

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Achar os sucesos dun experimento aleatorio e realizar operacións con eles.
- Calcular a probabilidade dun suceso mediante a regra de Laplace.
- Coñecer as propiedades da probabilidade.
- Achar a probabilidade dun suceso nun experimento composto.
- Achar probabilidades de sucesos dependentes e independentes.
- Aplicar a probabilidade a situacións da vida cotiá.

Antes de empezar.

1. Experimentos aleatorios páx. 4
Espazo da mostra e sucesos
Operacións con sucesos
Sucesos incompatibles
2. Probabilidade dun suceso páx. 6
A regra de Laplace
Frecuencia e probabilidade
Propiedades da probabilidade
3. Experimentos compostos páx. 8
Regra da multiplicación
Extraccións con e sen devolución
Probabilidade condicionada
Probabilidade con diagramas de árbore

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumo

Autoavaliación

Antes de empezar

Investiga

Imaxina que estás nun concurso de televisión no que che ofrecen tres portas e ten que elixir unha.

Detrás dunha das portas hai un coche e detrás de cada unha das outras dúas, un burro.



Elixes unha porta, poñamos que a da estrela verde, pero antes de abrila, o presentador, que sabe o que hai detrás de cada unha, abre unha das dúas que non elixiches, a vermella, tras a que por suposto hai un burro, e entón dáche a oportunidade de cambiar a túa elección.

Naturalmente queres levar o coche, que fas, cambiar de porta ou non cambiar?



Supoñamos que cambias a túa porta e ao final quedas coa azul, e... ¡ gañaches o coche!. Neste caso saíu ben cambiar a primeira elección. Que opinas?, convén cambiar ou da o mesmo?, ao longo deste tema descubriralo.

1. Experimentos aleatorios

Espazo da mostra e sucesos.

Ao extraer unha carta dunha baralla, lanzar unha moeda, tirar un dado, e noutros exemplos análogos, non podemos saber de antemán o resultado que se vai obter. Son experimentos **aleatorios**, aqueles nos que non se pode predicir o resultado e deles trátase aquí.

O conxunto de todos os posibles resultados dun experimento aleatorio chámase **espazo da mostra**, e cada un deses posibles resultados é un **suceso elemental**.

- ✓ Un **suceso** é calquera subconxunto do espazo da mostra, verificase cando ocorre calquera dos sucesos elementais que o forman.

Hai un suceso que se verifica sempre, o **suceso seguro** que é o mesmo espazo da mostra.

- Ao tirar unha moeda e un dado, unha forma de representar o espazo da mostra é:



Ou ben: (cara, 1) (cara, 2),...

- Ao tirar tres moedas (ou unha moeda tres veces) o espazo da mostra é:



Operacións con sucesos

O suceso **contrario** a un dado A, está formado por todos os sucesos do espazo da mostra que non están en A. É o que ocorre cando non sucede A e indícase \bar{A} .

- O suceso **contrario** do **seguro** é o **suceso imposible**, que non se verifica nunca, indícase con \emptyset .

Cos sucesos dun experimento aleatorio pódense realizar distintas operacións.

Dados dous sucesos A e B:

- A **unión** de A e B, $A \cup B$, é o suceso formado por todos os sucesos elementais de A e de B. Ocorre cando sucede A ou sucede B ou ambos os dous.
- A **intersección**, $A \cap B$, é o suceso formado polos sucesos elementais comúns a A e B. Verifícase cando ocorren A e B á vez.
- A **diferenza** de A e B, $A \setminus B$, é o suceso formado polos sucesos elementais de A que non están en B. Ocorre se sucede A pero non B.

Espazo mostral:

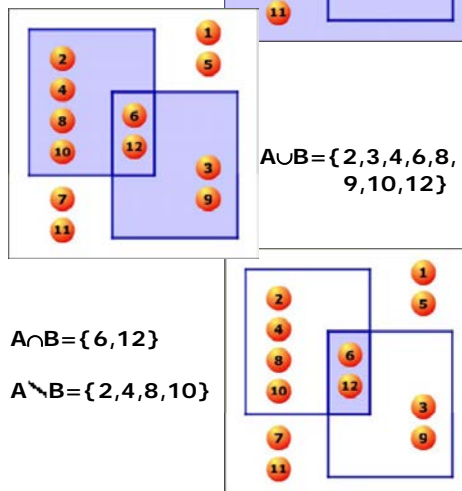
$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Sucesos:

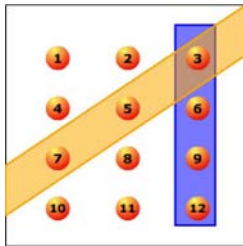
$$A = \text{"saír par"} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$B = \text{"múltiplo de 3"} = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$



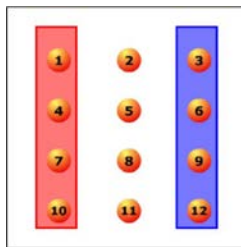
Sucesos compatibles



Cando sae 3 ocorren ambos os dous.

Sucesos incompatibles

Non ocorren á vez, pero non é necesario que sexan contrarios.



Sucesos compatibles e incompatibles

Nun experimento aleatorio hai sucesos que poden ocorrer á vez e sucesos que non.

- Dous sucesos dinse **compatibles** se teñen algún suceso elemental común. Neste caso $A \cap B \neq \emptyset$, poden ocorrer á vez.
- Dous sucesos dinse **incompatibles** se non teñen ningún suceso elemental común, neste caso $A \cap B = \emptyset$ e non poden ocorrer á vez.

