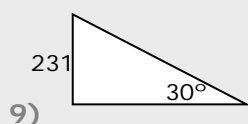
2)



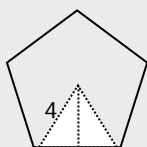
3)



4)



10)



1. Expressa en radiáns o ángulo de  $150^\circ$ .
2. Calcula o valor de  $\text{tg } A$  no triángulo ABC da figura.
3. Calcula a área do triángulo da figura.
4. Cun compás de 12 cm de lonxitude trazamos unha circunferencia de 10 cm de raio, que ángulo, en radiáns, forman as ramas do compás?
5. Se  $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ , e  $\alpha$  é un ángulo agudo, calcula a  $\text{tg } \alpha$ .
6. Se  $\text{tg } \alpha = 1.25$  e  $\alpha$  está no terceiro cuadrante, calcula o  $\text{cos } \alpha$ .
7. A partir das razóns do ángulo de  $30^\circ$ , calcula a  $\text{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ .
8. Se  $\text{cos } \alpha = \frac{3}{5}$ , e  $\alpha$  é un ángulo agudo, calcula o  $\text{cos}(180^\circ - \alpha)$ .
9. A altura de Torre España é de 231 m, canto mide a súa sombra cando a inclinación dos raios do sol é de  $30^\circ$ ?
10. Calcula a área dun pentágono regular de raio 4 cm.

## Soluciones dos ejercicios para practicar

- a)  $\frac{\pi}{12}$  b)  $\frac{2\pi}{3}$  c)  $\frac{4\pi}{3}$  d)  $\frac{23\pi}{12}$
- a)  $12^\circ$  b)  $54^\circ$  c)  $105^\circ$  d)  $330^\circ$
- a) 0,42 b) 0,39 c) 1 d) -0,58
- 10,93 cm
- 23,75 cm, 10,57 cm
- 15,45 cm
- $28^\circ 4' 20''$      $61^\circ 55' 40''$
- $36^\circ 52' 11''$      $53^\circ 7' 49''$
- 11,9 cm
- 25,33 cm
- $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- $\text{sen } \alpha = 12/13$
- $\text{tg } \alpha = -3/4$
- $\text{tg } \alpha = -4/3$
- $\text{cos } \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$
- 10,91 cm
- 25,98 cm
- lado=6,63 cm    área=212,08 cm<sup>2</sup>
- lado=17,63 cm    apot=12,14 cm  
área=534,97 cm<sup>2</sup>
- 7,99 m
- 30 m
- 57,41 m
- 638,11 m
- $639,42 + 1200 = 1839,42$  m

## Soluciones AUTO-AVALIACIÓN

- $\frac{5\pi}{6}$
- 0,47
- 165,19 u<sup>2</sup>
- 0,85 rad (truncamento)
- $\text{tg } \alpha = 4/3$
- $\text{cos } \alpha = -0,62$
- $\text{tg } \frac{-5\pi}{6} = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha = -3/5$
- 400,10 m
- 38,04 m<sup>2</sup>