4

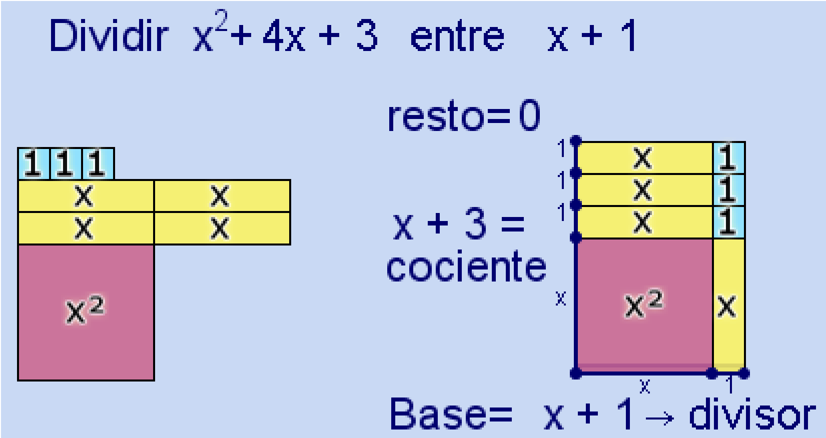
Polinomios

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás:

- A traballar con expresións literais para a obtención de valores concretos en fórmulas e ecuacións en diferentes contextos.
- A regra de Ruffini.
- O teorema do resto.
- A recoñecer os polinomios con coeficientes reais irredutibles.
- A factorizar polinomios con raíces enteiras.

Antes de empezar

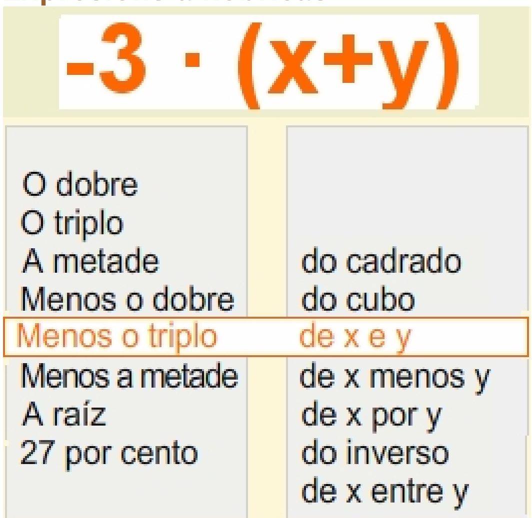


Para dividir x^2+4x+3 entre $x+1$ tomamos pezas: unha de área x^2 catro de área x tres de área 1. E formamos con elas o rectángulo maior posible que teña de base $x+1$.

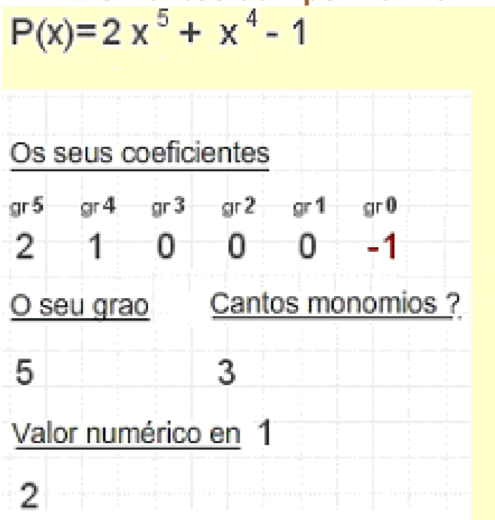
Na figura vemos que $x^2+4x+3=(x+1)\cdot(x+3)$.

Propómosche un repaso dalgunhas das cousas aprendidas nos cursos anteriores:

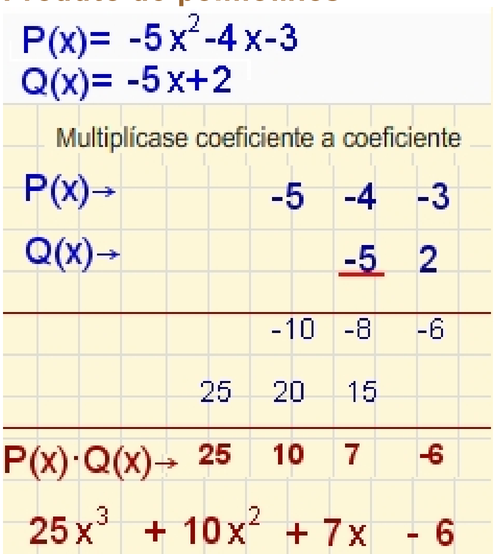
Expresións alxébricas



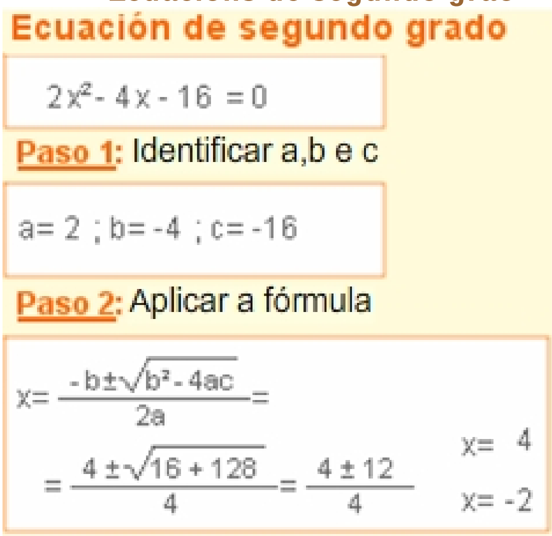
Elementos dun polinomio



Produto de polinomios



Ecuacións de segundo grao

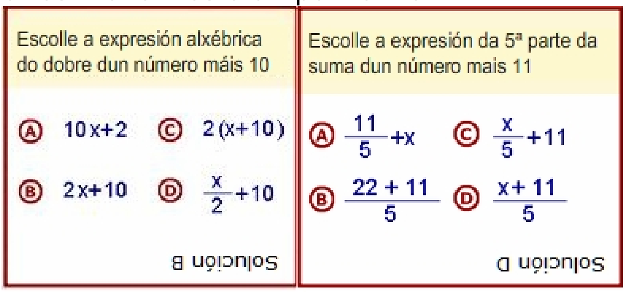


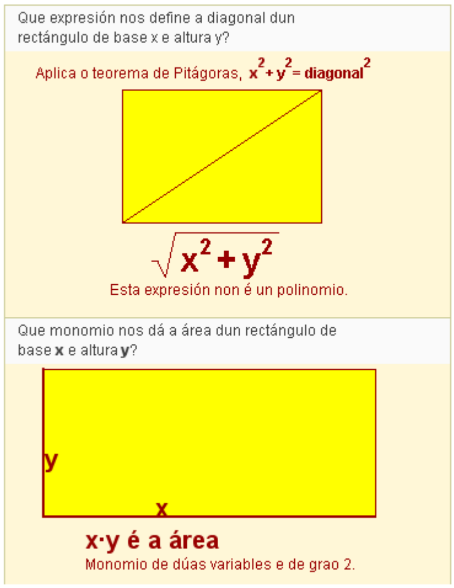
1. Expresións alxébricas

Transformar enunciados en expresións

Son moitas as situacións nas que se utilizan expresións alxébricas, na dereita preséntanse algunhas.

Cando a expresión alxébrica é destes tipos:
$3xy^2$; $2x^{10}$; $3/4 \cdot x^2 \cdot y^5$
só con produtos de números e potencias de variables de expoñente natural, denomínase monomio. A suma de varios monomios é un polinomio.





Valor numérico

Se nunha expresión alxébrica substituímos as letras (variables) por números, o que teremos será unha expresión numérica. O resultado desta expresión é o que chamamos valor numérico da expresión alxébrica para eses valores das variables.

Observa os exemplos da escena da dereita.

> É importante que teñas en conta a **prioridade das operacións**
>
> 1. Potencias
> 2. Produtos e cocientes
> 3. Sumas e restas

$2 - 6 \cdot x^3$ valor en 3

$2 - 6 \cdot 3^3$

$2 - 6 \cdot 27$

$2 - 162$

-160

$4 + 2 \cdot x^2$ valor en $\frac{-5}{7}$

$4 + 2 \cdot \left(\frac{-5}{7}\right)^2$

$4 + 2 \cdot \frac{25}{49}$

$4 + \frac{50}{49}$

$\frac{246}{49}$

Coa calculadora

Podes utilizar a calculadora para achar o valor numérico dun polinomio. Lembra que para realizar a potencia 7^4 utilízase a tecla $\boxed{x^y}$,

$7 \boxed{x^y} 4 \boxed{=} \rightarrow 2041$

Polinomios. Expresión en coeficientes

Os polinomios son expresións alxébricas nas que as partes literais non levan por expoñentes números negativos ou fraccións, os coeficientes poden levar raíces e pódese dividir por números, pero nos polinomios non aparece un literal dividindo nin dentro dunha raíz.

É moi conveniente que lembres a maneira de expresar un polinomio polos seus coeficientes, tal e como se explica na imaxe da dereita.

Non esquezas poñer un cero no coeficiente cando no polinomio falta a potencia dun grao, así en

$2x^3+x+5$ escribimos 2 0 1 5.

A golpe de vista e sen pasos intermedios debes saber ver a expresión en coeficientes dun polinomio.

$4x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$4x^3 + 4x^2 - 3x^1 + 2x^0$

4 4 -3 2

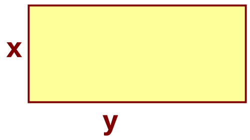
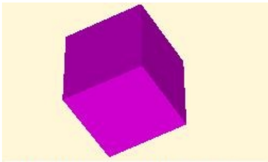
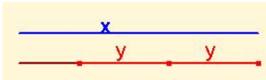
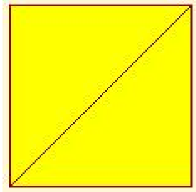
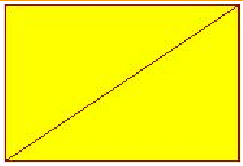
$-2x^4 - x^3 + 4x$

$-2x^4 - 1x^3 + 0x^2 + 4x^1 + 0x^0$

-2 -1 0 4 0

EXERCICIOS resoltos

1. Acha as expresións alxébricas asociadas a cada imaxe

Área do rectángulo 	 Volume, aresta = x	Lonxitude do segmento castaño 	Que polinomio expresa a **media aritmética de** dous números **x, y**
O triplo dun número menos cinco	A suma dos cadrados de dous números	 A diagonal dun cadrado de lado x	 A diagonal dun rectángulo de base x e altura y

Solucións

$x \cdot y$ Polinomio de grao 2 e dúas variables	x^3 Monomio de grao 3	x-2y Polinomio de grao1 Dúas variables	0,5x+0,5y Polinomio de grao1 Dúas variables
3x-5 Polinomio de grao 1 unha variable	x^2+y^2	$\sqrt{2} \cdot x$	$\sqrt{x^2+y^2}$