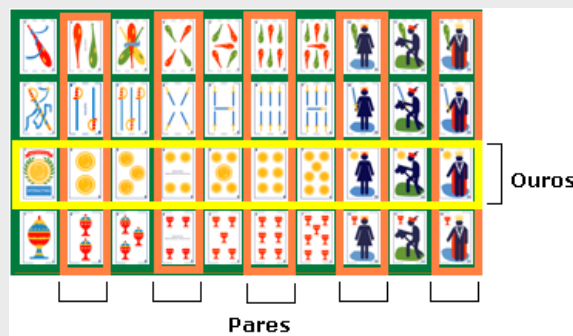
Un suceso e o seu contrario son sempre incompatibles, pero dous sucesos incompatibles non sempre son contrarios, como se pode ver no exemplo da esquerda.

EXERCICIOS resoltos

1. Nunha bolsa temos tres bólas numeradas como 1, 2 e 3. Consideramos o experimento de extraer unha bóla e anotar o seu número. Escribe todos os sucesos posibles. Indica cales deles son os elementais.

$\{\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}$ e $\{3\}$. Os tres últimos son os elementais.

2. Nunha baralla, baixo o experimento de extraer unha carta, considera os sucesos a) par, b) ouros, c) par e ouros, d) par ou ouros, e) par menos ouros, f) ouros menos par e g) non par



Observa a imaxe,

- a) hai 20 cartas rodeadas de laranxa, as pares,
- b) 10 ouros.
- c) O 2, 4, 6, 10 e 12 de ouros son pares.
- d) Todos os ouros e pares xuntos son 25 cartas (todas as rodeadas por amarelo ou laranxa)
- e) Aos 2, 4, 6, 10 e 12 hai que quitar o 2, 4, 6, 10 e 12 de ouros, a 20 cartas quítanlle 5 e quedan 15
- f) O 1, 3, 5, 7 e 11 de ouros.

3. Ao tirar un dado consideramos os sucesos: $A=\{\text{par}\}$, $B=\{\text{maior que } 3\}$, e $C=\{\text{impar}\}$. Dos tres pares de sucesos posibles AB, AC e BC, indica cales son compatibles e/ou incompatibles:

AB compatibles, cando saia o 4 ou o 6.

AC incompatibles, se é par non pode ser impar.

BC compatibles, cando saia o 5.

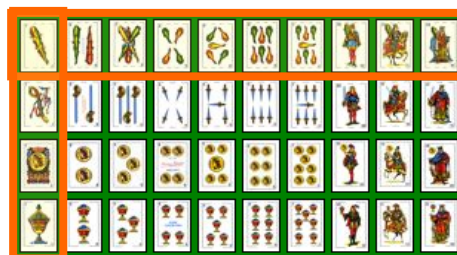
2. Probabilidade dun suceso

A regra de Laplace

Cando un experimento aleatorio é regular, é dicir que todos os sucesos elementais teñen a mesma probabilidade de ocorrer (dise que son **equiprobables**), para calcular a probabilidade dun suceso calquera A, abonda contar e facer o cociente entre o nº de sucesos elementais que compoñen A (**casos favorables**) e o nº de sucesos elementais do espazo da mostra (**casos posibles**).

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{casos favorables}}{\text{n}^\circ \text{casos posibles}}$$

Este resultado coñécese como **regra de Laplace**. Observa que para poder aplicala é necesario que todos os casos posibles sexan igualmente probables.



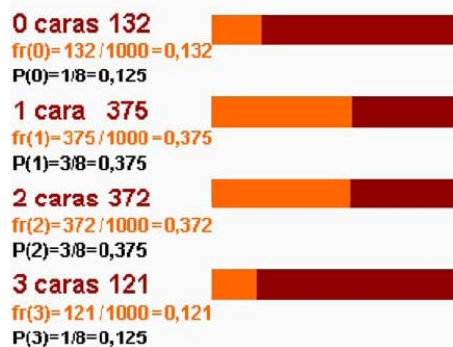
Extraemos unha carta dunha baralla de 40:

$$P(\text{bastos}) = 10/40 = 0,25$$

$$P(\text{as}) = 4/40 = 0,1$$

$$P(\text{as de bastos}) = 1/40 = 0,025$$

Resultados obtidos na simulación do lanzamento de tres moedas 1000 veces



Frecuencia e probabilidade

Coa regra de Laplace podemos calcular a probabilidade dun suceso en experimentos regulares, pero se a experiencia é irregular ou descoñecemos a probabilidade de cada un dos posibles resultados entón é preciso recorrer á **experimentación**.

Como sabes a **frecuencia absoluta** dun suceso é o número de veces que aparece cando se repite un experimento aleatorio, e a **frecuencia relativa** é a frecuencia absoluta dividida polo número de veces, n, que se repite o experimento aleatorio. Cando este número **n** é moi grande, a frecuencia relativa con que aparece un suceso tende a estabilizarse cara a un valor fixo. Este resultado, coñecido como **lei dos grandes números**, permite definir a probabilidade dun suceso como ese número cara ao que tende a frecuencia relativa ao repetir o experimento moitas veces.

EXEMPLO

Sospeitamos que un dado está trucado e entretémonos en tiralo 1000 veces e anotar os resultados, obtendo:

	1	2	3	4	5	6
F	203	297	146	154	98	102
Fr	0.2	0.3	0.15	0.15	0.1	0.1

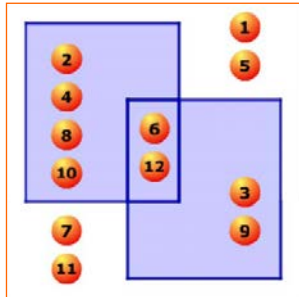
Concluiremos, $P(1)$, $P(2)$, ... xa non son $1/6$, senón aproximadamente $P(1)=0,2$; $P(2)=0,3$ etc. Aquí estaremos a usar a frecuencia relativa como probabilidade, a partir deste momento terémolo en conta ao xogar con ese dado.

