2

Potencias e radicais

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Calcular e operar con potencias de expoñente enteiro.
- Recoñecer as partes dun radical e o seu significado.
- Obter radicais equivalentes a outro dado.
- Expresar un radical como potencia de expoñente fraccionario e viceversa.
- Operar con radicais.
- Racionalizar expresións con radicais no denominador.
- Utilizar a calculadora para operar con potencias e radicais.

Antes de empezar

Propiedades das potencias de expoñente enteiro

Convén que lembres as propiedades das potencias que estudaches en cursos anteriores

- O produto de potencias da mesma base é outra potencia da mesma base e de expoñente, a suma dos expoñentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$x^2 \cdot x^7 = x^{2+7} = x^9$$

- O cociente de potencias da mesma base é outra potencia da mesma base e de expoñente, a resta dos expoñentes.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3$$

- A potencia doutra potencia é unha potencia da mesma base e de expoñente, o produto dos expoñentes.

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$$

$$\left(x^7\right)^3 = x^{7\cdot 3} = x^{21}$$

- Unha potencia de expoñente cero é igual á unidade.

$$a^0 = 1$$

$$7^0 = 1$$

- O produto de potencias do mesmo expoñente é outra potencia do mesmo expoñente e de base, o produto das bases.

$$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$$

$$2^5 \cdot 3^5 = (2\cdot 3)^5 = 6^5$$

- O cociente de potencias do mesmo expoñente é outra potencia do mesmo expoñente e de base, o cociente das bases.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{8^6}{4^6} = \left(\frac{8}{4}\right)^6 = 2^6$$

1. Radicais

Definición

Chamamos **raíz enésima** dun número dado a ao número b que elevado a n nos dá a.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$

Un **radical** é equivalente a unha **potencia de expoñente fraccionario** na que o **denominador** da fracción é o **índice** do radical e o **numerador** da fracción é o **expoñente** do radicando.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}}$$

$\sqrt[3]{8} = 2$ por ser $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$

Radicais equivalentes

Dise que dous ou máis radicais son **equivalentes** se as fraccións dos expoñentes das potencias asociadas son equivalentes.

Dado un radical pódense obter infinitos radicais semellantes, **multiplicando** ou **dividindo** o expoñente do radicando e o índice da raíz por un mesmo número. Se se multiplica chámase **amplificar** e se se divide chámase **simplificar** o radical.

Radical **irredutible**, cando a fracción da potencia asociada é irredutible.

$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$

son equivalentes por ser: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Amplificar: $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3\cdot 2]{x^{2\cdot 2}} = \sqrt[6]{x^4}$

Simplificar: $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6:2]{x^{4:2}} = \sqrt[3]{x^2}$

$\sqrt[3]{x^2}$

Irredutible por ser m.c.d.(3,2)=1

Introducción e extracción de factores

Para **introducir** un factor dentro dun radical elévase o factor á potencia que indica o índice e escríbese dentro.

Se algún factor do radicando ten por expoñente un número maior que o índice, pódese **extraer** fóra do radical dividindo o expoñente do radicando entre o índice. O cociente é o expoñente do factor que sae fóra e o resto é o expoñente do factor que queda dentro.

Introducir

$x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3\cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$

$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3} = \sqrt[3]{8\cdot 3} = \sqrt[3]{24}$

Extraer:

$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3}$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} =$$
$$= 2^2 \cdot 3 = 12$$

Cálculo de raíces

Para calcular a raíz enésima dun número, primeiro factorízase e escríbese o número como produto de potencias, despois extráense todos os factores.

Se todos os expoñentes do radicando son múltiplos do índice, a raíz é exacta.

Reducir a índice común

$\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[10]{3}$

m.c.m(6,10)=30

$\sqrt[6]{2} = \sqrt[30]{2^5} = \sqrt[30]{32}$

$\sqrt[10]{3} = \sqrt[30]{3^3} = \sqrt[30]{27}$

Redución a índice común

Reducir a **índice común** dous ou máis radicais é atopar radicais equivalentes aos dados que teñan o mesmo índice.

