2

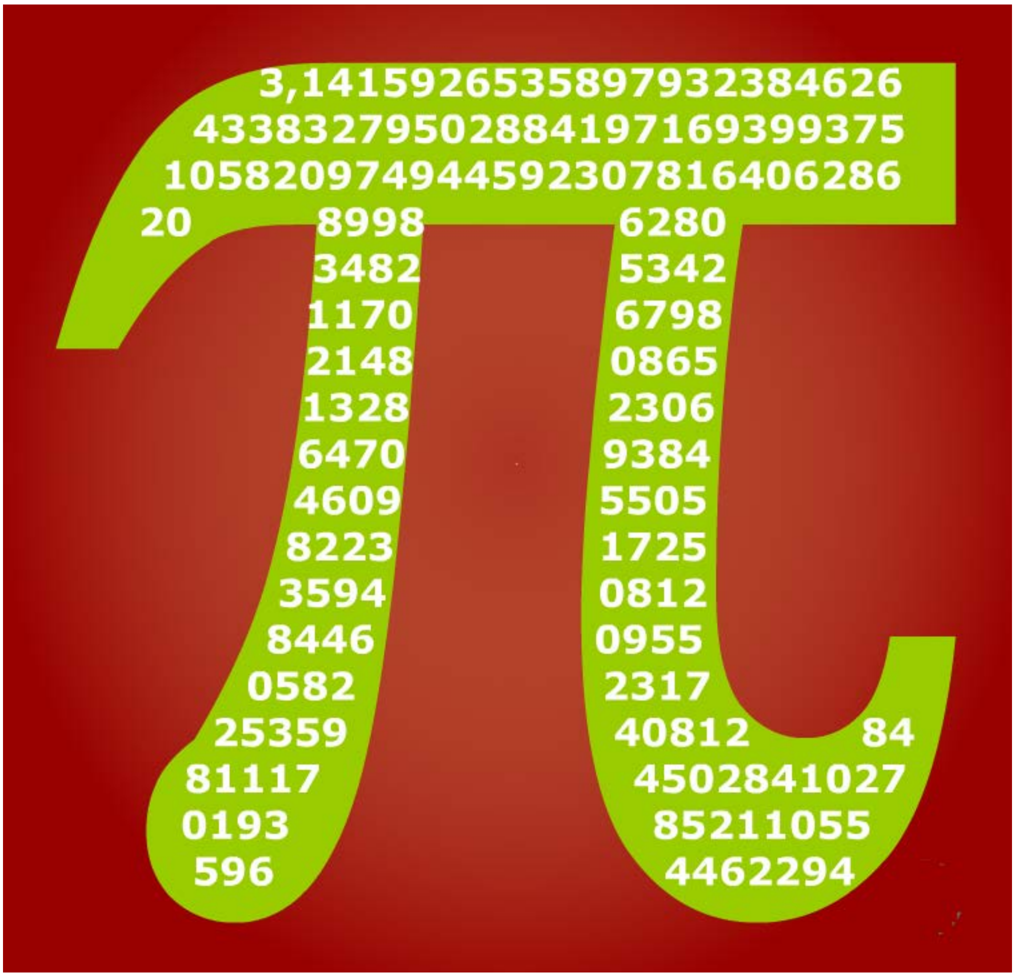
Números reais

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Clasificar os números reais en racionais e irracionais.
- Aproximar números reais por truncamento e redondeo.
- Representar graficamente números reais.
- Comparar números reais.
- Realizar operacións sinxelas con radicais.

Antes de empezar



Investiga

Seguramente realizaches algunha vez algún cálculo co número pi; por exemplo, calcular a lonxitude dalgunha circunferencia ou a área dun círculo. Nestes cálculos terás utilizado valores como 3'14, 3'1416, 3'141592,... Tamén é posible que leras nalgún xornal que se descubriu outra cifra do número pi ou que xa se coñecen con exactitude tantas cifras do número pi. Todo o anterior resulta un pouco confuso. Cal das cantidades anteriores é o auténtico número pi? Como é posible que chamemos pi a todas elas se é obvio que son diferentes? Como é posible que se estean a descubrir aínda cifras de pi se o estamos a usar dende hai un montón de anos?

Intenta dar unha resposta a estas preguntas. Se non o consegues agora, volve intentalo despois de ver este tema en profundidade. Para finalizares a proposta, aí vai outra pregunta: Cal é ou cal podería ser a última cifra do número pi?

1. Os números reais

Números irracionais

Na quincena anterior tes visto que os números racionais poden escribirse en forma decimal, producindo sempre un decimal exacto ou periódico. Tamén temos visto que todo decimal periódico pode escribirse en forma de fracción.

É doado comprobar que hai números cuxa expresión decimal non é periódica, por exemplo:

0,1234567891011121314.....

Estes números non se poden escribir en forma de fracción: ***non son racionais***.

Chamamos **irracionais** aos números cuxa parte decimal non é periódica.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS IRRACIONAIS

O feito de que os números irracionais teñan infinitas cifras decimais que non se repiten de forma periódica formula o problema de cómo representar os devanditos números de forma exacta.