A="par" B="múltiplo de 3"

$P(A)=6/12=1/2$ $P(B)=4/12=1/3$

$P(\bar{A})=1/2$ $p(\bar{B})=2/3$

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$



Propiedades da probabilidade

Vista a relación entre frecuencia relativa e probabilidade, cúmprese que:

- A probabilidade dun suceso é un número entre 0 e 1.
- A probabilidade do suceso seguro é 1 e a do suceso imposible 0.
- A probabilidade da unión de dous sucesos **incompatibles** A e B é $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

E destas dedúcese ademais que:

- A probabilidade do contrario é $p(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- A probabilidade da unión de dous sucesos compatibles é $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

EXERCICIOS resoltos

4. Temos un dado de 20 caras $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6\}$ perfectamente equilibrado

a) Cal é a probabilidade de obter cada un dos resultados posibles?

$P(1) = 1/20 = 0,05$ $P(2) = 2/20 = 0,1$ $P(3) = 3/20 = 0,15$
 $P(4) = 4/20 = 0,2$ $P(5) = 5/20 = 0,25$ $P(6) = 5/20 = 0,25$

b) $P(\text{par}) = 11/20 = 0,55$ Hai 2 douses, 4 catros e 5 seises: 11 pares

c) $P(\text{maior de 3}) = 14/20 = 0,70$ 14 posibles entre 20

d) $P(\text{par e maior de 3}) = 9/20 = 0,45$ O 4 e o 6 son pares e maiores de 3

e) $P(\text{par ou maior de 3}) = 19/20 = 0,95$ Se sae 2, 4, 5 ou 6

5. Nunha bolsa temos 7 bólas vermellas, 9 bólas azuis e 4 verdes. Extraemos unha bóla, calcula a probabilidade de que

a) Non sexa vermella $P(\bar{V}) = 13/20 = 0,65$. Hai 20 bólas, 7 vermellas, 13 non vermellas

b) Sexa vermella ou azul $P(VUA) = 16/20 = 0,8$ $7 + 9 = 16$ vermellas ou azuis

6. Nunha urna hai 40 bólas vermellas e azuis, non sabemos cantas de cada cor. Para descubri-lo extraemos unha bóla, miramos a cor e devolvémola á urna antes de sacar outra. Repetimos o experimento 1000 veces e obtemos 807 bólas vermellas e 193 bólas azuis. Cantas bólas de cada cor estimas que hai na urna?

$P(\text{vermella}) = 0,81$ $P(\text{azul}) = 0,19$ $0,81 \cdot 40 \approx 32$ vermellas $0,19 \cdot 40 \approx 8$ azuis

7. Nun grupo, o 40% xoga baloncesto e o 60% fútbol, sabendo que o 85% practica algún dos dous deportes, que porcentaxe xoga aos dous?

$P(F) = 0,60$ $P(B) = 0,40$ $P(F \cup B) = 0,85$

$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$

$0,85 = 0,60 + 0,40 - P(F \cap B)$ $P(F \cap B) = 0,15 = 15\%$



8. Nunha clase o 68% aproba Lingua e o 66% Matemáticas, se o 43% aprobou as dúas materias, que porcentaxe non aproba ningunha das dúas?

Aproba polo menos unha das dúas: $P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) = 0,68 + 0,61 - 0,43 = 0,86$
 Suspende as dúas é o suceso contrario deste, logo a súa probabilidade é $1 - 0,86 = 0,14$
 O 14% suspendeu as dúas materias.

3. Experimentos compostos

Regra da multiplicación

Un **experimento composto** é o que está formado por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva.

Para calcular o espazo da mostra dun experimento composto convén, en moitas ocasións, facer un diagrama de árbore que represente todas as opcións. Cada resultado vén dado por un camiño do diagrama. Observa no exemplo como construír un diagrama de árbore.

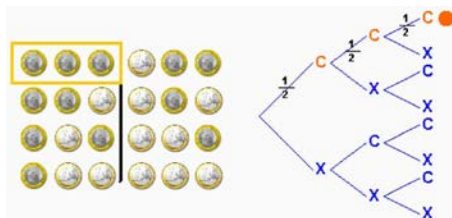
Se te fixas no exemplo anterior, ao indicar a probabilidade de cada rama do camiño, obtense a probabilidade de cada suceso composto calculando o produto dos respectivos sucesos simples.

Para calcular a probabilidade dun suceso nun experimento composto **multiplicanse** as probabilidades dos sucesos simples que o forman.