O índice común é calquera múltiplo do m.c.m. dos índices.

O mínimo índice común é o m.c.m. dos índices.

Os seguintes radicais son semellantes:

$2\sqrt[3]{4}$; $7\sqrt[3]{4}$; $5\sqrt[3]{4}$

Os seguintes radicais non son semellantes:

$2\sqrt[3]{4}$; $2\sqrt[5]{4}$ O índice é distinto

Radicais semellantes

Radicais semellantes son aqueles que teñen o mesmo índice e o mesmo radicando. Poden diferir unicamente no coeficiente que os multiplica.

EXERCICIOS resoltos

1. Escribe os seguintes radicais como potencia de expoñente fraccionario:

a) $\sqrt[5]{3}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b) $\sqrt[5]{x^3}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{x^3}$

2. Escribe as seguintes potencias como radicais:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

3. Escribe un radical equivalente, amplificando o dado:

a) $\sqrt[3]{5}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) $\sqrt[5]{x^4}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{x^4} = \sqrt[5\cdot 3]{x^{4\cdot 3}} = \sqrt[15]{x^{12}}$

4. Escribe un radical equivalente, simplificando o dado.

a) $\sqrt[6]{49}$ $\qquad$ $\sqrt[6]{49} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6:2]{7^{2:2}} = \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[35]{x^{28}}$ $\qquad$ $\sqrt[35]{x^{28}} = \sqrt[35:7]{x^{28:7}} = \sqrt[5]{x^4}$

5. Introduce os factores dentro do radical:

a) $2\cdot\sqrt[4]{3}$ $\qquad$ $2\cdot\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4\cdot 3} = \sqrt[4]{16\cdot 3} = \sqrt[4]{48}$

b) $x^2\sqrt[7]{x^3}$ $\qquad$ $x^2\sqrt[7]{x^3} = \sqrt[7]{(x^2)^7\cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{14}\cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{17}}$

6. Extrae os factores do radical:

a) $\sqrt[4]{128}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[7]{x^{30}}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{x^{30}} = \sqrt[7]{x^{28+2}} = \sqrt[7]{x^{28}\cdot x^2} = x^4\sqrt[7]{x^2}$

7. Calcular as seguintes raíces:

a) $\sqrt[5]{1024}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt[7]{x^{84}}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{x^{84}} = \sqrt[7]{x^{12\cdot 7}} = \sqrt[7]{(x^{12})^7} = x^7$

8. Reduce a índice común

a) $\sqrt{3}; \sqrt[3]{5}$ $\qquad$ $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) $\sqrt[4]{x^3}; \sqrt[6]{x^5}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9}$; $\sqrt[6]{x^5} = \sqrt[12]{x^{10}}$

9. Indica que radicais son semellantes

a) $\sqrt[4]{3}; 5\sqrt[4]{3}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{3}$ y $5\sqrt[4]{3}$ Son semajentes - Son semellantes

b) $\sqrt[4]{x}; \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{x}$ y $\sqrt[3]{x}$ No son semajentes,tienen distinto indice - Non son semellantes, teñen distinto índice

2. Propiedades

$$\sqrt[3]{2\cdot 5}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2\cdot b^4}=\sqrt[7]{a^2}\cdot\sqrt[7]{b^4}$$

Raíz dun produto

A raíz enésima dun produto é igual ao produto das raíces enésimas dos factores.

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a\cdot b}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}}=\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

Raíz dun cociente

A raíz enésima dun cociente é igual ao cociente das raíces enésimas do dividendo e do divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{2^3}=\left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{x^7}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^7$$

Raíz dunha potencia

Para achar a raíz dunha potencia, calcúlase a raíz da base e logo elévase o resultado á potencia dada.

$$\sqrt[n]{a^p}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

Demostración: $\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p=\left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[15]{2}$$

Raíz dunha raíz

A **raíz enésima** da **raíz emésima** dun número é igual á raíz **nm-ésima** dese número.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

3. Simplificación

Racionalización

Racionalizar unha expresión cun radical no denominador consiste en atopar unha expresión equivalente que non teña raíces no denominador.