Algúns destes números poden representarse de forma exacta. Por exemplo:

$$\sqrt{2}\ ,\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\quad \sqrt[3]{5}$$

son representacións exactas dos números 1,41421356...; 1,61803398...; 1,709975947... respectivamente (os puntos suspensivos indican que non hai un final).

En cambio, outros números irracionais non poden expresarse en forma exacta. Por exemplo, o cociente entre a lonxitude dunha circunferencia e o seu diámetro é unha cantidade constante que é irracional, pero non pode ser descrito nunha forma sinxela como os números anteriores.

Para representar estes números de forma exacta, poñémoslle un nome. Neste caso trátase do número pi: π. Para facer cálculos con estes números, usamos un valor aproximado.

O número $\sqrt{2}$ é irracional *(ampliación)*

Como pode saberse se un número é irracional? Non hai unha técnica xeral, pero nalgúns casos pode usarse unha técnica de demostración denominada ***redución ao absurdo*** que consiste en supoñer que o que se quere probar é falso e chegar, a partir desa suposición, a unha contradición. Iso implica que o feito inicial non pode ser falso.

O que queremos probar é que $\sqrt{2}$ non é un número racional. *Para iso empezaremos supoñendo que si o é.*

Polo tanto, pode escribirse en forma de fracción que podemos converter en irredutible simplificando todo o que se poida. Así pois, existirían dous números enteiros, **m** e **n**, sen factores primos comúns de forma que

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m}=\frac{p1\cdot p2\cdot \ldots \cdot pr}{q1\cdot q2\cdot \ldots \cdot qs}$$

Sendo p1, p2,...,pr os factores primos de n e q1, q2,...,qr os factores primos de m e todas as p son distintas de todas as q. Elevando ao cadrado queda:

$$2=\frac{n^2}{m^2}=\frac{p1^2\cdot p2^2\cdot \ldots \cdot pr^2}{q1^2\cdot q2^2\cdot \ldots \cdot qs^2}$$

E n^2 e m^2 seguen sen ter factores primos comúns. Polo tanto, $n^2=2m^2$, de onde se deduce que n é divisible por 2 e, polo tanto, pode escribirse como n=2t. Así pois:

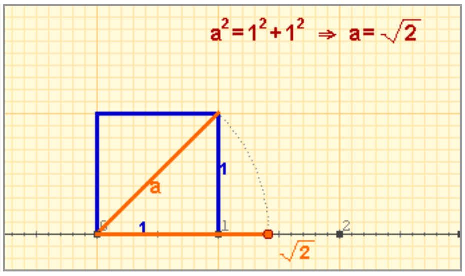
$$\sqrt{2}=\frac{2t}{m}$$

E t e m non teñen factores primos comúns. Elevando de novo ao cadrado queda:

$$2=\frac{4t^2}{m^2}\Rightarrow 2m^2=4t^2\Rightarrow m^2=2t^2$$

Polo tanto, m tamén é divisible por 2. Partindo de que n e m non teñen factores primos comúns chegamos á conclusión de que ambos son múltiplos de 2. Chegamos a unha **contradición**. Daquela, a suposición de que este número é racional é falsa e **deducimos diso que $\sqrt{2}$ é irracional**.

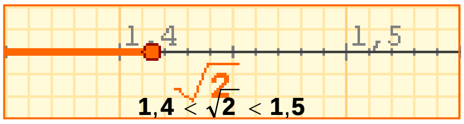
Números reais



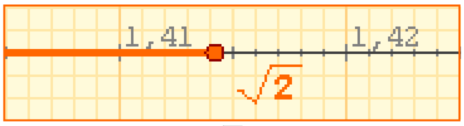
IR O conxunto dos números reais, denotado pola letra R coa forma que ves á esquerda, está formado por todos os números racionais e todos os números irracionais. É dicir, todos os números que poidan escribirse en forma decimal, sexa esta exacta, periódica ou non periódica.

Isto engloba a todos os tipos de números que coñecemos ata o momento.

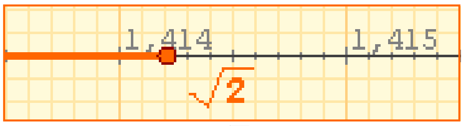
- $\mathbb{R}$ Reais
  - $\mathbb{Q}$ Racionais
    - $\mathbb{Z}$ Enteiros
      - $\mathbb{N}$ Naturais
      - Cero
      - Enteiros negativos
    - Fraccionarios
  - Irracionais



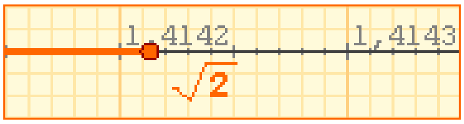
$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$



$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$



$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$



$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$

Aproximacións

Como comprobaches, os números reais teñen infinitas cifras decimais, polo que, en xeral, non é posible dar o seu valor exacto. Nalgúns casos, como os racionais (coa fracción xeratriz) e os radicais, si é posible representalos de forma exacta. Pero en infinidade doutros casos (como o número π), isto non é posible.

Cando nun problema necesitamos usar un número con infinitas cifras decimais, usamos na práctica un valor aproximado que nos permita obter un resultado aceptable aínda que non sexa exacto.