Extraccións con devolución e sen devolución

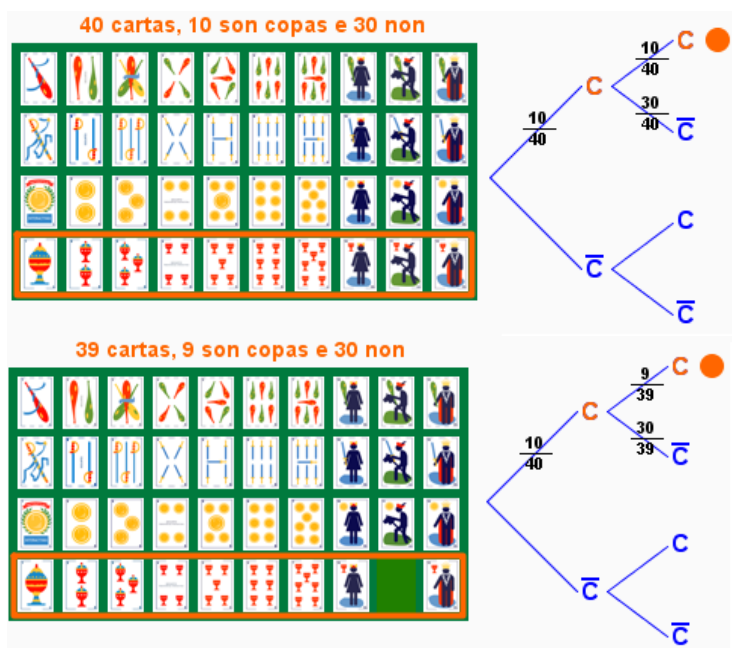
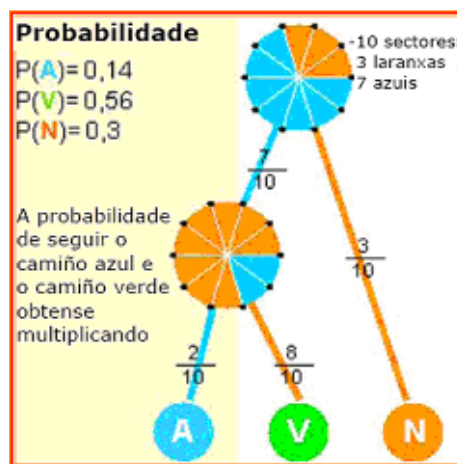
Un exemplo de experimento composto atopámolo na extracción sucesiva de cartas ou de bólas dunha urna,..., nestes casos hai que considerar se se devolve a carta, bóla, etc. antes de sacar a seguinte ou non.

Tiramos unha moeda tres veces seguidas, cal é a probabilidade de obter tres caras?



8 casos posibles A probabilidade de C 1 caso favorable en cada moeda 1/2

$$P(CCC) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$



Sacamos sucesivamente dúas cartas dunha baralla de 40, ¿cal é a probabilidade de que as dúas sexan de copas?

A probabilidade de que a primeira carta sexa de copas é 10/40.

Para a segunda a probabilidade depende de que devolvamos a primeira carta ao mazo ou non.

Con devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

Sen devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

$$P(B/A) = \frac{\text{Casos favorables de B ocorrendo A}}{\text{Casos posibles ocorrendo A}} = \frac{\text{Casos favorables de A e B}}{\text{Casos favorables de A}}$$

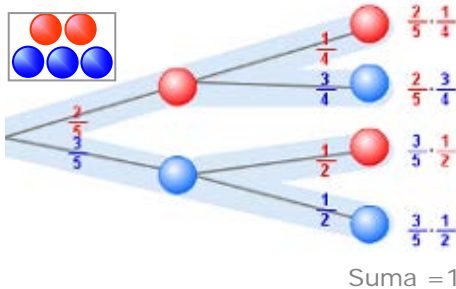
$$= \frac{\frac{\text{Casos favorables de A e B}}{\text{Casos favorables en total}}}{\frac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos favorables en total}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Nunha urna temos bólas vermellas e azuis numeradas como na figura. ¿Cal é a probabilidade de sacar cada número?

$$\begin{aligned} P(1) &= 3/8 && \text{1} \quad \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \\ P(2) &= 3/8 && \text{1} \quad \text{2} \quad \text{2} \quad \text{3} \\ P(3) &= 2/8 && \end{aligned}$$

Se sabemos que a bóla é vermella
 $P(1/R) = 2/4$ (de 4 vermellas hai 2 con 1)
 $P(1) < P(1/R)$ favorécense
 $P(2/R) = 1/4$ (de 4 vermellas hai 1 con 2)
 $P(2) > P(2/R)$ desfavorécense
 $P(3/R) = 1/4$ (de 4 vermellas hai 1 con 3)
 $P(3) = P(3/R)$ son independentes.

Nunha urna hai 2 bólas vermellas e 3 azuis, extraemos dúas bólas sen devolución.



Suma = 1

Probabilidade de que as dúas sexan vermellas:

$$P(R_1 R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

Probabilidade de que as dúas sexan azuis:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

Probabilidade de que sexan da mesma cor:

$$P(R_1 R_2 \cup A_1 A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$$

Probabilidade de que sexan de distinta cor:

$$P(R_1 A_2 \cup A_1 R_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5}$$

Probabilidade condicionada

Cando se realizan observacións de varios sucesos pode que un dependa do outro.

Os sucesos "o día está gris" e "levar paraugas" inflúen entre si. Os sucesos "estudar" e "aprobar", son sucesos que se favorecen; cando se estuda, aumenta a probabilidade de aprobar.

A probabilidade de que aconteza un suceso B cando está a ocorrer outro, A, chámase **condicionada**, e exprésase $p(B/A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dados dous sucesos, dise que son **independentes** se a presenza dun non inflúe na probabilidade do outro, é dicir, se $P(B/A) = P(B)$; no caso contrario son **dependentes**.

- ✓ A e B independentes: $P(B/A) = P(B)$ e ao ter en conta a fórmula anterior para $p(B/A)$,
- ✓ A e B independentes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Probabilidade con diagramas de árbore

Como puidiches ver, nos experimentos compostos pódese facer un diagrama en árbore, e cada resultado vén dado por un camiño ou rama desa árbore.