Para iso multiplícase numerador e denominador pola expresión axeitada para que, ao operar, a raíz desapareza.

Se o denominador é un binomio multiplícase o numerador e o denominador polo conxugado* do denominador.

* **O conxugado de** $\boxed{a+b}$ **é** $\boxed{a-b}$

Cando o denominador é un radical

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}=\frac{1\cdot\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^4}\cdot\sqrt[7]{x^3}}=\frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{\sqrt[7]{x^3}}{x}$$

Cando o denominador é un binomio

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

Simplificar un radical

Simplificar un radical é escribilo na forma máis sinxela, de forma que:

- O índice e o expoñente sexan primos entre si.
- Non se poida extraer ningún factor do radicando.
- O radicando non teña ningunha fracción.

$$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt[7]{a^{30}}=a^4\sqrt[7]{a^2}$$

EXERCICIOS resoltos

10. Escribe cunha única raíz:

a) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

b) $\sqrt[7]{x^4\sqrt{x}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^4\sqrt{x}} = \sqrt[7]{\sqrt{x^8 \cdot x}} = \sqrt[14]{x^9}$

11. Escribe cunha única raíz:

a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ $\qquad \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}$ $\qquad \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^3}$

12. Escribe cunha única raíz:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{x^4}{x^3}} = \sqrt[5]{x}$

13. Racionaliza.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{9}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[5]{9}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{9}}{3}$

b) $\dfrac{2}{5 \cdot \sqrt[3]{4}}$ $\qquad \dfrac{2}{5 \cdot \sqrt[3]{4}} = \dfrac{2}{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{5 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{5 \cdot \sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{5 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{5}$

14. Racionaliza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^4}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^4} \cdot \sqrt[7]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^3}}{x}$

b) $\dfrac{1}{x^2\sqrt[7]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{1}{x^2\sqrt[7]{x^3}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt[7]{x^4}}{x^2\sqrt[7]{x^3} \cdot \sqrt[7]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x^2\sqrt[7]{x^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x^2 \cdot x} = \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x^3}$

15. Racionaliza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right) \cdot \left(\sqrt{5}-2\right)} = \dfrac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{5-4} = \sqrt{10}-2\sqrt{2}$

c) $\dfrac{1}{3-\sqrt{x}}$ $\qquad \dfrac{1}{3-\sqrt{x}} = \dfrac{1 \cdot \left(3+\sqrt{x}\right)}{\left(3-\sqrt{x}\right) \cdot \left(3+\sqrt{x}\right)} = \dfrac{3+\sqrt{x}}{9-x}$

4. Operacións con radicais

Suma e resta de Radicais

Para sumar ou restar radicais cómpre que sexan semellantes (que teñan o mesmo índice e o mesmo radicando), cando isto ocorre, súmanse ou réstanse os coeficientes de fóra e déixase o radical.

$$\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{2^3}+\sqrt{2}=$$
$$=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^3}=\sqrt{x}+\sqrt{x}=2\sqrt{x}$$

Produto de radicais

Para multiplicar radicais cómpre que teñan o mesmo índice, cando isto ocorre o resultado é un radical do mesmo índice e de radicando, o produto dos radicandos.

Se teñen distinto índice, primeiro redúcese a índice común.

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{9\cdot 8}=\sqrt[6]{72}$$

$$\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[10]{x^2}\cdot\sqrt[10]{x^5}=\sqrt[10]{x^7}$$

Cociente de radicais

Para dividir radicais cómpre que teñan o mesmo índice, cando isto ocorre o resultado é un radical do mesmo índice e de radicando, o cociente dos radicandos.