2. Escolle a expresión alxébrica en cada caso

1 O triplo dun número máis seis A $6x+3$ B $3x+6$ C $3(x+6)$ D $\frac{x}{3}+6$	2 A quinta parte dun nº máis 10. A $\frac{x}{5}+10$ B $\frac{x+10}{5}$ C $10x+5$ D $5x+10$	3 Un cuarto da suma dun nº máis 7. A $\frac{x+7}{4}$ B $\frac{x}{4}+7$ C $\frac{14+7}{4}$ D $\frac{7}{4}+x$	4 A semisuma de dous números. A $\frac{x \cdot y}{2}$ B $\frac{x+y}{2}$ C $\frac{x}{2}+y$ D $\frac{x-y}{2}$	5 A metade do produto de 2 n^{os}. A $\frac{x}{2} \cdot y$ B $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2}$ C $\frac{x-y}{2}$ D $\frac{x \cdot 7}{2}$
6 A raíz cadrada da suma de 2 cadrados. A $x+y$ B x^2+y^2 C $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$ D $\sqrt{x^2+y^2}$	7 O 40% dun número. A $0.4\ x$ B $\frac{40}{100\ x}$ C $\frac{40}{10}x$ D $\frac{100\ x}{40}$	8 O cadrado da suma de 2 números. A $(z+y)^2$ B x^2+y^2 C $x+y^2$ D $(12+y)^2$	9 O cadrado da semisuma de 2 números. A $\frac{x^2+y^2}{4}$ B $\frac{x+y^2}{2}$ C $\frac{(x+y)^2}{4}$ D $\frac{(x+y)^2}{2}$	10 A media aritmética de tres números A $0.5x+0.5y+0.5z$ B $\left(\frac{x+y}{2}+z\right)/2$ C $\frac{x+y+z}{3}$ D $\frac{x+y+z}{2}$

Solucións: 1 B; 2 A; 3 A; 4 B; 5 A; 6 D; 7 A; 8 A; 9 C; 10 C.

EXERCICIOS resoltos

3. Acha os valores numéricos indicados en cada caso.

$2-7\cdot x^5$ en (-2)	$3+5\cdot x^3$ en $\frac{2}{3}$	$3\sqrt{x}-3\cdot x^3$ en 9	$\frac{x^5}{y^3}+4$ en $x=-2$, $y=3$	$\frac{x^5}{y^4}+1$ en $x=4$, $y=4$
$2-7\cdot(-2)^5$	$3+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$3\sqrt{9}-3\cdot 9^3$	$\frac{(-2)^5}{3^3}+4$	$\frac{4^5}{4^4}+1$
$2-7\cdot -32$	$3+5\cdot\frac{8}{27}$	$3\cdot 3-3\cdot 729$	$\frac{-32}{27}+4$	4^1+1
$2+224$	$3+\frac{40}{27}$	$9-2187$		$4+1$
226	$\frac{121}{27}$	-2178	$\frac{76}{27}$	5

4. Valor numérico en -3

$2\cdot x^2+5\cdot x+6$	Substitúe x por (-3)
$2\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)+6$	Realiza a potencia de (-3)
$2\cdot 9+5\cdot(-3)+6$	Efectúa os produtos
$18+(-15)+6$	Opera
9	Este é o valor do polinomio para x=-3

5. Valor numérico en 0.1

$3\cdot x^2+7\cdot x+2$	Substitúe x por 0.1
$3\cdot 0.1^2+7\cdot 0.1+2$	Efectúa as potencias
$3\cdot 0.01+7\cdot 0.1+2$	Realiza os produtos
$0.03+0.7+2$	Escribe o resultado
2.73	

6.

x^3+4x-2

Cal é o grao do polinomio?

Escribe os coeficientes nos recuadros.

Solución: grao 3.

Coeficientes: 1 0 4 -2

$x^4-2x^3-x^2-2x$

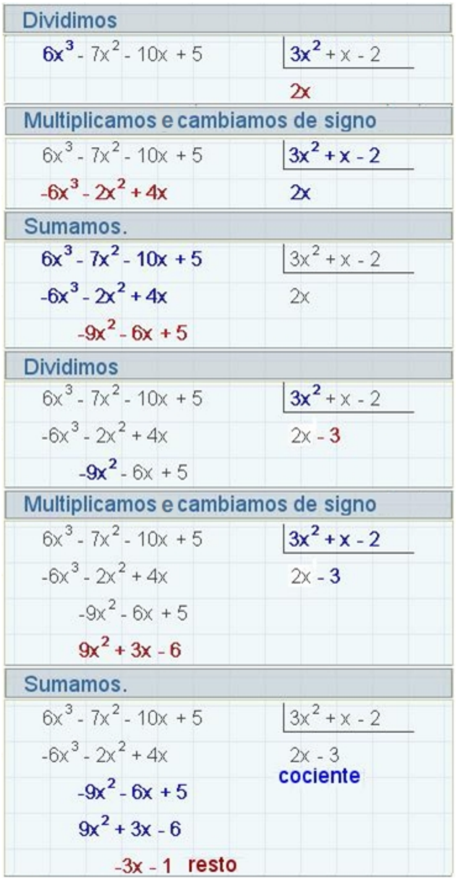
Cal é o grao do polinomio?

Escribe os coeficientes nos recuadros.

Solución: grao 4.

Coeficientes: 1 -2 -1 -2 0

2. División de polinomios



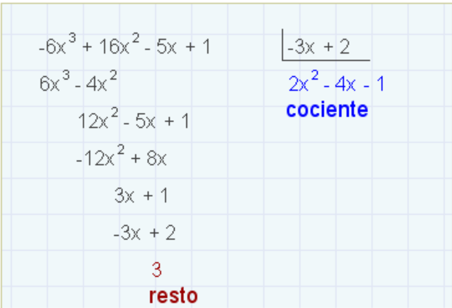
División

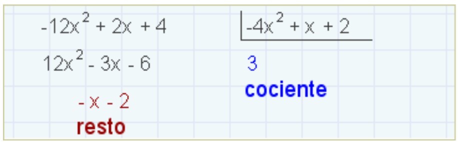
Para realizar a división **divídense** os monomios de maior grao, **multiplícase**, cámbiase de signo, e **súmase.** Este proceso repítese ata obter un resto de grao menor que o do divisor.