Para calcular unha probabilidade só hai que debuxar o camiño correspondente, e o produto das probabilidades de todas as ramas que o forman será o valor que buscamos.

Así se ocorre A e logo B:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Nun diagrama de árbore:

- ✓ A suma das probabilidades de todos os camiños é igual a 1
- ✓ A probabilidade dun suceso composto por varios camiños é a suma das probabilidades dos camiños respectivos.

EXERCICIOS resoltos

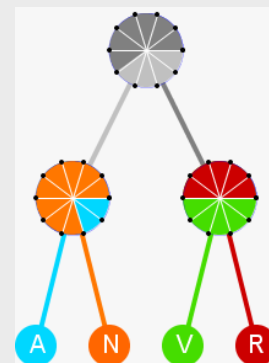
9. Nas ruletas da figura adxunta, calcula a probabilidade de cada un dos camiños.

$$P(\text{azul}) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$$

$$P(\text{laranja}) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32$$

$$P(\text{verde}) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,30$$

$$P(\text{vermello}) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,30$$



10. Lanzamos un dado de 4 caras $\{1,2,3,4\}$ e outro de 10 $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$. Cal é a probabilidade de obter dous 3?. E dous 4?

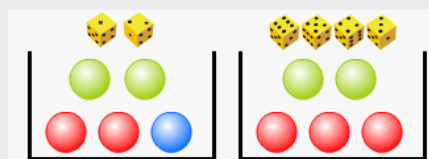
$$P(3 \text{ e } 3) = 1/4 \cdot 3/10 = 3/40 = 0,075$$

$$P(4 \text{ e } 4) = 1/4 \cdot 4/10 = 4/40 = 0,1$$

11. Lanzamos un dado, se sae 1 ou 2 sacamos unha bóla da urna A e se non da B, cal é a probabilidade de sacar a bóla azul?

A bóla azul está na urna A, para que saia tivo que saír antes no dado un 1 ou un 2.

$$P(A) = 1/3 \cdot 1/5 = 1/15$$



12. Nunha bolsa temos 5 bólas numeradas do 1 ao 5. Extraemos dúas bólas, a) Cal é a probabilidade de obter un 2 e un 3 se non devolvemos as bólas sacadas?. b) E cal se as devolvemos?

Sen devolución $P = 1/5 \cdot 1/4 = 0,05$

Con devolución $P = 1/5 \cdot 1/5 = 1/25 = 0,04$

13. Nunha caixa hai 6 bólas brancas e 4 bólas negras, que probabilidade hai de que ao extraer dúas bólas sexan as dúas brancas?. Faino sen devolución e con devolución.

a) Sen devolución: $P(BB) = 6/10 \cdot 5/9 = 30/90 = 1/3$

b) Con devolución: $P(BB) = 6/10 \cdot 6/10 = 36/100 = 18/50$

14. Nunha caixa hai 12 bólas de tres cores, vermellas, azuis e verdes. Están ocas e nalgunhas hai premio e noutras non. A distribución de premios e cores é a que se indica na táboa. Calcula as probabilidade seguintes e indica se os sucesos "premio" e "cor" son dependentes ou independentes en cada caso.

	●	●	●	TOTAL
CON PREMIO	1	1	2	4
SEN PREMIO	1	2	5	8
TOTAL	2	3	7	12

$$P(V) = 3/12 = 1/4$$

$$P(V \cap \text{premio}) = 1/12$$

$$P(\text{premio} / V) = 1/3$$

$$P(A) = 7/12$$

$$P(A \cap \text{premio}) = 2/12$$

$$P(\text{premio} / A) = 2/7$$

$$P(R) = 2/12 = 1/6$$

$$P(R \cap \text{premio}) = 1/12$$

$$P(\text{premio} / R) = 1/2$$

$P(\text{premio}) = 4/12 = 1/3$ Os sucesos "premio" e "verde" son independentes, mentres que "premio" e "vermella", "premio" e "azul" son dependentes.

15. Calcula a probabilidade de obter vermello nas ruletas da figura.

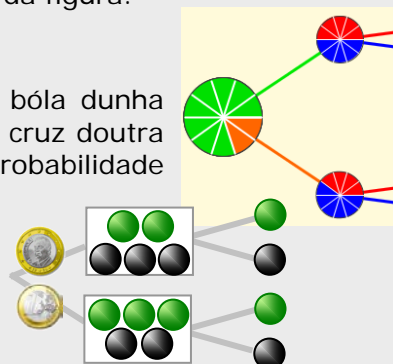
$$P(R) = 0,8 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,48$$

16. Lanzamos unha moeda, se sae cara sacamos unha bóla dunha urna con 2 bólas verdes e 3 bólas negras; se sae cruz doutra urna con 3 bólas verdes e 2 bólas negras. Calcula a probabilidade de que a bóla extraída sexa verde.

$$P(C \text{ e } V) = 1/2 \cdot 2/5 = 1/5 = 0,2$$

$$P(X \text{ e } V) = 1/2 \cdot 3/5 = 3/10 = 0,3$$

$$P(V) = 0,2 + 0,3 = 0,5$$





Para practicar

1. Lanzamos un dado de doce caras e anotamos o número da cara superior. Describe os sucesos:

A= "Sacar un n° par"

B= "Sacar un número maior que 6"

C= "Sacar un número menor que 3"

D= "Sacar múltiplo de 3"

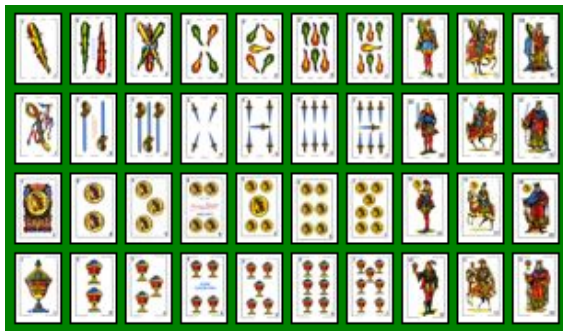
Sinala que parellas destes sucesos son incompatibles.

