3

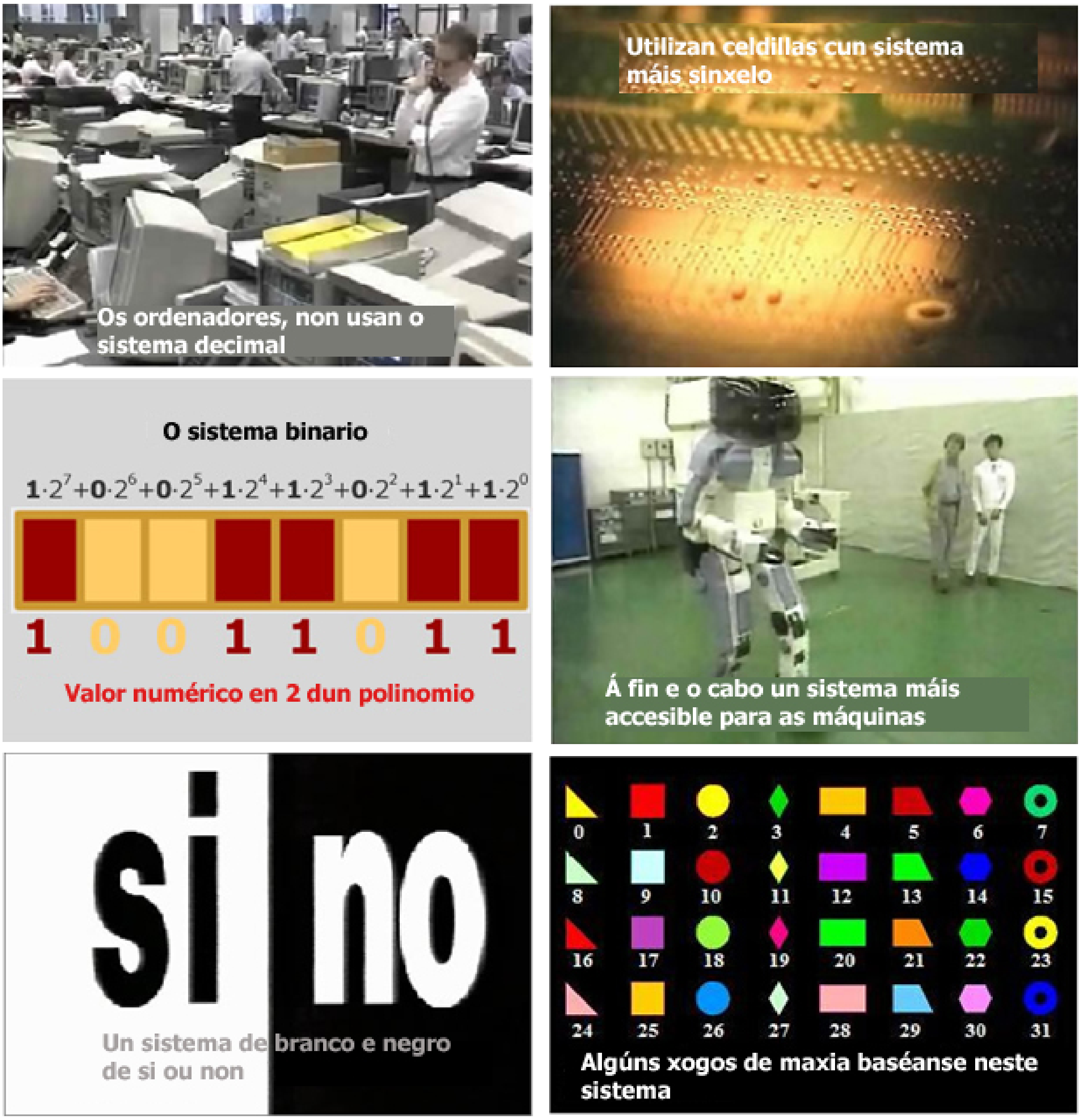
Polinomios

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Achar a expresión en coeficientes dun polinomio e operar con eles.
- Calcular o valor numérico dun polinomio.
- Recoñecer algunhas identidades notables, o cadrado e o cubo dun binomio.
- Aplicar a Regra de Ruffini e o Teorema do Resto.
- Calcular a descomposición factorial de algúns polinomios.