Se teñen distinto índice, primeiro redúcese a índice común.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}}=\sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x}}=\frac{\sqrt[8]{x^2}}{\sqrt[8]{x}}=\sqrt[8]{x}$$

EXERCICIOS resoltos

17. Calcular a suma:

a) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$ $\qquad \sqrt{40}+\sqrt{90}=\sqrt{4\cdot 10}+\sqrt{9\cdot 10}=2\sqrt{10}+3\sqrt{10}=5\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{32}-\sqrt{8}$ $\qquad 2\sqrt{32}-\sqrt{8}=2\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3}=2\cdot 2^2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=8\sqrt{2}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{16}$ $\qquad \sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$

d) $2\sqrt{\frac{1}{2}}+5\sqrt{8}$ $\qquad 2\sqrt{\frac{1}{2}}+5\sqrt{8}=\sqrt{\frac{4\cdot 1}{2}}+5\sqrt{2^3}=\sqrt{2}+10\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

18. Calcular e simplificar:

a) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[5]{27}$ $\qquad \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[9]{x^2}$ $\qquad \sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[5]{x^3}$

c) $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}$ $\qquad \sqrt[5]{x^3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[5]{\sqrt{x\cdot x^3}}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[10]{x^4}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[10]{x^4}\cdot\sqrt[10]{x^5}=\sqrt[10]{x^9}$

d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$ $\qquad \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^9}=\sqrt[12]{2^{19}}=2\sqrt[12]{2^7}$

19. Calcular e simplificar:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[5]{2}}=\dfrac{\sqrt[15]{2^{20}}}{\sqrt[15]{2^3}}=\sqrt[15]{2^{17}}=2\sqrt[15]{2^2}=2\sqrt[15]{4}$

b) $\dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x^3}}=\dfrac{\sqrt[14]{x^8}}{\sqrt[14]{x^3}}=\sqrt[14]{x^5}$

a) $\dfrac{\sqrt[6]{8^4}}{\sqrt[8]{4^3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[6]{8^4}}{\sqrt[8]{4^3}}=\dfrac{\sqrt[6]{\left(2^3\right)^4}}{\sqrt[8]{\left(2^2\right)^3}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^{12}}}{\sqrt[8]{2^6}}=\dfrac{\sqrt[24]{\left(2^{12}\right)^4}}{\sqrt[24]{\left(2^6\right)^3}}=\dfrac{\sqrt[24]{2^{48}}}{\sqrt[24]{2^{18}}}=\sqrt[24]{2^{30}}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{x\cdot x^8}}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[6]{x^9}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[12]{x^{18}}}{\sqrt[12]{x^3}}=\sqrt[12]{x^{15}}=x\sqrt[12]{x^3}$

20. Calcular e simplificar

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[4]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^8}}{\sqrt[12]{2^9}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^{24}}}{\sqrt[12]{2^9}}=\sqrt[12]{2^{15}}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}}$

$$\dfrac{\sqrt[5]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{2\cdot 2^2}}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2^3}}=\dfrac{\sqrt[10]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2^3}}=\dfrac{\sqrt[30]{2^9}\cdot\sqrt[30]{2^{20}}}{\sqrt[30]{2^{45}}}=\dfrac{\sqrt[30]{2^{29}}}{\sqrt[30]{2^{45}}}=$$

$$=\dfrac{1}{\sqrt[30]{2^{16}}}=\dfrac{\sqrt[30]{2^{14}}}{\sqrt[30]{2^{16}}\cdot\sqrt[30]{2^{14}}}=\dfrac{\sqrt[30]{2^{14}}}{\sqrt[30]{2^{30}}}=\dfrac{\sqrt[30]{2^{14}}}{2}=\dfrac{\sqrt[15]{2^7}}{2}$$

Para practicar

1. Escribe como potencia de expoñente fraccionario:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

2. Escribe como un radical:

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$

c) $x^{\frac{1}{5}}$ d) $x^{\frac{5}{3}}$

3. Simplifica os seguintes radicais:

a) $\sqrt[4]{25}$ b) $\sqrt[8]{8^2}$

c) $\sqrt[14]{x^6}$ d) $\sqrt[30]{16 \cdot x^8}$

4. Extraer todos os factores posibles dos seguintes radicais

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{9a^3}$ d) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