2. Eliximos unha ficha de dominó ao chou, describe os sucesos: A= "A suma dos puntos é maior que 7"; B= "A suma dos puntos é múltiplo de 5".
Escribe $A \cap B$ e $A \cap \bar{B}$.

3. No experimento de sacar unha carta dunha baralla española, considera os sucesos:

A= "Sacar unha figura", B= "Sacar copas"

Obtén os sucesos: $A \cap B$ e $\bar{A} \cap B$



4. Na escola municipal dun pobo hai clases para deportes de equipo de baloncesto, fútbol e voleibol. Hai 100 inscritos en deportes de equipo, 70 van a clases de fútbol, 60 de baloncesto e 40 a fútbol e baloncesto. Cantos van só a voleibol?

5. Cun diagrama de árbore constrúe o espazo da mostra do experimento de lanzar 4 moedas. Considera os sucesos:

A= "Saír unha cara"

B= "Saír polo menos dúas cruces"

Escribe $A \cup B$, $A \cap B$ e o suceso contrario de B.

6. Dun xogo de dominó quitamos todas as fichas dobres, logo sacamos unha ficha ao chou, calcula a probabilidade de que a suma dos puntos sexa múltiplo de 5.

7. Formamos todos os números posibles de tres cifras co 3, o 5 e o 6, repetidas ou non. Eliximos un deses números ao chou, calcula a probabilidade de que remate en 5.

8. Nunha caixa hai 3 bólas vermellas, 3 bólas verdes e 2 azuis; noutra caixa hai 2 bólas vermellas, 3 verdes e 2 azuis. En que caixa é maior a probabilidade de extraer unha bóla azul?

9. Elixese ao chou un número do 1 ao 30. Calcula a probabilidade de elixir:

- a) un n° maior que 3 e menor que 17
b) un múltiplo de 3

10. Enriba da mesa temos as dúas cartas que aparecen debaixo, sacamos outra carta, calcula a probabilidade de que sexa de ouros.



11. Para corrixir un exame de probabilidade un profesor benévolo decidiu facelo do seguinte xeito:

Tira dous dados e fíxase na maior das puntuacións obtidas, se é menor que 4 pon Insuficiente e nos outros casos Suficiente.

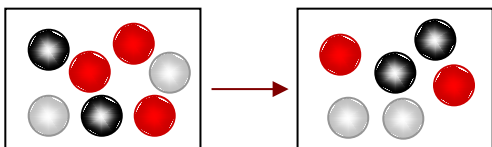
Con este método, que probabilidade hai de aprobar?

12. A probabilidade dun suceso A é 0,15, cal é a probabilidade do suceso contrario?.
13. Un dado está trucado de forma que as caras con número impar teñen tripla probabilidade de saír que as caras con número par. Calcula a probabilidade de cada unha das caras e a de sacar número impar.
14. A probabilidade dun suceso A é 0,14 e a doutro B é 0,39. Se a probabilidade de que acontezan os dous á vez é 0,13. Calcula a probabilidade de que non aconteza ningún dos dous.
15. Considera dous sucesos A e B dun experimento aleatorio con $P(A)=0,16$ e $P(A \cup B)=0,65$; $P(A \cap B)=0,02$; calcula a probabilidade de $A-B$ e de $B-A$.
16. Nunha urna hai bólas brancas, vermellas e negras, pero non sabemos cantas nin en que proporción. En 1000 extraccións, devolvendo a bóla cada vez, obtívose bóla branca 223 veces, vermella 320 veces e negra 457 veces. Ao facer unha nova extracción, que probabilidade hai de sacar unha bóla vermella?. Se na urna hai 23 bólas, cantas estimas que haberá de cada cor?
17. Nunha caixa hai 3 bólas vermellas, 2 bólas brancas e 2 bólas negras. Extráense dúas bólas, calcula a probabilidade de que as dúas sexan da mesma cor se a extracción se fai:
a) con devolución.
b) sen devolución.
18. Nunha caixa, A, hai 3 bólas vermellas, 2 bólas brancas e 2 negras, noutra caixa, B, hai 2 bólas de cada cor. Extráese unha bóla da caixa A e ponse na B, despois sácase unha bóla de B. Calcula a probabilidade de que esta última bóla sexa negra.
19. Nunha caixa, A, hai 2 bólas vermellas, 3 brancas e 3 negras, noutra caixa, B, hai 2 bólas de cada cor, vermella, branca, negra. Tírase un dado, se sae un número maior que 4, sácase unha bóla da urna A e se non da B. Calcula a probabilidade de que a bóla sexa vermella.
20. Dunha baralla española de 40 cartas, extráense dúas cartas sen devolución, calcula a probabilidade de que
a) as dúas sexan do mesmo pau.
b) unha sexa de ouros e outra de copas.
21. Nun instituto hai 450 estudantes, dos que 290 son rapaces e o resto rapazas. O 20% dos rapaces e o 10% das rapazas leva lentes. Elixido un estudante ao chou, cal é a probabilidade de que non leve lentes?
22. Levo nun peto 6 moedas de 10 céntimos, 2 de 20 céntimos e 2 de 1 €. Saco dúas moedas ao chou, que probabilidade hai de que:
a) as dúas sexan de 1 euro
b) saque 1,10 euros.
23. Nunha empresa traballan 190 homes e 130 mulleres. Hai 19 homes e 26 mulleres que son fumadores. Elixida unha persoa desa empresa ao chou, calcula a probabilidade de que:
a) sexa unha muller fumadora.
b) sexa unha muller sabendo que fuma.