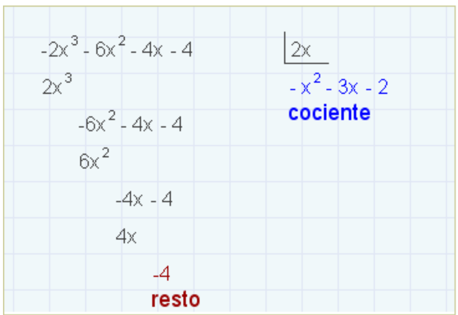
A división de polinomios debe cumprir estas dúas condicións:

> **Dividendo=divisor·cociente+resto**
> **gr(resto)<gr(divisor)**

O grao do cociente é a diferenza dos graos do Dividendo e do divisor. Cando o resto é cero, dise que o dividendo é divisible entre o divisor.

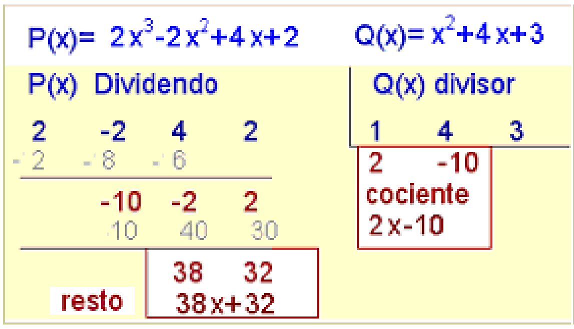


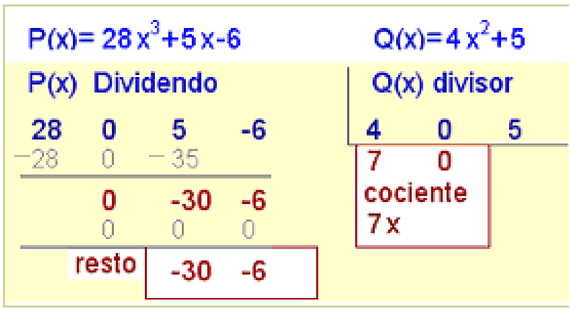


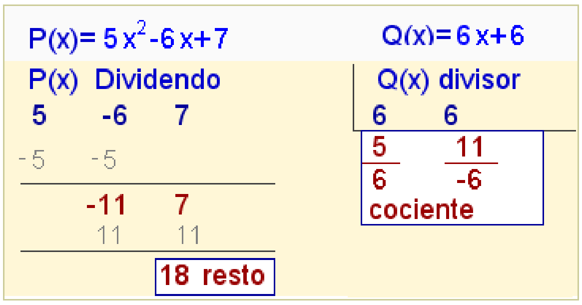


División por coeficientes

A continuación vese unha división de polinomios coa expresión en coeficientes, algunhas veces pode ser conveniente este método ou simplemente será cuestión de preferencias escoller un método ou outro.







Regra de Ruffini

A regra de Ruffini é útil para dividir polinomios entre x-a.

No exemplo da dereita divídese $3x^3-5x^2+1$ entre x-2, obtendo de cociente $3x^2+x+2$ e de resto 5.

A regra explicada para **a=2**, vale tamén cando **a** é un número racional ou real, no seguinte exemplo tómase **a=-3/2** e representa a división de $4x^2+5x+2$ entre x+3/2

	4	5	2
-3/2		-6	3/2
	4	**-1**	**7/2 resto**

cociente

4x-1

Teorema do resto

Ao dividir un polinomio P(x) por (x-a) o resto é sempre de grao cero e obtense un cociente C(x) que verifica:

$$P(x)=(x-a)\cdot C(x)+\text{resto}$$

Si substituímos agora o x por a,

$$P(a) = (a-a)\cdot C(a) + \text{resto}$$

Na igualdade anterior (a-a)=0, por tanto,

valor numérico de P en a = resto

Este resultado coñécese como **teorema do resto**

Así o valor numérico P(x) en a será cero cando P(x) sexa divisible por (x-a), é dicir, o resto de P(x) entre x-a é cero, neste caso dicimos que **a é raíz** do polinomio P(x).

Lembra

a é raíz de P(x) ⇔ P(x)=(x-a)·C(x) ⇔ P(a)=0

O teorema pódese aplicar para calcular algúns valores numéricos.

$P(x) = x^3 + 15x^2 + 12x + 4$

Achar $P(-14) = (-14)^3 + 15\cdot(-14)^2 + 12\cdot(-14) + 1$

	1	15	12	4
-14		-14	-14	28
	1	1	-2	32

Tamén se utiliza para resolver problemas como o seguinte, achar m para que o polinomio

$$P(x)=x^3+mx-4$$

sexa divisible por x-2, que se resolve substituíndo o x por 2, igualando a 0 e despexando m, así m=-2.

Observa a división e como se realiza a Regra de Ruffini paso a paso

3	-5	0	1	1	-2
-3	6			3	1 2
	1	0		cociente	
	-1	2			
		2	1		
		-2	4		
			5 resto		

Regra de Ruffini

	3	-5	0	1
2	↓			
	3			

	3	-5	0	1
2		6		
	3			

Multiplícanse

	3	-5	0	1
2		6		
	3	1		

Súmanse

	3	-5	0	1
2		6	2	
	3	1		

Multiplícanse

	3	-5	0	1
2		6	2	
	3	1	2	

Súmanse

Vólvese multiplicar e sumar obtendo

	3	-5	0	1
2		6	2	4
	3	1	2	5 resto

cociente

Coa calculadora

Para calcular o valor numérico dun polinomio coa calculadora, valor de $P(x)= 3x^3-5x^2+1$ en x=2

Podemos aplicar a regra de Ruffini, para elo teclea a seguinte secuencia:

2 M in x 3 → 3

-5 = → 1

x MR + 0 = → 2

x MR + 1 = 5

Obtemos: 5 que é o resto de dividir P(x) para x-2 y el valor numérico en x=2.

De paso foron saíndo os coeficientes do cociente cada vez que se pulsaba =.