Unha aproximación é **por defecto** se é menor que o número exacto e **por exceso** se é maior.

- ✓ Cando nun decimal nos quedamos coas n primeiras cifras decimais, dicimos que realizamos un **truncamento** con n cifras significativas.
- ✓ Realizamos un **redondeo** con n cifras significativas, se truncamos con n cifras, deixando igual a cifra n-ésima se a seguinte é menor que 5, e aumentando a última cifra nunha unidade en caso contrario.

Observa os exemplos da esquerda onde se toman distintas aproximacións de $\sqrt{2}$.

TRUNCAMENTO	REDONDEO
1,4	1,4
1,41	1,41
1,414	1,414
1,4142	1,4142
1,41421	1,41421
1,414213	1,414214
1,4142135	1,4142136
1,41421356	1,41421356

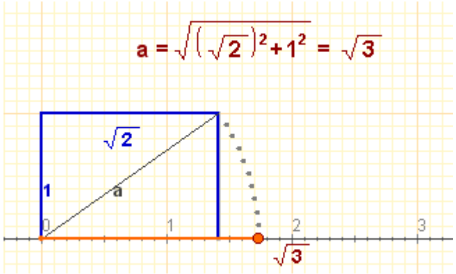
Un truncamento sempre é unha aproximación por defecto; o redondeo pode ser por defecto ou por exceso.

Representación gráfica de números irracionais

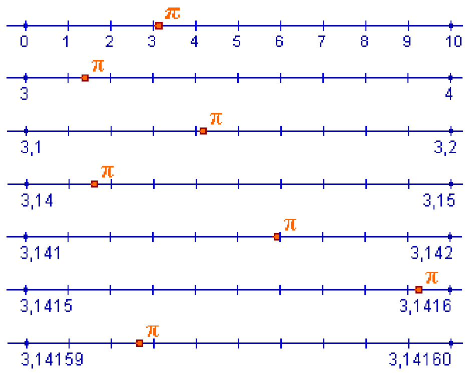
Neste tema vimos xa as dificultades de representar de forma exacta os números irracionais, dificultades que se trasladan á súa representación gráfica.

Á dereita podes ver distintas técnicas usadas para a representación en forma gráfica de números irracionais. Nalgún caso poden usarse métodos xeométricos de gran exactitude, pero na maioría dos casos só podemos realizar unha representación aproximada; iso si, co nivel de precisión que queiramos.

Estes métodos garanten que pode asociarse de xeito único un punto da recta a cada número real e, reciprocamente, un número real a cada punto da recta. Por este motivo, adoita identificarse ao conxunto **R** dos números reais cunha recta, á que se denomina **recta real**.



π = 3,141592353589793...

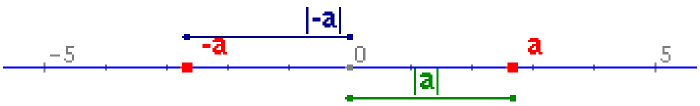


Desta forma podemos acoutar π entre dous números racionais, que xa sabemos representar, e que están cada vez máis próximos.

Valor absoluto

A equivalencia entre puntos e números permite aplicar conceptos xeométricos ao cálculo, en particular a idea de distancia mediante o valor absoluto dun número.

- ✓ Chamamos valor absoluto dun número real, **a**, ao maior dos números **a** e **-a**. O valor absoluto de **a** represéntase así: **|a|**.



a=2,6828 **|a|=2,6828**

-a=-2,6828 **|-a|=2,6828**

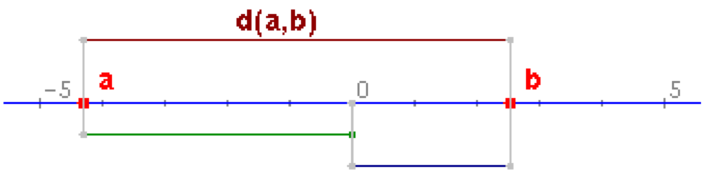
Propiedades do valor absoluto

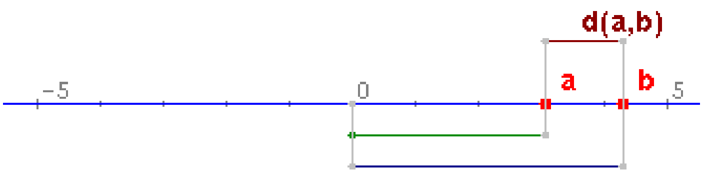
1) $|a| \geq 0$
2) $|a| = |-a|$
3) $|a+b| \leq |a| + |b|$
4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

O valor absoluto dun número representa a distancia do mesmo ao cero. Podemos xeneralizar esta idea:

- ✓ A **distancia** entre dous números reais, **a** e **b**, é o valor absoluto da súa diferenza:

d(a,b)=|b-a|=|a-b|





Se a e b teñen o mesmo signo, a distancia entre a e b é a resta dos valores absolutos e, se o signo é distinto, a suma.

a=-4,2946 **|a|=4,2946**

b=2,5447 **|b|=2,5447**

d(a,b)=6,8393

a=3,0054 **|a|=3,0054**

b=4,2861 **|b|=4,2461**

d(a,b)=1,2807

Intervalos: segmentos e semirrectas

O concepto de intervalo está ligado aos conceptos xeométricos de segmento e semirrecta: un intervalo acoutado equivale a un segmento e un intervalo non acoutado equivale a unha semirrecta.