AXUDA: Completa a táboa

	FUMA	NON FUMA	
HOMES	19		190
MULLERES	26		130
TOTAL			

24. Un xogador de baloncesto adoita encestar o 80% dos seus tiros dende o punto de lanzamento de persoais. Se tira tres veces, calcula a probabilidade de que:
a) enceste dous veces.
b) non enceste ningunha vez.



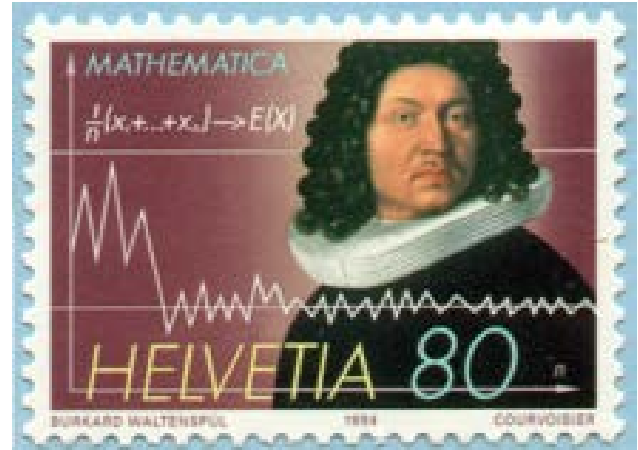
Para saber máis



Un pouco de historia

A probabilidade naceu en torno aos xogos de azar. Nas civilizacións antigas (Exipto, Grecia, Roma) usábase un óso a xeito de dado para diversos xogos onde interviña o azar (de aí provén un xogo tradicional: as *tabas*). Pero mesmo restos arqueolóxicos de fai mais de 40.000 anos interpretáronse como elementos de xogos de azar.

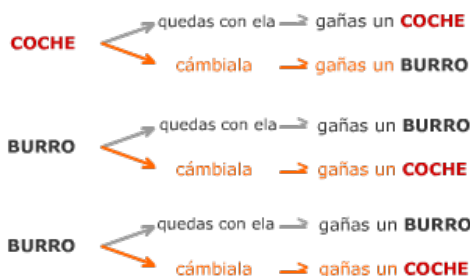
En Grecia e Roma practicábanse con verdadeiro celo e paixón. Homero (900 a. C.) conta que cando Patroclo era pequeno, se enfadou tanto cun opoñente xogando co astrágalo que case o matou.



- Foi Girolamo Cardano (1501-1576) quen en 1565, escribiu a primeira obra importante relacionada co cálculo de probabilidades nos xogos de azar. Chamábase *Libro dos xogos de azar*.
- Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), o reverendo Thomas Bayes (1702-1761) e Joseph Lagrange (1736-1813) desenvolveron fórmulas e técnicas para o cálculo da probabilidade. No século XIX, Pierre Simon, marqués de Laplace (1749 - 1827), unificou todas estas primeiras ideas e compilou a primeira teoría xeral da probabilidade.
- A probabilidade seguiu evolucionando con matemáticos como Poisson (1781-1840), P.Chebyshev (1821-1894), Émile Borel (1871-1956), A. Markov (1856-1922), e creando escola para superar estancamentos, Andrei N. Kolmogorov da escola rusa, (1903-1987), Norther Wiener (1894-1964) da americana. Na actualidade estatística e a probabilidade únense e desenvólense xuntas.



1º) Elixes unha porta cun: 2º) Abren unha porta que ten detrás un burro.
3º) Quedas coa primeira opción ou cámbiala?



Este problema chamado de **Monty Hall** está inspirado no concurso televisivo estadounidense "*Let 's Make a Deal*" (*Fagamos un trato*), famoso entre 1963 e 1986. O seu nome provén do presentador de este, **Monty Hall**.

Se xogaches bastantes veces comprobarías quizais con certa sorpresa que a probabilidade de gañar un coche cambiando a primeira elección, é superior á probabilidade de gañalo sen cambiar de porta.

Observando o diagrama de árbore ou aplicando o que xa sabes sobre probabilidade condicionada verás que:

- $P(\text{coche}/\text{con cambio}) = 2/3$
- $P(\text{coche}/\text{sen cambio}) = 1/3$



Lembra o máis importante

Experimentos aleatorios

Non pode predicirse o resultado por moito que o experimentemos.

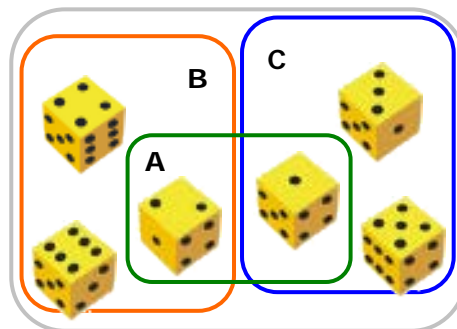


Por exemplo, lanzar un dado.

- Espazo da mostra $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Sucesos elementais: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ e $\{6\}$
- Outros **sucesos**: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$
- Suceso **seguro**: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Suceso **imposible**: $\emptyset = \{ \}$
- Suceso **contrario** de A: $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

Sucesos **compatibles**: Son os que poden ocorrer á vez, como A e B ou A e C.