Antes de empezar



Utilidade dos polinomios

Os polinomios non só están na base da informática; en economía, os cálculos de intereses e duración das hipotecas realízanse con expresións polinómicas. Así, o capital C, a unha porcentaxe x en 3 anos, convértese en $C\cdot(1+x)^3$, que é o cubo dun binomio.

A medicina e outras ramas da ciencia avanzan axudadas desta ferramenta alxébrica. Investiga na web as utilidades dos polinomios.

1. Polinomios

Grao e coeficientes

O polinomio $\mathbf{x^3+4x+2}$ está formado pola suma de tres monomios: x^3, 4 x e 2; o seu grao, ou máximo expoñente de x é 3 e **os coeficientes deste polinomio son 1, 0, 4, 2**.

1 é o coeficiente de grao 3
0 é o coeficiente de grao 2
4 é o coeficiente de grao 1
2 é o coeficiente de grao 0

> Preténdese que se identifique
> x^3+4x+2
> coa súa expresión en coeficientes
> 1 0 4 2

Valor numérico

Ao substituír a variable x dun polinomio por un número obtense o valor numérico do polinomio.
Así o **valor numérico en 3** do polinomio

$P(x)=2x^3-x+4$

es P(3) = $2\cdot3^3-3+4=55$

> Podes utilizar a calculadora para achar o valor numérico dun polinomio. Lembra que para realizar a potencia 7^4 utilízase a tecla $\boxed{x^y}$,
> $7\ \boxed{x^y}\ 4\ \boxed{=}\ \rightarrow 2041$

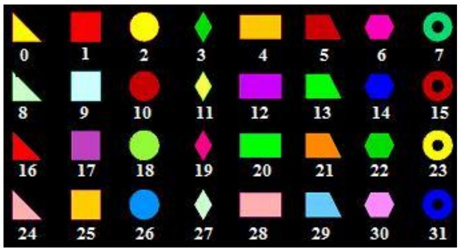
O valor numérico en 10 do polinomio de coeficientes 2, 4, 6 é 246. Esta coincidencia do valor en 10 cos coeficientes débese a que o noso sistema é de base 10 e **246** é igual a **2** $\cdot 10^2$ + **4** $\cdot$ 10 + **6**.

Se o número **347** está expresado **en base 8**, a súa expresión no noso sistema usual, o decimal, é **3** $\cdot 8^2$ + **4** $\cdot$ 8 + **7** = 231, que **é o valor en 8 do polinomio de coeficientes 3, 4, 7**.

No sistema binario as cifras empregadas son 0 e 1, aquí o valor decimal de 1000110 en binario é

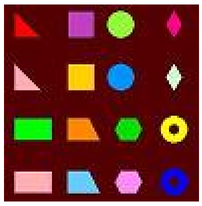
$$\mathbf{1}\cdot2^6+\mathbf{1}\cdot2^2+\mathbf{1}\cdot2=70$$

A cantidade de cor adóitase expresar en sistema hexadecimal ou de base 16; este sistema ten 16 cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 e neste sistema a cantidade **38** de cor azul equivale a **3** $\cdot$ 16 + **8** =56 en decimal.

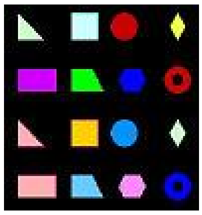


Pídelle a un compañeiro que memorice unha destas figuras pero que non diga cal. Ti, por telepatía, vala adiviñar.

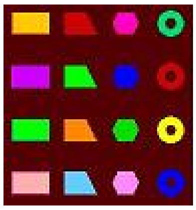
Pregúntalle se a figura escollida está en cada unha das seguintes tarxetas



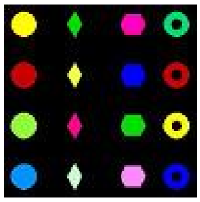
SI =1



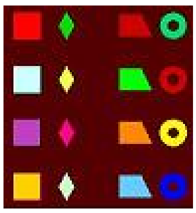
NON =0



NON =0



SI =1



NON =0

Con cada resposta afirmativa escribe 1, coa negativa un 0, para o resultado **10010**, a figura é a **1** $\cdot 2^4$ + **1** $\cdot$ 2 =18, o círculo verde. Só hai que calcular o valor en 2 do polinomio cuns coeficientes que se obteñen con 1 ou 0, con Si ou Non.