- ✓ Dados dous números reais **a** e **b**, chámase **intervalo de extremos a e b** ao conxunto de números reais comprendidos entre ambos.
- ✓ A lonxitude do intervalo é a distancia(a,b) = **|b-a|**

Nos **intervalos acoutados,** dependendo de que os extremos pertenzan ou non ao mesmo, distínguense os intervalos pechados, abertos e semiabertos (pola esquerda ou pola dereita).

Se se constrúe un intervalo aberto ao redor dun punto **a**, obtense un **entorno simétrico** de **a** de **raio r,** conxunto de números reais cuxa distancia a "a" é menor que r.

Un **intervalo non acoutado** é o conxunto formado por todos os números maiores (ou ≥), ou menores (ou ≤) que un dado, a cota inferior ou superior respectivamente, a. Represéntanse mediante unha semirrecta e a súa lonxitude é infinita.

Intervalo pechado:
Os extremos pertencen ao intervalo.

$[\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a \le x \le b\}$

Intervalo aberto:
Os extremos non pertencen ao intervalo.

$(\mathbf{a,b}) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$

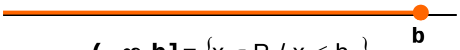
Intervalo semiaberto: Un extremo pertence ao intervalo e outro non.

$(\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a < x \le b\}$

Entorno simétrico de a:

$(\mathbf{a-r,a+r}) = \{x \in R \,/\, a-r < x < a+r\}$

Semirrecta acoutada superiormente



$(\mathbf{-\infty,b}] = \{x \in R \,/\, x \le b\}$

Semirrecta acoutada inferiormente

$(\mathbf{a,+\infty}) = \{x \in R \,/\, a < x\}$

EXERCICIOS resoltos

1. Indicar o menor dos conxuntos numéricos ao que pertencen os números:

   a) 5,97509… b) $6{,}10\widehat{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{6}{2}$ e) $\sqrt{5}$ f) $\sqrt{16}$

   a) R *(decimal non periódico)* ***b) Q*** *(decimal periódico)* ***c) Q*** *(fracción non exacta)*

   d) Z *(fracción exacta negativa)* ***e) R*** *(radical non exacto)* ***f) N*** *(radical exacto)*

2. O raio dunha circunferencia é de 4 m. Calcula a súa lonxitude

   2.1. Truncando o resultado primeiro a cm e logo a m.

   $$L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381\ldots m = 2488\ cm = 24\ m$$

   2.2. Redondeando o resultado primeiro a cm e logo a m

   $$L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381\ldots m = 2488\ cm = 25\ m$$

3. Calcula o valor absoluto dos números a=-3 e b=5, e a distancia entre eles.

   $$|a|=3,\ |b|=5,\ dist(a,b)=|b-a|=|5-(-3)|=|8|=8$$

4. Calcula |a+b| |a-b| |a·b| e |a/b|

   $$|a+b|=|-3+5|=|2|=2;\ |a-b|=|-3-5|=|-8|=8;\ |a\cdot b|=|-3\cdot 5|=|-15|=15;$$
   $$|a/b|=|-3/5|=3/5$$

5. Indica que puntos pertencen ao intervalo en cada caso:

   5.1. Intervalo (-74,-52]. Puntos: a) –53 b) –74 c) 11 ***Resposta: a***

   5.2. Intervalo (-∞,75]. Puntos: a) 32 b) 75 c) 76 ***Resposta: a e b.***

2. Radicais

Forma exponencial

Chamamos **raíz n-ésima** dun número dado, *a*, ao número *b* que elevado a *n* nos dá *a*.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$

Un **radical** é equivalente a unha **potencia de expoñente fraccionario** na que o **denominador** da fracción é o **índice** do radical e o **numerador** da fracción é o **expoñente** do radicando.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ por ser } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

Radicais equivalentes

Dous ou máis radicais dinse **equivalentes** se as fraccións dos expoñentes das potencias asociadas son equivalentes.

Dado un radical, pódense obter infinitos radicais semellantes, **multiplicando** ou **dividindo** o expoñente do radicando e o índice da raíz por un mesmo número. Se se multiplica, chámase **amplificar** e, se se divide, chámase **simplificar** o radical.

Radical **irredutible**, cando a fracción da potencia asociada é irredutible.