EXERCICIOS resoltos

7. Acha o cociente e o resto da división de P(x) entre Q(x) en cada caso

a) $P(x)=3x^2-11x-13$ $Q(x)=x^2-3x-4$ b) $P(x)=-9x^3-15x^2+8x+16$ $Q(x)=3x+4$

Sol. Cociente = 3 Resto = -2x-1 Sol. Cociente= $-3x^2-x+4$ Resto=0

8. Aplica a regra de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ y $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre x-3

	1	5	-2	1
3)		3	24	66
	1	8	22	67

Cociente $x^2+8x+22$

Resto 67

	2	0	0	0	-5
3)		6	18	54	162
	2	6	18	54	157

Cociente $2x^3+6x^2+18x+54$

Resto 157

	1	3	-4	0
3)		3	18	42
	1	6	14	42

Cociente $x^2+6x+14$

Resto 42

9. Aplica a regra de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ e $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre x+1

	1	3	-2	1
-1)		-1	-2	4
	1	2	-4	5

Cociente x^2+2x-4

Resto 5

	1	0	0	0	-2
-1)		-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1

Cociente x^3-x^2+x-1

Resto -1

	1	-4	-1	0
-1)		-1	5	-4
	1	-5	4	-4

Cociente x^2-5x+4

Resto –4

10. Se o valor numérico dun polinomio en 2 é igual a 3 e o cociente da súa división entre x-2 é x. Sabes de que polinomio se trata?

Dividendo = divisor·cociente +resto, o divisor é x-2, o cociente x e o resto 3, polo tanto o polinomio é x^2-2x+3

11. Acha m para que mx^2+2x-3 sexa divisible entre x+1

O polinomio será divisible entre x+1 se o seu valor en -1 é 0, logo ten que ser

m-2-3=0, é dicir, m=5

12. Aplica o Teorema do resto e a regra de Ruffini para achar o valor numérico de $P(x)=x^3-15x^2+24x-3$ en x=13

Aplicando a regra de Ruffini por x-13 dá de resto –29, que é o valor numérico pedido.

13. Existe algún valor de m para que o polinomio $x^3+mx^2-2mx+5$ sexa divisible por x-2?

Polo teorema do resto basta resolver a ecuación $2^3+m\cdot2^2-2m\cdot2+5=0$, o que dá unha igualdade imposible 13=0, polo tanto non hai ningún valor de m para o que o polinomio sexa divisible por x-2

3. Descomposición factorial

Sacar factor común unha potencia de x

Ao descompor un polinomio en factores o primeiro que teremos que observar é se se pode sacar factor común de todos os sumandos algunha potencia de x.

Isto será posible só cando o coeficiente de grao cero do polinomio sexa nulo.

Na parte inferior podes practicar esta extracción.

Tamén é interesante que busques, se é posible o m.c.d. dos coeficientes e o saques como factor, así en:

$$6x^5+15x^2$$

pódese sacar factor común $3x^2$,

$$6x^5+15x^2=\mathbf{3}x^2(2x^3+5)$$

$$2\boxed{x^9}+\boxed{x^6}-3x^4=$$
$$=2\cdot\boxed{x^4\cdot x^5}+\boxed{x^4\cdot x^2}-3\cdot x^4$$

x^4 está en todos os sumandos.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=\ x^4\cdot(2x^5+x^2-3)$$

Sacouse factor común unha potencia de x.

Polinomios de 2º grao

Lembra a fórmula para resolver a ecuación de 2º grao $ax^2+bx+c=0$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A b^2-4ac chámaselle discriminante da ecuación e adóitase designar por Δ.

Isto determina a descomposición factorial dos polinomios de 2º grao:

As solucións de $2x^2-8x+6=0$ son 1 e 3, logo $2x^2-8x+6=2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$, discriminante positivo.

As solucións de $3x^2-6x+3=0$ son 1 e 1, logo $3x^2-6x+3=3\cdot(x-1)^2$, $\Delta=0$.

As solucións de $2x^2+6=0$ no son reais, b^2-4ac é negativo, $2x^2+6$ no descompón.

$-2x^2+20x-48=0$

Paso 1: Identificar a,b e c

a= -2 ; b= 20 ; c= -48

Paso 2: Aplicar a fórmula **Δ= b² -4ac**

Δ= (20)² - 4· (-2) · (-48) = 16

Paso 3: Estudar o número de solucións

Δ > 0 Hai dúas solucións distintas
podes comprobar que son 6 e 4

Descomposición

$-2x^2+20x-48=-2\cdot(x-6)\cdot(x-4)$

$3x^2+54x+243=0$

Paso 1: Identificar a,b e c

a= 3 ; b= 54 ; c= 243

Paso 2: Aplicar a fórmula **Δ= b² -4ac**

Δ= (54)² - 4· (3) · (243) = 0

Paso 3: Estudar o número de solucións

Δ= 0 Hai dúas solucións iguais
podes comprobar que é -9

Descomposición

$3x^2+54x+243=3\cdot(x+9)^2$.

$-3x^2+4x-8=0$

Paso 1: Identificar a,b e c

a= -3 ; b= 4 ; c= -8

Paso 2: Aplicar a fórmula **Δ= b² -4ac**

Δ= (4)² - 4· (-3) · (-8) = -80

Paso 3: Estudar o número de solucións

Δ < 0 Non hai solución

Descomposición

$-3x^2+4x-8$ non descompón

Raíz	Raíz
2	-2
Divisor	Divisor
x - 2	x + 2

Regra de Ruffini reiterada

Si x-a é un divisor do polinomio P(x), dise que **a é raíz** de P(x), polo teorema do resto sabemos que isto equivale a dicir que P(a)=0.

$P(x)=p_n x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1 x+p_0$ e **a raíz** de P(x),

$$p_n a^n+p_{n-1}a^{n-1}+\ldots+p_1 a+p_0=0,$$

e despexando p_0

$$p_0=-p_n a^n-p_{n-1}a^{n-1}-\ldots-p_1 a$$

Polo tanto, se os coeficientes de P(x) son números enteiros e **a** tamén, p_0 é múltiplo de **a**.