EXERCICIOS resoltos

1. Acha a expresión en coeficientes dos polinomios $P(x)=5x^2+2x+1$; $Q(x)=x^3-3x$; $R(x)=0{,}5x^2-4$

As respectivas expresións en coeficientes son

P(x)→ 5 2 1; Q(x)→ 1 0 -3 0; R(x)→ 0,5 0 -4

2. Escribe as expresións polinómicas dos polinomios que teñen por expresión en coeficientes:

P(x)→ 2 1 3 -1; Q(x)→ 1 3 0 0; R(x)→ 3/4 -1 0 2

$P(x)=2x^3+x^2+3x-1$; $Q(x)=x^3+3x^2$; $R(x)=3/4\ x^3-x^2+2$

3. Completa a táboa:

EXPRESIÓN POLINÓMICA	EXPRESIÓN EN COEFICIENTES	GRAO
$-2x^3+x^5-3x^2$		
$x^2/3-1$		
	$-2\ \ \pi\ \ 0\ \ 0$	
	-2 1,3 0 -1/7	
$3-\sqrt{2}\,x^2$		
Estes polinomios son polinomios nunha variable, x, con coeficientes no corpo dos números reais. O conxunto destes polinomios desígnase por IR[x].		

POLINÓMICA	COEFICIENTES	GRAO
$-2x^3+x^5-3x^2$	1 0 -2 -3 0 0	5
$x^2/3-1$	1/3 0 -1	2
πx^2-2x^3	$-2\ \ \pi\ \ 0\ \ 0$	3
$-2x^3+1{,}3x^2-1/7$	-2 1,3 0 -1/7	3
$3-\sqrt{2}\,x^2$	$-\sqrt{2}\ \ 0\ \ 3$	2

4. Acha o valor numérico en 1, 0 e -2 dos polinomios do exercicio anterior

POLINOMIO	Valor en 1	Valor en 0	Valor en -2
$x^5-2x^3-3x^2$	-4	0	-28
$x^2/3-1$	-2/3	-1	1/3
$-2x^3+\pi x^2$	$-2+\pi$	0	$16+4\pi$
$-2x^3+1{,}3x^2-1/7$	-59/70	-1/7	737/35
$-\sqrt{2}\,x^2+3$	$-\sqrt{2}+3$	3	$-4\sqrt{2}+3$

2. Operacións

Para operar con polinomios pode resultar cómodo pasalos ás súas expresións en coeficientes, operar con estas e dar o resultado en forma polinómica.

Suma

P(x)=$8x^4+x^2-5x-4$
Q(x)=$3x^3+x^2-3x-2$

Súmanse os coeficientes de igual grao:

P(x)→	8	0	1	-5	-4
Q(x)→		3	1	-3	-2
P(x)+Q(x)→	8	3	2	-8	-6

P(x)+Q(x)=$8x^4+3x^3+2x^2-8x-6$

Multiplicación

P(x)=$3x^3+5x-4$
Q(x)=x^2-x+2

Multiplícase coeficiente a coeficiente:

P(x)→			3	0	5	-4
Q(x)→				1	-1	2
			6	0	10	-8
		-3	0	-5	4	
	3	0	5	-4		
P(x)·Q(x)→	3	-3	11	-9	14	-8

P(x)·Q(x)=$3x^5-3x^4+11x^3-9x^2+14x-8$

División

P(x)=$3x^3-x^2+5x-4$
Q(x)=x^2-3x+2

3	-1	5	-4	|	1	-3	2
-3	9	-6			3	8	
	8	-1	-4				
	-8	24	-16				
		23	-20				

Cociente=3x+8   Resto=23x-20

P(x)=$12x^3+6x-5$
Q(x)=$4x^2+3$

12	0	6	-5	|	4	0	3
-12	0	-9			3	0	
	0	-3	-5				
		0	0				
		-3	-5				

Cociente=3x   Resto=-3x-5

Diferenza

P(x)=$3x^3+x^2+5x+4$
Q(x)=$3x^3+3x+2$

Réstanse os coeficientes de igual grao:

P(x)→	3	1	5	4
Q(x)→	3	0	3	2
P(x)-Q(x)→		1	2	2

P(x)-Q(x)=x^2+2x+2

Observa o grao do resultado:
$gr(P \pm Q) \leq max(gr(P), gr(Q))$

$gr(P·Q)=gr(P)+gr(Q)$

Dividir dous polinomios D(x), dividendo, entre d(x), divisor, é atopar un cociente c(x) e un resto r(x) que cumpran

- Dividendo=divisor·cociente +resto
- grao de r(x)<grao de d(x)

$gr(c)=gr(D)-gr(d)$

Un exemplo operando coa variable, comezamos dividindo as potencias de maior grao

$$x^3+2x^2-3x+5 \quad | \; 3x^2+x$$
$$\frac{x^3}{3x^2}=\frac{1}{3}x$$

continuamos

$$\begin{array}{rl} x^3+2x^2-3x+5 & |\; 3x^2+x \\ x^3+\frac{1}{3}x^2 & \frac{1}{3}x+\frac{5}{9} \\ & \text{cociente} \\ \hline \frac{5}{3}x^2-3x+5 & \\ \frac{5}{3}x^2+\frac{5}{9}x & \\ \hline -\frac{32}{9}x+5 & \\ \text{resto} & \end{array}$$

EXERCICIOS resoltos

5. Acha P(x)+Q(x) e 2·P(x)-Q(x)

$P(x)=x^4+x^3+3x$ $\qquad$ $Q(x)=2x^3+x^2-4x+5$

P(x)→	1	1	0	3	0
Q(x)→		2	1	-4	5
P(x)+Q(x)→	1	3	1	-1	5

2·P(x)→	2	2	0	6	0
Q(x)→		2	1	-4	5
2·P(x)-Q(x) →	2	0	-1	10	-5

$$\mathbf{P(x)+Q(x)=x^4+3x^3+x^2-x+5}$$

$$\mathbf{2\cdot P(x)-Q(x)=2x^4-x^2+10x-5}$$

6. Cal é o grao do cociente ao dividir un polinomio de grao 5 entre outro de grao 2?
o grao do cociente é o grao do dividendo, 5, menos o do divisor, 2, daquela 3.

7. Multiplica $P(x)=x^3+6x^2+4x-6$ por $Q(x)=x^3+3x^2+5x-2$

P(x)→				1	6	4	-6
Q(x)→				1	3	5	-2
				-2	-12	-8	12
			5	30	20	-30	
		3	18	12	-18		
	1	6	4	-6			
P(x)·Q(x)→	1	9	27	34	-10	-38	12

$$\mathbf{P(x)\cdot(Q(x)=x^6+9x^5+27x^4+34x^3-10x^2-38x+12}$$

8. Fai en cada caso a división de P(x) entre Q(x)

$P(x)=2x^3+4x^2+7x+3$

$Q(x)=2x^2+x+3$

P(x) Dividendo				Q(x) divisor		
2	4	7	3	2	1	3
2	1	3		1	1,5	
	3	4	3	cociente		
	3	1,5	4,5	x+1,5		
		2,5	-1,5			

resto
2,5x-1,5

$P(x)=7x^2-2x+5$

$Q(x)=8x+7$

P(x) Dividendo			Q(x) divisor	
7	-2	5	8	7
7	$\frac{49}{8}$		$\frac{7}{8}$	$\frac{65}{-64}$
	$\frac{65}{-8}$	5	cociente	
	$\frac{65}{-8}$	$\frac{455}{-64}$		
		$\frac{775}{64}$		