Sucesos **incompatibles**: Se non poden ocorrer á vez, como par e impar, B e C.



Operacións con sucesos

Unión: $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$

Intersección: $A \cap B = \{2\}$

Diferenza: $A - B = \{1\}$

Probabilidade de sucesos

$P(\text{Suceso seguro}) = P(E) = 1$

$P(\text{Suceso imposible}) = P(\emptyset) = 0$

$0 \leq P(\text{suceso}) \leq 1$

Probabilidade da unión:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A e B son incompatibles

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ A e B compatibles.

Regra de Laplace

Cando os sucesos elementais son equiprobables:

$$P = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}$$

Se o experimento non é regular recórrese á experimentación, tomando como probabilidade a frecuencia relativa ao repetir o experimento moitas veces.

Experimentos compostos

Están formados por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva. Para calcular a probabilidade multiplícanse as dos sucesos simples que o forman.

En sucesos consecutivos poden producirse dúas situacións:

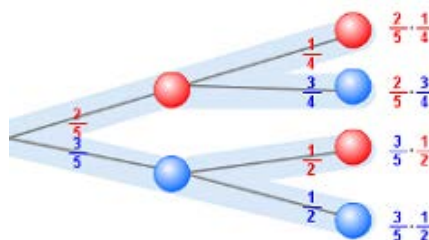
- 1) **Independentes**, non inflúen no outro.
Como nas extraccións con devolución.
- 2) **Dependentes**, cada suceso está condicionado polo anterior
Como nas extraccións sen devolución.

Cun diagrama de árbore é doado calcular a probabilidade dun experimento composto:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Probabilidade condicionada

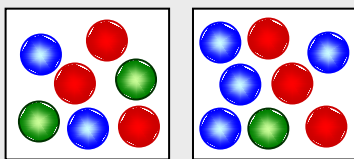
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Autoavaliación



1. Escribimos cada unha das letras da palabra ENSINO nun papel e sacamos unha ao chou. Escribe o suceso "saír vocal"
2. Unha moeda está trucada de maneira que a probabilidade de saír cruz é dobre que a probabilidade de saír cara, que probabilidade hai de sacar cara?
3. Nunha bolsa hai 100 bólas numeradas do 0 ao 99, extráese unha bóla. Calcula a probabilidade de que nas súas cifras non estea o 9.
4. Elíxese unha ficha de dominó, considera os sucesos A ="saír unha ficha dobre", B ="a suma dos puntos é múltiplo de 4". Cal é a probabilidade de $A \cup B$?
5. Se A e B son dous sucesos tales que $P(A)=0,42$; $P(B)=0,30$ e $P(A \cap B)=0,12$. Calcula a probabilidade de que non aconteza nin A nin B .
6. Lánzase unha moeda e un dado, calcula a probabilidade de que saia "cara" e "número impar"
7. Temos dúas urnas con bólas vermellas, verdes e azuis, como na figura. Sacamos unha bóla de cada urna, calcula a probabilidade de que ambas sexan vermellas.
8. Os resultados dun exame realizado por dous grupos de 4º ESO móstranse na táboa da esquerda. Elíxese un estudante ao chou, calcula a probabilidade de que sexa do grupo A se sabemos que aprobou.
9. Teño nun caixón 6 calcetíns de cor branca e 14 de cor negra. Se collo dous calcetíns sen mirar, que probabilidade hai de que sexan da mesma cor?
10. Sácanse dúas cartas dunha baralla de 40, unha tras outra. Se a extracción se fai con devolución, calcula a probabilidade de que unha sexa copas e outra de bastos.



	aproban	suspenden
4ºA	14	7
4ºB	15	14

Soluciones dos ejercicios para practicar

- $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 $C = \{1, 2\}$
 $D = \{3, 6, 9, 12\}$
Incompatibles B e C, C e D
- $A = \{2-6, 3-5, 3-6, 4-4, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6\}$
 $B = \{0-5, 1-4, 2-3, 4-6, 5-5\}$
 $A \cap B = \{4-6, 5-5\}$
 $A \cap \bar{B} = \{2-6, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 5-6, 6-6\}$
- $A \cap B = \{10C, 11C, 12C\}$
 $\bar{A} \cap B = \{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C\}$
- $A \cup B = B$
 $A \cap B = A$
 $\bar{B} = \{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC\}$
- $4/21 = 0,19$
- $9/27 = 1/3$
- Na segunda (2/7)
- a) 13/30 b) 9/30
- 9/38
- $27/36 = 0,75$
- 0,85
- $P(1) = P(3) = P(5) = 3/12$
 $P(2) = P(4) = P(6) = 1/12$
 $P(\text{impar}) = 3 \cdot 3/12 = 9/12$
- $P(\text{nin A nin B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,40 = 0,60$
- $P(A - B) = 0,14$
 $P(B - A) = 0,49$
- $P(\text{vermella}) \approx 0,32$
5 brancas, 7 vermellas, 11 negras.
- a) 17/49 b) 10/42
- 16/49
- 22/72
- a) 9/39 b) 5/78
- 0,84
- a) 2/90 b) 4/15
- a) $P(M \cap F) = 26/320$
b) $P(M/F) = 26/45$
- a) $3 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,384$
b) $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$

Soluciones AUTOAVALIACIÓN

- {A, E}
- 1/3
- $481/100 = 0,81$
- 11/28
- $1 - 0,60 = 0,40$
- $1/4 = 0,25$
- 9/56
- 14/29
- 53/95
- 1/8