As **raíces** enteiras non nulas dun polinomio con coeficientes enteiros, son **divisores do coeficiente de menor grao** do polinomio.

A descomposición dun polinomio de terceiro grao con raíces 4, 1 e -2 será (x-4)·(x-1)·(x+2).

Chámase **multiplicidade** dunha raíz ao número de veces que aparece na descomposición.

Descomposición factorial de $x^4-15x^2+10x+24$

As posibles raíces racionais deste polinomio son os divisores de 24

±1 ±2 ±3 ±4 ±6 ±8 ±12 ±24

Coa regra de Ruffini imos vendo que divisores son raíces

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**
2)		2	2	-24	
	1	1	-12	**0**	
3)		3	12		
	1	4	**0**		

$x^4-15x^2+10x+24$=
(x+1)·(x-2)·(x-3)·(x+4)

Identidades notables

Suma ao cadrado

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & +2ab & +\ b^2 \end{array}$$

A suma ao cadrado é igual a
cadrado do 1º
+dobre do 1º polo 2º
+cadrado do 2º

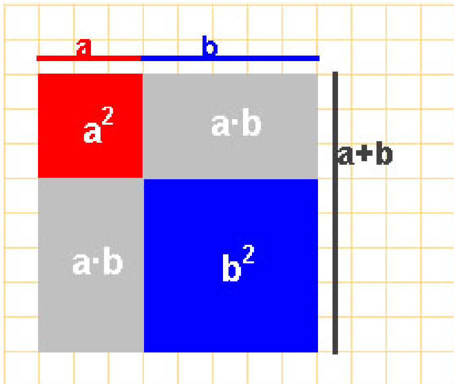
Diferenza ao cadrado

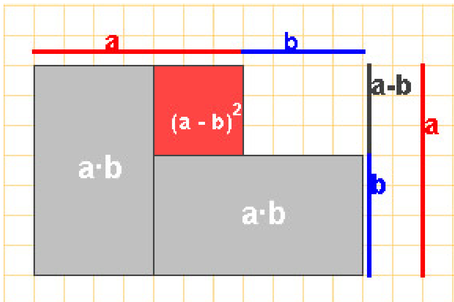
$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2 & -2ab & +\ b^2 \end{array}$$

A diferenza ao cadrado é igual a
cadrado do 1º
+dobre do 1º polo 2º
+cadrado do 2º





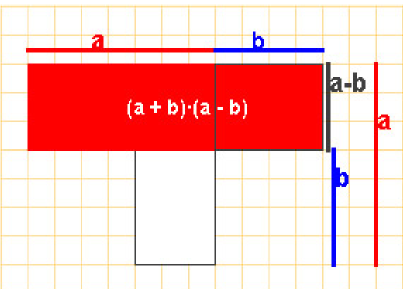
Suma por diferenza

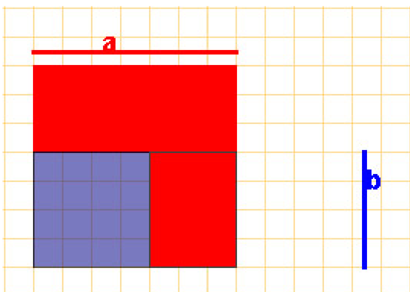
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Suma por diferenza é igual a diferenza de cadrados.

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & -b \\ & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$





EXERCICIOS resoltos

14. Saca factor común unha potencia de x en cada un dos seguintes polinomios:
$P(x)=2x^3+3x$ $\quad Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $\quad R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solución: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $\quad Q(x)=x^4\cdot(2x^2-3x+1)$ $\quad R(x)=2x^3\cdot(x^3+3x^2+4)$, neste último caso púidose sacar factor común tamén un número.

15. Acha a descomposición factorial de $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$

As posibles raíces racionais deste polinomio son os divisores de 12

$\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm12$

Coa regra de Ruffini miramos que divisores son raíces do polinomio

	1	-7	4	12
-1)		-1	8	-12
	1	**-8**	**12**	**0**
2)		2	-12	
	1	-6	**0**	

$$\boxed{\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)}$$

16. Factoriza $2x^2-8x+6$; $-x^2+3x+4$; x^2+2x+3; x^2+6x+9.

$2x^2-8x+6=2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ pois $2x^2-8x+6=0$ ten por solucións $x=1$; $x=3$.

$-x^2+3x+4=-(x+1)\cdot(x-4)$ pois $-x^2+3x+4=0$ ten por solucións $x=-1$; $x=4$.

x^2+2x+3 no descompón pois o seu discriminante é <0

$x^2+6x+9=(x+3)^2$ pois o seu discriminante é 0, logo ten unha raíz dobre: $x=-3$.

17. Acha a descomposición factorial de $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$

$x^7-x^6-4x^4=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. Sacouse factor común x^4.
As posibles raíces enteiras de x^3-x^2**-4** son os **divisores de -4**:

1,-1, 2,-2, 4,-4

Vexamos pola Regra de Ruffini se 1 é raíz de P

	1	-1	0	-4
1)		1	0	0
	1	0	0	**-4** $\neq$ **0**,

1 non é raíz de P

Vexamos pola Regra de Ruffini se -1 é raíz de P

	1	-1	0	-4
-1)		-1	2	-2
	1	-2	2	**-6** $\neq$ **0**

-1 non é raíz de P

Vexamos pola Regra de Ruffini se **2** é raíz de P

	1	-1	0	-4
2)		2	2	4
	1	1	2	**0**

2 é raíz de P

1 1 2 = x^2+x+2 A ecuación $x^2+x+2=0$ non ten solucións reais, polo tanto é primo

$$\boxed{\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x-\mathbf{2})\cdot(x^2+x+2)}$$

EXERCICIOS resoltos

18. Acha a descomposición factorial de $\mathbf{x^4-4}$

Buscamos as raíces racionais de $\mathbf{x^4-4}$. As posibles raíces son os cocientes dos divisores de -4 (coeficiente de menor grao) entre os divisores de 1 (coeficiente de maior grao),

divisores de -4	± 1	± 2	± 4

É fácil ver coa regra de Ruffini que ningún dos posibles valores son raíces de x^4-4.
O polinomio non ten raíces enteiras.