5. Introducir dentro do radical todos os factores posibles que estean fóra del.

a) $3 \cdot \sqrt{5}$ b) $2 \cdot \sqrt{a}$

c) $3a \cdot \sqrt{2a^2}$ d) $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

6. Reduce ao mínimo común índice os seguintes radicais.

a) $\sqrt{5};\ \sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{4};\ \sqrt[4]{3};\ \sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{3};\ \sqrt[8]{7};\ \sqrt{2}$ d) $\sqrt{3};\ \sqrt[6]{32};\ \sqrt[3]{5}$

7. Suma os seguintes radicais indicados.

a) $\sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{20}$

b) $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{675} - \sqrt{12}$

c) $\sqrt{175} + \sqrt{63} - 2\sqrt{28}$

d) $\sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125}$

8. Multiplica os seguintes radicais

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ b) $5 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{2x^2}$

e) $\sqrt{2ab} \cdot \sqrt[4]{8a^3}$ f) $\sqrt[4]{2x^2y^3} \cdot \sqrt[6]{5x^2}$

9. Multiplica os seguintes radicais

a) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{2}$

b) $(7\sqrt{5} + 5\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}$

c) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 5\sqrt{2}) \cdot 4\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$

10. Divide os seguintes radicais

a) $\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

c) $\dfrac{\sqrt{9x}}{\sqrt[3]{3x}}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[9]{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[8]{x^3}}$

11. Calcula:

a) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$ b) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$

c) $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ d) $\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

12. Racionaliza.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{2a}{\sqrt{2ax}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

13. Racionaliza.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 1}$ b) $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$

c) $\dfrac{5}{4 - \sqrt{11}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$

Para saber máis

$$\sqrt{n} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

Aproximación dunha raíz cadrada mediante fraccións

Calquera número irracional pódese aproximar mediante unha fracción, que se obtén a partir do seu desenvolvemento en fracción continua.

Mediante as fraccións continuas pódese aproximar calquera raíz a unha fracción.

Desenvolvemento de:

$\boxed{\sqrt{2} = 1'4142}$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1'5$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1'4$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1'4166$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{41}{29} = 1'4167$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70} = 1'4142$$

Outros desenvolvementos

$$\sqrt{3} = \left[1, \overline{12}\right] \qquad \sqrt{7} = \left[2, \overline{1114}\right]$$

$$\sqrt{5} = \left[2, \overline{4}\right] \qquad \sqrt{8} = \left[2, \overline{14}\right]$$

$$\sqrt{6} = \left[2, \overline{24}\right] \qquad \sqrt{10} = \left[3, \overline{6}\right]$$

Algoritmo

A primeira cifra $\mathbf{a_1}$ é a parte enteira da raíz

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$a_1 = \left[x_1\right] = \left[\sqrt{2}\right] = 1$$

A segunda cifra $\mathbf{a_2}$ é a parte enteira de x_2

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$a_2 = \left[x_2\right] = \left[\sqrt{2} + 1\right] = 2$$

A terceira cifra $\mathbf{a_3}$ é a parte enteira de x_3

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$a_3 = \left[x_3\right] = \left[\sqrt{2} + 1\right] = 2$$

Non cómpre facer máis cálculos por se repetiren periodicamente os cocientes.

$$\boxed{\sqrt{2} = \left[1, \overline{2}\right] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Lembra o máis importante

Radicais

Chamamos **raíz enésima** dun número dado ao número que elevado a **n** nos dá o primeiro.

A expresión é $\sqrt[n]{a}$ un **radical** de **índice n** e **radicando a**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

Potencia de expoñente fraccionario

Un radical é equivalente a unha potencia de expoñente **fraccionario** onde o numerador da fracción é o expoñente do radicando e o denominador é o índice da raíz.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propiedade fundamental

O valor dun radical non varía se se multiplican ou se dividen polo mesmo número o índice e o expoñente do radicando.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$$

Reducir a índice común

Reducir a índice común dous radicais dados é encontrar dous radicais equivalentes aos dados que teñan o mesmo índice.