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$$

son equivalentes por ser: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Amplificar: $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3\cdot 2]{x^{2\cdot 2}} = \sqrt[6]{x^4}$

Simplificar: $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6:2]{x^{4:2}} = \sqrt[3]{x^2}$

$\sqrt[3]{x^2}$

Irredutible por ser m.c.d.(3,2)=1

EXERCICIOS resoltos

6. Escribe os seguintes radicais como potencia de expoñente fraccionario:

a) $\sqrt[5]{3}$ $\quad \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b) $\sqrt[5]{x^3}$ $\quad \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$

7. Escribe as seguintes potencias como radicais:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ $\quad 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$ $\quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

8. Escribe un radical equivalente, amplificando o dado:

a) $\sqrt[3]{5}$ $\quad \sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) $\sqrt[5]{x^4}$ $\quad \sqrt[5]{x^4} = \sqrt[5\cdot 3]{x^{4\cdot 3}} = \sqrt[15]{x^{12}}$

9. Escribe un radical equivalente, simplificando o dado.

a) $\sqrt[6]{49}$ $\quad \sqrt[6]{49} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6:2]{7^{2:2}} = \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[35]{x^{28}}$ $\quad \sqrt[35]{x^{28}} = \sqrt[35:7]{x^{28:7}} = \sqrt[5]{x^4}$

3. Propiedades das raíces

Raíz dun produto

$$\sqrt[3]{2\cdot 5} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2\cdot b^4} = \sqrt[7]{a^2}\cdot\sqrt[7]{b^4}$$

A raíz n-ésima dun produto é igual ao produto das raíces n-ésimas dos factores.

$$\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

Raíz dun cociente

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

A raíz n-ésima dun cociente é igual ao cociente das raíces n-ésimas do dividendo e do divisor.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Raíz dunha potencia

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{x^7} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^7$$

Para achar a raíz dunha potencia, calcúlase a raíz da base e logo elévase o resultado á potencia dada.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

Raíz dunha raíz

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

A **raíz n-ésima** da **raíz m-ésima** dun número é igual á raíz **nm-ésima** dese número.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

EXERCICIOS resoltos

10. Escribe cunha soa raíz:

a) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

b) $\sqrt[7]{x^4\sqrt{x}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^4\sqrt{x}} = \sqrt[7]{\sqrt{x^8 \cdot x}} = \sqrt[14]{x^9}$

11. Escribe cunha soa raíz:

a) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ $\qquad \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ $\qquad \sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^3}$

12. Escribe cunha soa raíz:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{x^4}{x^3}} = \sqrt[5]{x}$

4. Operacións con raíces

Introdución e extracción de factores

Para **introducir** un factor dentro dun radical, elévase o factor á potencia que indica o índice e escríbese dentro.

Se algún factor do radicando ten por expoñente un número maior que o índice, pódese **extraer** fóra do radical dividindo o expoñente do radicando entre o índice. O cociente é o expoñente do factor que sae fóra e o resto é o expoñente do factor que queda dentro.

Introducir

$$x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$$

Extraer:

$$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3}$$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

Cálculo de raíces

Para calcular a raíz n-ésima dun número primeiro, factorízase e escríbese o número como produto de potencias; logo extráense todos os factores.

Se todos os expoñentes do radicando son múltiplos do índice, a raíz é exacta.

Esta técnica é moi útil para achar raíces exactas. Cando a raíz non é exacta, esta técnica transforma o radical nunha expresión *máis manexable*.

$$\begin{array}{r|l} 1728 & 2 \\ 864 & 2 \\ 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = $$
$$= 2^2 \cdot 3 = 12$$

Sumas e Restas

Dúas expresións radicais son **semellantes** se teñen o mesmo índice e o mesmo radicando. Por exemplo:

$$\frac{1}{8}\sqrt[12]{31} \qquad 2\sqrt[12]{31}$$

Só se poden ***sumar*** ou ***restar*** radicais semellantes. Para iso sácase factor común ao radical correspondente e súmanse ou réstanse os coeficientes.

En ocasións podemos sumar radicais non semellantes extraendo algún factor que os converta en semellantes.

$$-\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{3}{2}\sqrt{20}+\frac{7}{2}\sqrt{20}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{20}=\frac{3}{2}\sqrt{20}$$

$$-\frac{1}{8}\sqrt{45}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=-\frac{1}{8}\sqrt{3^2\cdot 5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=-\frac{3}{8}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=\left(-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{5}=\frac{3}{8}\sqrt{5}$$

Produtos

Dúas expresións radicais poden multiplicarse só se teñen o mesmo índice. Neste caso o produto faise do seguinte xeito:

$$\left(a\cdot\sqrt[n]{b}\right)\cdot\left(c\cdot\sqrt[n]{d}\right)=ac\cdot\sqrt[n]{bd}$$

comprobando ao final se pode extraerse algún factor do radical.

Se os radicais non son do mesmo índice, primeiro búscanse radicais equivalentes que teñan o mesmo índice e, logo, multiplícanse. Exemplo:

$$\left(2\cdot\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(7\cdot\sqrt{x}\right)=14\cdot\sqrt[6]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^3}=14\cdot\sqrt[6]{x^5}$$

Aquí só veremos radicais cuadráticos.

$$\left(-\frac{1}{4}\sqrt{6300}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\sqrt{196}\right)=$$
$$=-\frac{1}{20}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}\cdot\sqrt{2^2\cdot 7^2}=$$
$$=-\frac{1}{20}\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^3}=$$
$$=-\frac{1}{20}\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{7}=$$
$$=-21\sqrt{7}$$

Cocientes

Dúas expresións radicais poden dividirse só se teñen o mesmo índice. Neste caso, o cociente faise como se ve na imaxe:

$$\frac{a\cdot\sqrt[n]{b}}{c\cdot\sqrt[n]{d}}=\frac{a}{c}\cdot\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

Na práctica non adoitan deixarse radicais no denominador e, en lugar de facer así a división, utilízase outro método chamado **racionalización** que consiste en encontrar unha fracción equivalente que non teña radicais no denominador.