Se se recoñece x^4-4 como unha diferenza de cadrados, $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ resultará fácil a descomposición factorial:

$$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$$

O primeiro factor é primo, pero o segundo volve ser unha diferenza de cadrados $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

19. Acha a descomposición factorial de $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$

As posibles raíces enteiras de $x^4+x^3-x^2-2x$**-2** son os **divisores de -2**:

1,-1, 2,-2

Vexamos pola Regra de Ruffini se 1 é raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
1)		1	0	-1	-3
	1	0	-1	-3	**-5**

-5 distinto de 0, 1 non é raíz de P

Vexamos pola Regra de Ruffini se -1 é raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-1)		-1	2	-1	3
	1	-2	1	-3	**1**

1 distinto de 0, **-**1 non é raíz de P

Vexamos pola Regra de Ruffini se 2 é raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
2)		2	2	2	0
	1	1	1	0	**-2**

-2 distinto de 0, 2 non é raíz de P

Vexamos pola Regra de Ruffini se 1 é raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-2)		-2	6	-10	24
	1	-3	5	-12	**22**

22 distinto de 0, -2 non é raíz de P

$\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$ Non ten raíces enteiras

Non podemos achar a descomposición factorial deste polinomio.

Para practicar

1. Acha a expresión alxébrica dun número de tres cifras se a cifra das unidades é 4 veces a cifra das decenas.

2. Cal é o grao de $2x^5-x^3+3x^2$? O seu coeficiente de grao 3? e o de grao 2? Calcula o seu valor numérico en $x=2$.

3. Acha $P(x)-3\cdot Q(x)$ sendo $P(x)=4x^2+4x$ e $Q(x)=6x^2+2x$.

4. Multiplica os polinomios $P(x)=-3x^3+4x^2-x-2$ e $Q(x)=-x^2+7$.

5. Acha o cociente e o resto da división de x^3+2x^2+5x-7 entre $-x^2+x-1$.

6. Fai a división de x^3+4x^2+2x-3 entre $x-2$ coa regra de Ruffini.

7. Aplica o teorema do resto para calcular o resto da división de $2x^3-2x^2+x-7$ entre $x-5$.

8. a) Acha m para que $x^3+mx^2-2mx+6$ sexa divisible por $x+2$

   b) Acha m para que $x^3+mx^2-8mx+4$ sexa divisible por $x-1$.

9. Efectúa as potencias
   a) $(3x+2)^2$
   b) $(2x-4)^2$
   c) $(x-5)^2$

10. Descompor, aplicando as identidades notables, os polinomios:
    a) $x^4-72x^2+36^2$
    b) x^4-16

11. Descompor os seguintes polinomios, se é posible, aplicando a ecuación de segundo grao.
    a) $3x^2-10x+3$
    b) x^2-4x+5

12. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas

    a) $\dfrac{x^2+8x+16}{3x+12}$

    b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$

    c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{12x^2-3}$

13. Saca factor común en $12x^{12}+24x^{10}$

14. Acha a descomposición en factores primos dos seguintes polinomios

    a) $3x^8-39x^7+162x^6-216x^5$

    b) $3x^9+12x^8+15x^7+6x^6$

15. Un polinomio de grao 3 ten por raíces –5, 7 e 1. Acha a súa descomposición factorial sabendo que o seu valor en 2 é 128.

16. Como realizas mentalmente o cálculo de $23^2–22^2$?

Para saber máis

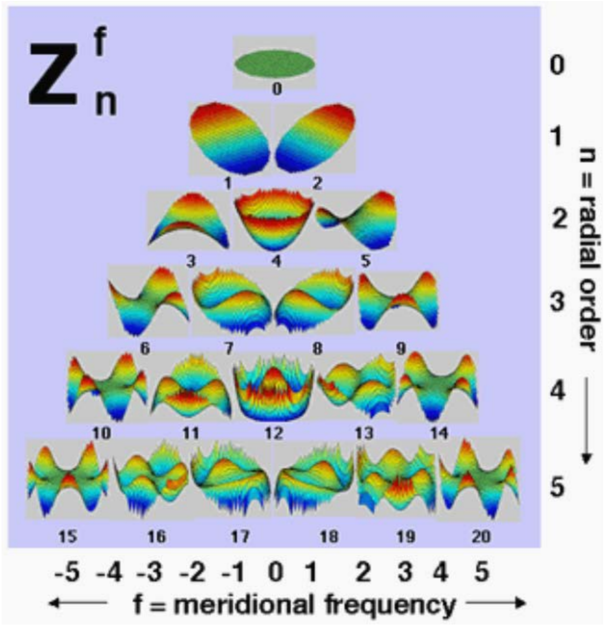
Pide a un compañeiro que memorice unha figura do último cadro pero que non diga cal. Ti por telepatía adiviñarala. Pregúntalle se a figura escollida está en cada unha das seguintes tarxetas

SI = 1 NON = 0 NON = 0 SI = 1 NON = 0

Con cada resposta afirmativa escribe 1, coa negativa un 0, para o resultado **1**00**1**0, a figura é a $\mathbf{1}\cdot 2^4+\mathbf{1}\cdot 2=18$, o círculo verde. Só hai que calcular o valor en 2 do polinomio cuxos coeficientes se obteñen con 1 ou 0, con Sí ou Non.

Os polinomios noutras ciencias

Se investigas na web, é probable que atopes moitos polinomios con nome propio: Polinomios de Lagrange, Hermite, Newton, Chevichev... copiamos aquí un extracto dun blog que fala dos polinomios de Zernike e a súa aplicación en óptica para corrixir defectos visuais.