resto

$$\frac{7}{8}x-\frac{65}{64}$$

3. Identidades notables

Suma ao cadrado

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & +2ab & +b^2 \end{array}$$

A suma ao cadrado é igual a
cadrado do 1º
+dobre do 1º polo 2º
+cadrado do 2º

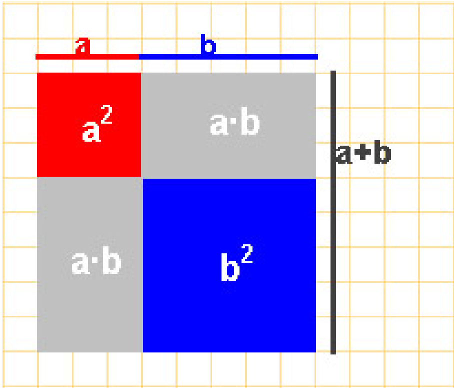
Diferenza ao cadrado

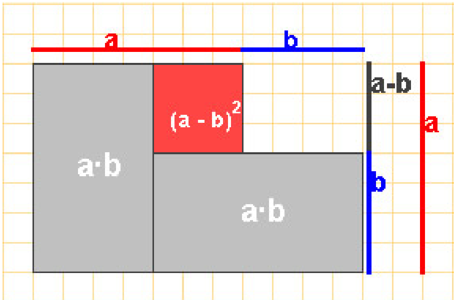
$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2 & -2ab & +b^2 \end{array}$$

A diferenza ao cadrado é igual a
cadrado do 1º
+dobre do 1º polo 2º
+cadrado do 2º





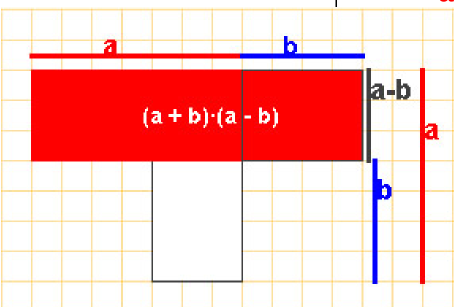
Suma por diferenza

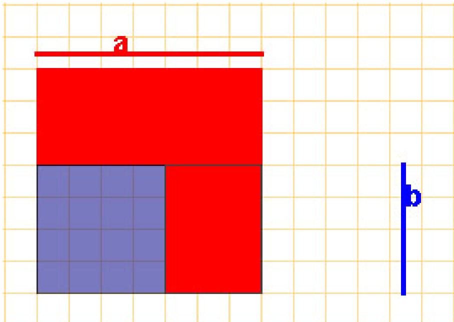
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

A suma por diferenza é igual á diferenza de cadrados.

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$

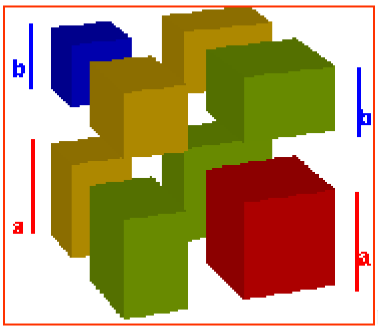


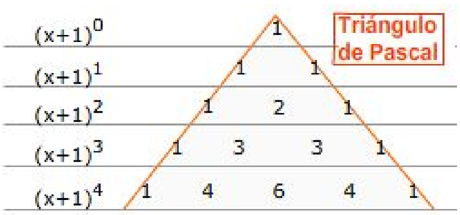


o cubo dun binomio

$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

Esta igualdade dedúcese facilmente ao observar na figura as 8 pezas en que descompón o cubo de lado (a+b)





Cada termo deste triángulo obtense sumando os dous superiores.
As filas deste triángulo son os coeficientes das potencias de (x+1)
Así a terceira fila 1 3 3 1 son os coeficientes de $(x+1)^3$

EXERCICIOS resoltos

9. Observa como se aplican as identidades notables

Para desenvolver $(x+3)^2$
Cadrado do 1º→x^2 Dobre do 1º por o 2º→$2\cdot x\cdot 3=6x$ Cadrado do 2º→$3^2=9$
polo tanto $(x+3)^2=x^2+6x+9$

Para descompoñer o polinomio $x^2-10x+25$,
téntase ver un dos membros dunha identidade notable,
ao seren os signos dos coeficientes alternativos, + - +, compárase coa diferenza ao cadrado.
$25=5^2$ e $10x$=dobre de x por 5→ $x^2-10x+25=(x-5)^2$

Para descompoñer o polinomio $4x^2-25$
téntase ver se é unha identidade notable, ao ser 0 o coeficiente de grao un, compárase coa diferenza de cadrados
$4x^2=(2x)^2$; $25=5^2$ → $4x^2-25=(2x+5)\cdot(2x-5)$