No cadro adxunto describimos este método para radicais cuadráticos.

$$\frac{\frac{2}{3}\sqrt{6}}{9\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{6}}{27\sqrt{18}}=$$
$$=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{18}}{27\sqrt{18}\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{108}}{27\cdot 18}=$$
$$=\frac{\sqrt{108}}{243}=\frac{\sqrt{2^2 3^3}}{243}=$$
$$=\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{243}=\frac{2\sqrt{3}}{81}$$

EXERCICIOS resoltos

13. Introduce os factores dentro do radical:

a) $2\cdot\sqrt[4]{3}$ — $2\cdot\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4\cdot 3} = \sqrt[4]{16\cdot 3} = \sqrt[4]{48}$

b) $x^2\,\sqrt[7]{x^3}$ — $x^2\,\sqrt[7]{x^3} = \sqrt[7]{(x^2)^7\cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{14}\cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{17}}$

14. Extrae os factores do radical:

a) $\sqrt[4]{128}$ — $\sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[7]{x^{30}}$ — $\sqrt[7]{x^{30}} = \sqrt[7]{x^{28+2}} = \sqrt[7]{x^{28}\cdot x^2} = x^4\sqrt[7]{x^2}$

15. Calcular as seguintes raíces:

a) $\sqrt[5]{1024}$ — $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt[7]{x^{84}}$ — $\sqrt[7]{x^{84}} = \sqrt[7]{x^{12\cdot 7}} = \sqrt[7]{(x^{12})^7} = x^7$

16. Indica qué radicais son semellantes

a) $\sqrt[4]{3}; 5\sqrt[4]{3}$ — $\sqrt[4]{3}$ e $5\sqrt[4]{3}$ Son semellantes

b) $\sqrt[4]{x}; \sqrt[3]{x}$ — $\sqrt[4]{x}$ e $\sqrt[3]{x}$ Non son semellantes, teñen distinto índice

17. Calcular a suma:

a) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$ — $\sqrt{40}+\sqrt{90} = \sqrt{4\cdot 10}+\sqrt{9\cdot 10} = 2\sqrt{10}+3\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{32}-\sqrt{8}$ — $2\sqrt{32}-\sqrt{8} = 2\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3} = 2\cdot 2^2\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

18. Calcular o produto:

a) $\left(\frac{6}{7}\sqrt{14}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\sqrt{252}\right)$

$$\left(\frac{6}{7}\sqrt{14}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\sqrt{252}\right) = -\frac{6\cdot 7}{7\cdot 3}\sqrt{2\cdot 7}\cdot\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 7} = -2\sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 7^2} = -2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\sqrt{2} = -84\sqrt{2}$$

b) $\left(-\frac{5}{3}\sqrt{175}\right)\cdot\left(-2\sqrt{45}\right)$

$$\left(-\frac{5}{3}\sqrt{175}\right)\cdot\left(-2\sqrt{45}\right) = \frac{10}{3}\sqrt{5^2\cdot 7}\sqrt{3^2\cdot 5} = \frac{10}{3}\sqrt{3^2\cdot 5^3\cdot 7} = \frac{10}{3}\cdot 3\cdot 5\sqrt{5\cdot 7} = 50\sqrt{35}$$

19. Calcular o cociente:

$$\frac{\frac{9}{2}\sqrt{24}}{4\sqrt{108}}$$

$$\frac{\frac{9}{2}\sqrt{24}}{4\sqrt{108}} = \frac{9\sqrt{24}}{\sqrt{1088}} = \frac{9\sqrt{24}\sqrt{108}}{8\sqrt{108}\sqrt{108}} = \frac{9\sqrt{2592}}{8\cdot 108} = \frac{\sqrt{2^5\cdot 3^4}}{96} = \frac{2^2\cdot 3^2\sqrt{2}}{96} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Para practicar

1. Considerando 7,4833147735.... como o valor exacto de $\sqrt{56}$, escribe as aproximacións por defecto, por exceso e redondeos de orde primeira e segunda (décimas e centésimas, respectivamente).

2. A cinta métrica que aparece abaixo ten unhas divisións ata o medio cm. Utilizámola para medir una vara e obtemos o valor que se mostra nela. Entre qué valores exactos se encontra a lonxitude real, supoñendo que ese valor é: a) por defecto; b) por exceso; c) redondeo a cm.

As aproximacións poden utilizarse tamén con números enteiros. Para xeneralizar esta idea, usaremos o concepto de cifras significativas: *"Se un número N é un valor aproximado doutro número P, diremos que N ten n cifras significativas se as primeiras n cifras de N coinciden coas n primeiras cifras de P. (Non se consideran cifras significativas os ceros cuxa única finalidade é situar a coma decimal)".* A definición anterior é bastante intuitiva pero non sempre é correcta de todo, por iso precisamos un pouco máis: *"Diremos que N ten n cifras significativas se o número formado coas n primeiras cifras de N difire do número formado coas n primeiras cifras de P (eliminando as comas decimais se as houbese) en menos de 0,5".*

3. Dinnos que a poboación dunha cidade é de 1579000 habitantes e que as 4 primeiras cifras desta cantidade son significativas. Entre que valores se acha realmente a súa poboación?