Radicais semellantes

Son aqueles que teñen o mesmo índice e o mesmo radicando, podendo diferir no coeficiente que os multiplica.

Operacións con radicais

Para **multiplicar (ou dividir)** radicais do mesmo índice, déixase o índice e multiplícanse (ou divídense) os radicandos. Se teñen índice distinto, primeiro redúcese a índice común.

Para achar a **raíz dun radical** déixase o radicando e multiplícanse os índices.

Para **sumar (ou restar)** radicais semellantes súmanse (ou réstanse) os coeficientes e déixase o radical.

Racionalizar

Racionalizar unha fracción con radicais no denominador é atopar unha fracción equivalente que non teña raíces no denominador.

Auto-avaliación

1. Calcula a seguinte raíz: $\sqrt[7]{78125}$

2. Escribe en forma de expoñente fraccionario: $\sqrt[10]{x^3}$

3. Calcular: $\sqrt{18} - \sqrt{98}$

4. Introduce o factor no radical: $6\sqrt[4]{5}$

5. Calcula, simplifica e escribe cun único radical: $\sqrt[7]{7\sqrt[3]{3}}$

6. Extrae os factores do radical: $\sqrt[4]{243}$

7. Racionaliza: $\dfrac{45}{\sqrt[3]{25}}$

8. Calcular e simplificar: $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[5]{4}$

9. Calcular e simplificar: $\dfrac{\sqrt[7]{125}}{\sqrt[3]{5}}$

10. Canto mide a aresta dun cubo se o seu volume é $1331 m^3$

Solucións dos exercicios para practicar

1. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$
c) $a^{\frac{3}{2}}$ d) $a^{\frac{3}{5}}$

2. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5^3}$
c) $\sqrt[5]{x}$ d) $\sqrt[3]{x^5}$

3. a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[4]{8}$
c) $\sqrt[7]{x^3}$ d) $\sqrt[15]{4x^2}$

4. a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{2}$
c) $3a\sqrt{a}$ d) $7ab^2c^3\sqrt[3]{2abc}$

5. a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{4a}$
c) $\sqrt{18a^4}$ d) $\sqrt[3]{a^5b^7}$

6. a) $\sqrt[4]{25};\sqrt[4]{3}$
b) $\sqrt[12]{256};\sqrt[12]{27};\sqrt[12]{4}$
c) $\sqrt[18]{9};\sqrt[8]{7};\sqrt[8]{216}$
d) $\sqrt[6]{27};\sqrt[6]{32};\sqrt[6]{25}$

7. a) $-4\sqrt{5}$ b) $11\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{7}$ d) $15\sqrt{5}$

8. a) $\sqrt{18}$ b) $15\sqrt{10}$
c) $\sqrt[3]{108}$ d) $\sqrt[6]{4x^7}$
e) $\sqrt[4]{32a^5b}$ f) $\sqrt[12]{200x^{10}y^9}$

9. a) $2-\sqrt{6}$
b) $14\sqrt{5}+30$
c) $8\sqrt{6}+4\sqrt{10}-20$
d) 2

10. a) $\sqrt{2}$ b) $y\sqrt{x}$
c) $\sqrt[6]{81x}$ d) $\sqrt[6]{8a^3b^2}$
e) $\sqrt[6]{243}$ f) $\sqrt[24]{x^{11}}$

11. a) $\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[20]{x^{11}}$
c) $\sqrt[24]{x^{23}}$ d) $\sqrt[3]{x^2}$

12. a) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{2ax}}{x}$ d) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}$

13. a) $\sqrt{3}+1$ b) $-7-3\sqrt{5}$
c) $4+\sqrt{11}$ d) $2-\sqrt{2}$

Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1. 5

2. $x^{\frac{3}{10}}$

3. $-4\sqrt{2}$

4. $\sqrt[4]{6480}$

5. $\sqrt[21]{1029}$

6. $3\sqrt[4]{3}$

7. $9\sqrt[3]{5}$

8. $\sqrt[20]{8192}$

9. $\sqrt[21]{25}$

10. 11 cm