...As matemáticas, cos polinomios de Zernike, ofrécennos un método para descompor superficies complexas nas súas compoñentes máis simples. **Así, con este procedemento matemático podemos xerarquizar e definir todas as aberracións visuais**. Un esquema que está presente con moita frecuencia nas consultas de cirurxía refractiva é o das diferentes aberracións agrupadas e xerarquizadas:

O da xerarquía é fundamental, porque segundo cal sexa o grupo da aberración, terá máis ou menos importancia, será máis ou menos fácil de corrixir, etc. Por exemplo, o número 4 corresponde á miopía (e o seu inverso, á hipermetropía), e o 3 e 5 corresponden ao astigmatismo...

Extracto de la páxina http://ocularis.es/blog/?p=29

Lembra o máis importante

Expresión en coeficientes

$-4x^3 - x^2 + 3$

-4	-1	0	3

División de Polinomios

$12x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 9x + 6 \;|\; 4x^2 + 2x + 3$

$-12x^4 - 6x^3 - 9x^2$ → $3x^2 + x + 1$ cociente

$4x^3 + 6x^2 + 9x + 6$

$-4x^3 - 2x^2 - 3x$

$4x^2 + 6x + 6$

$-4x^2 - 2x - 3$

$4x + 3$ resto

Regra de Ruffini. Teorema do resto

O resto da división por x-a é o valor numérico do dividendo en a

3	-5	0	1	1 -2
-3	6			3 1 2 cociente
	1	0		
	-1	2		
		2	1	
		-2	4	
			5 resto	

T. do resto: $5 = 3\cdot 2^3 - 5\cdot 2^2 + 1$

Regra de Ruffini

	3	-5	0	1
2		6	2	4
	3	1	2	5 resto

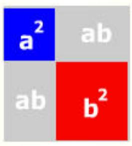
cociente

Raíces dun polinomio

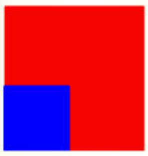
Raíz 2	Raíz -2
$P(2)=0$	$P(-2)=0$
Divisor $x-2$	Divisor $x+2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$



Descomposición factorial

Os polinomios con coeficientes en IR primos son os de grao un e os de grao 2, ax^2+bx+c con $b^2-4ac<0$

Raíz dun polinomio

Raíz a

Divisor x-a

$P(a)=0$

As raíces racionais dun polinomio son da forma

$\frac{\text{Divisores do coef. de grao menor}}{\text{Divisores do coef. de grao maior}}$

Para calcular a descomposición factorial dun polinomio terase en conta as seguintes ferramentas:

- Regra de Ruffini
- Ecuación de 2º grao
- Identidades notables

Fai clic para ver un exemplo

clic

$P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

Probando a regra de Ruffini (con divisores de 18), atopamos que -1 e 2 son raíces deste polinomio

	1	5	1	-21	-18
-1)		-1	-4	3	18
	1	4	-3	18	0
2)		2	12	-18	
	1	6	9	0	

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+6x+9)$

$P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+6x+9)$

O polinomio de segundo grao x^2+6x+9 pódese descompor resolvendo a ecuación $x^2+6x+9=0$ que dá unha solución dobre, -3, ou se pode recoñecer a identidade notable $x^2+6x+9=(x+3)^2$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)^2$

Autoavaliación

1. Acha os coeficientes de $P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot R(x)$ sendo $P(x)=3x+2$, $Q(x)=2x^2-5$ e $R(x)=x^2+8x$.

2. Escribe os coeficientes do cociente e do resto na división de $2x^3-5x^2+5$ entre x^2+5.

3. Calcula o valor numérico de $-3x^3-5x^2+3$ en $x=-1$

4. É certa a igualdade $2x^2+20x+25=(2x+5)^2$?

5. Calcula m para que o resto da división de $4x^2+mx+1$ entre $x+5$ sexa 2.

6. Se $P(x)=ax^2+bx+5$ e $a\cdot 6^2+b\cdot 6=3$, cal é o resto da división de $P(x)$ entre $x-6$?

7. Acha unha raíz enteira do polinomio $x^3+5x^2+8x+16$

8. Acha a descomposición factorial de $-4x^2+12x+112$.

9. O polinomio $5x^3+9x^2-26x-24$ ten por raíces 2 e -3. Cal é a outra raíz?

10. As raíces dun polinomio de grao 3 son -6, 0 e 4. Calcula o valor numérico do polinomio en 2 sabendo que o seu coeficiente de maior grao é 3.

Solucións dos exercicios para practicar

1. $100x+14y$
2. grado 5; c. gr 3→-1; c. gr 2→3;
   v.n. en 2→68
3. $-14x^2-2x$
4. $3x^5-4x^4-20x^3+30x^2-7x-14$
5. Cociente $-x-3$ Resto $7x-10$
6. Cociente $x^2+6x+14$ Resto 25
7. -33
8. a) 1/4 b) 5/7
9. a) $(3x+2)^2=9x^2+12x+4$
   b) $(2x-4)^2=4x^2-16x+16$
   c) $(x-5)^2=x^2-10x+25$
10. a) $(x+6)^2\ (x-6)^2$
    b) $(x+4)(x-2)(x^2+4)$
11. a) $3(x-1/3)(x-3)$
    b) Non descompón
12. a) $(x+4)/3$
    b) $3(x+2)/(x-2)$
    c) $(2x+1)/(3\cdot(2x-1))$
13. $12x^{10}\cdot(x^2+2)$
14. a) $3x^5(x-3)(x-4)(x-6)$
    b) $3x^6(x+2)(x+1)^2$
15. $2(x+5)(x-7)(x-1)$
16. $23^2-22^2=(23+22)\cdot(23-22)=45$

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. 9 30 1 -10
2. Cociente $2x-5$, resto $-10x+30$
3. 1
4. Non, $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
5. $m=19,8$
6. 8
7. –4
8. $-4(x+4)\cdot(x-7)$
9. –0,8
10. -96