4. Determina os conxuntos A∩B, AUB, A-B e -A nos casos seguintes:

1. A = [-11,-9] B = (-1,6)

2. A = [-5,5] B = (3,4)

3. A = [-2,7] B = (-2,6)

5. Escribe como potencia de expoñente fraccionario:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

6. Escribe como un radical:

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $x^{\frac{1}{5}}$ d) $x^{\frac{5}{3}}$

7. Extraer todos os factores posibles dos seguintes radicais

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{9a^3}$ d) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

8. Introducir dentro do radical todos os factores posibles que se encontren fóra del.

a) $3\cdot\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{a}$

c) $3a\cdot\sqrt{2a^2}$ d) $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

9. Suma os seguintes radicais indicados.

a) $\sqrt{45}-\sqrt{125}-\sqrt{20}$

b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}$

c) $\sqrt{175}+\sqrt{63}-2\sqrt{28}$

d) $\sqrt{20}+\frac{1}{3}\sqrt{45}+2\sqrt{125}$

10. Realiza as operacións seguintes:

a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}$

b) $(7\sqrt{5}+5\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}$

c) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\sqrt{2})\cdot 4\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

11. Divide os seguintes radicais

a) $\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

Para saber máis

Cuestións sobre pi

Na presentación do tema mencionábase que o valor de pi era 3'14, 3'1416, ... e formulábanse unha serie de preguntas ao respecto:

Cal das cantidades anteriores é o auténtico número pi?

Segundo viches ao longo do tema, en realidade ningunha das anteriores cantidades son o valor exacto de pi, trátase de aproximacións ao número e poñer máis ou menos decimais depende da precisión que necesitemos na medida.

Como é posible que chamemos pi a todas elas se é obvio que son diferentes?

O feito de que chamemos pi a calquera das anteriores cantidades débese a que é imposible utilizar o valor exacto da maioría dos números irracionais, polo que nos temos que contentar con dar aproximacións a ese valor. Como xa dixemos antes, o número de cifras decimais con que se dá este número dependerá da precisión de medida desexada e o feito de que, por exemplo, a cuarta cifra decimal sexa un 6 en 3'1416 e un 5 en 3'14159 débese a que a aproximación se fai en cada caso por redondeo e, con catro cifras decimais, 3'1416 está máis próximo do valor exacto que 3'1415.

Algúns números irracionais, como a raíz cadrada de 2, si poden representarse en forma exacta, pero se esa cantidade a queremos medir na práctica, non nos quedará máis remedio que dar un valor aproximado coa precisión que desexemos.

Como é posible que se estean a descubrir aínda cifras de pi se o estamos usando dende hai un montón de anos?

Os números irracionais teñen infinitas cifras decimais que non se repiten de forma periódica. Para achar estas cifras existen distintos procedementos ou algoritmos. Algúns destes algoritmos son relativamente sinxelos, como o que se utiliza para obter as cifras decimais da raíz cadrada de 2 (que antigamente se ensinaba na escola primaria); outros, en cambio, son tremendamente longos e complexos. O número pi está neste segundo grupo. Actualmente os algoritmos para o cálculo de cifras decimais de pi executanse con potentes ordenadores.

Cal é ou cal podería ser a última cifra do número pi?

Como dixemos antes, os números irracionais teñen infinitas cifras decimais; polo tanto, non existe a última cifra do número pi. Como ademais as súas cifras non se repiten de forma periódica, non se pode predicir de antemán qué cifra será a que ocupe un determinado lugar ata que se consiga calcular.

Lembra o máis importante

Os números reais

Os números **irracionais** son os decimais non periódicos. O conxunto **R** dos números **reais** está formado por todos os números racionais e irracionais.

Aproximacións

Para representar decimais infinitos, usamos aproximacións **por defecto** e **por exceso**, **truncamentos** e **redondeos**.

Propiedades dos radicais

$$\sqrt[n]{A\cdot B}=\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B} \qquad \sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$$

$$\sqrt[n]{A^p}=\left(\sqrt[n]{A}\right)^p \qquad \sqrt[p]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[np]{A}$$

Raíz n-ésima

$$\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$$

Expoñente fraccionario

$$\sqrt[n]{A^p}=A^{\frac{p}{n}}$$

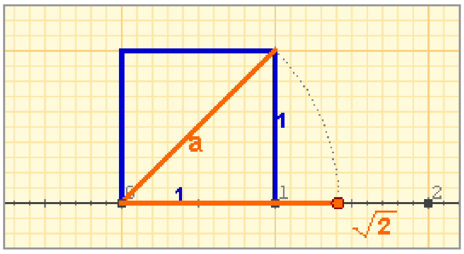
A recta real

O **valor absoluto** dun nº a, **|a|** é o nº prescindindo do signo.

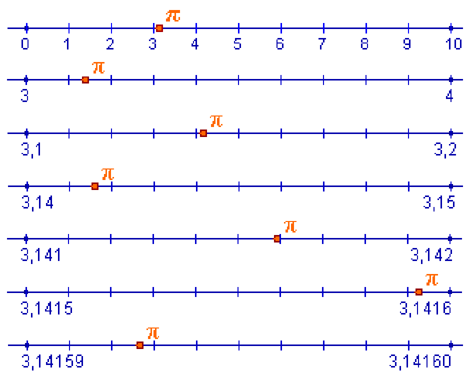
A **distancia** entre dous puntos **a** e **b** é o valor absoluto da súa diferenza **|a-b|=|b-a|**

Intervalos: segmentos e semirrectas

- Intervalo pechado **[a,b]**
- Intervalo aberto **(a,b)**
- Intervalo semiaberto **(a,b]** ou **[a,b)**
- Intervalo non acoutado como **[a,+∞)** ou **(-∞,a)**



Todos os números reais, tanto os racionais como os irracionais, se poden representar mediante un punto da recta e, reciprocamente, a cada punto da recta lle corresponde un número real.

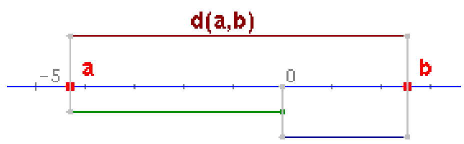


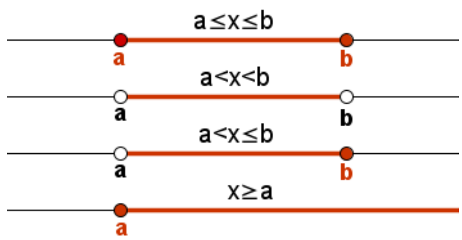
Radicais equivalentes

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

Radicais semellantes

Son radicais co mesmo índice e o mesmo radicando, podendo diferir no seu coeficiente.





Autoavaliación

1. Indica o menor conxunto numérico ao que pertence o número

$$12,80\overset{\frown}{965}$$

2. Unha milla inglesa son 1609,34 m. Redondea a km 27 millas.

3. Coa calculadora, escribe un truncamento e un redondeo ás milésimas de $\sqrt{21}$

4. Escribe o intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

5. Calcula a seguinte raíz: $\sqrt[7]{78125}$

6. Escribe en forma de expoñente fraccionario: $\sqrt[10]{x^3}$

7. Introduce o factor no radical: $6\sqrt[4]{5}$

8. Extrae os factores do radical: $\sqrt[4]{243}$

9. Calcula: $\sqrt{18} - \sqrt{98}$

10. Calcula e simplifica: $\sqrt{x^{10} \cdot y^9} \cdot \sqrt{x^4 \cdot y^5}$

Solucións dos exercicios para practicar

1. a) De primeira orde:

Por defecto: 7,4

Por exceso: 7,5

Redondeo: 7,5

b) De segunda orde:

Por defecto: 7,48

Por exceso: 7,49

Redondeo: 7,48

2. a) Entre 1,100 e 1,105 m

b) Entre 1,095 e 1,100 m

c) Entre 1,095 e 1,105 m

3. Entre 1578500 e 1579500 cunha cota de erro de 500 habitantes.

4. Caso 1

1) $A \cap B = \Phi$ (baleiro)
2) $A \cap B = [-11,-9] \cap (-1,6)$
3) $A \cup B = A = [-11,-9]$
4) $-A = (-\infty,-11) \cup (-9,+\infty)$

Caso 2

1) $A \cap B = (3,4)$
2) $A \cup B = [-5,5]$
3) $A - B = [-5,3] \cup [4,5]$
4) $-A = (-\infty,-5) \cup (5,+\infty)$

Caso 3

1) $A \cap B = [-2,6)$
2) $A \cup B = [-2,7]$
3) $A - B = [6,7]$
4) $-A = (-\infty,-2) \cup (7,+\infty)$

5. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$

c) $a^{\frac{3}{2}}$ d) $a^{\frac{3}{5}}$

6. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5^3}$

c) $\sqrt[5]{x}$ d) $\sqrt[3]{x^5}$

7. a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{2}$

c) $3a\sqrt{a}$ d) $7ab^2c^3\sqrt[3]{2abc}$

8. a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{4a}$

c) $\sqrt{18a^4}$ d) $\sqrt[3]{a^5b^7}$

9. a) $-4\sqrt{5}$ b) $11\sqrt{3}$

c) $4\sqrt{7}$ d) $15\sqrt{5}$

10. a) $2-\sqrt{6}$

b) $14\sqrt{5}+30$

c) $8\sqrt{6}+4\sqrt{10}-20$

d) 2

11. a) $\sqrt{2}$ b) $y\sqrt{x}$

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. **Q** (decimal periódico)

2. 43 km

3. redon.: 4,583 trun.: 4,582

4. (3,5]

5. 5 $(78125=5^7)$

6. $x^{\frac{3}{10}}$

7. $\sqrt[4]{6480}$

8. $3\sqrt[4]{3}$

9. $-4\sqrt{2}$

10. x^7y^7