10. Desenvolve as seguintes expresións

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$(x+4)^2$	$x^2+8x+16$	$(x-2)^2$	x^2-4x+4
$(4x+3)^2$	$16x^2+24x+9$	$(3-2x)^2$	$4\ x^2-12x+9$
$(2x/3+5)^2$	$4x^2/9+20x/3+25$	$(x/2-3)^2$	$x^2/4-3x+9$
$(\sqrt{2}\ x+1)^2$	$2x^2+2\sqrt{2}\ x+1$	$(x-\sqrt{3})^2$	$x^2-2\sqrt{3}\ x+3$

10. Acha a expresión en coeficientes dos seguintes produtos

Produtos	Solución	Produtos	Solución
$(x+4)\cdot(x-4)$	x^2-16; 1 0 -16	$(x-1/2)\cdot(x+1/2)$	1 0 -1/4
$(2x+5)\cdot(2x-5)$	4 0 -25	$(3+\sqrt{2}\ x)\cdot(3-\sqrt{2}\ x)$	-2 0 9

11. Resolve aplicando as identidades notables a ecuación $x^2+10x+16=0$

Compárase a primeira parte, $\mathbf{x^2+10x}$, cunha identidade notable, con $(x+5)^2$
Pois $(x+5)^2=\mathbf{x^2+10x}+25$, polo tanto, $x^2+10x=(x+5)^2-25$
e o primeiro membro da ecuación é $\mathbf{x^2+10x}+16=\mathbf{(x+5)^2-25}+16$,

$(x+5)^2-9=0$→ $(x+5)^2-3^2=0$→ $(x+5+3)\cdot(x+5-3)=0$ → Solucións $x=-8$ e $x=-2$

12. Calcula o cubo dun binomio

Binomio ao cubo	Solución	Binomio ao cubo	Solución
$(x+2)^3$	$x^3+6x^2+12x+8$	$(x-1)^3$	x^3-3x^2+3x-1
$(2x-3)^3$	$8x^3-36x^2+18x-27$	$(3+x/3)^3$	$x^3/27+x^2+9x+27$

13. Acha a fila 5 do triángulo de Pascal, e calcula $(x+1)^5$

a fila 5 do triángulo é 1 5 10 10 5 1, que son os coeficientes de $(x+1)^5$, polo tanto, $(x+1)^5=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

4. División por x-a

Regra de Ruffini

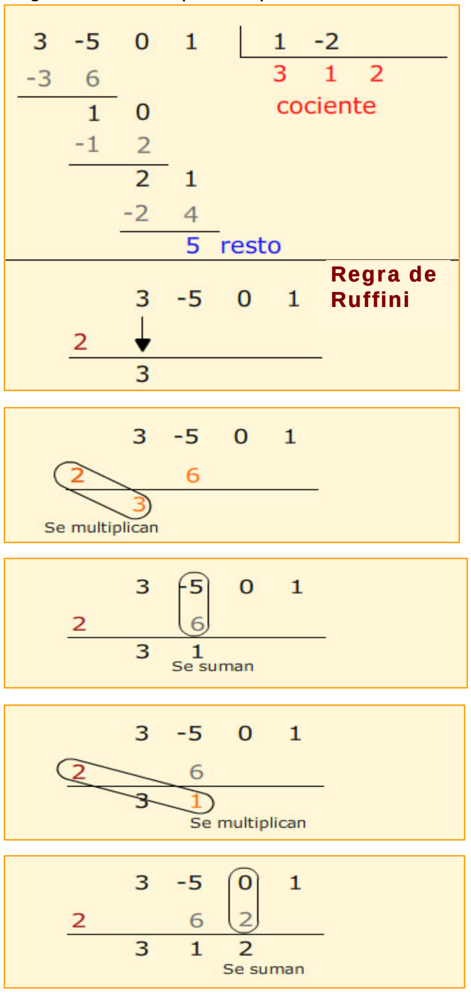
A regra de Ruffini é útil para dividir polinomios entre x-a.

No exemplo da dereita divídese $3x^3-5x^2+1$ entre x-2, obtendo de cociente $3x^2+x+2$ e de resto 5.
A regra explicada para **a=2**, vale tamén cando **a** é un número racional ou real, no seguinte exemplo tómase **a=-3/2** e representa a división de $4x^2+5x+2$ entre x+3/2

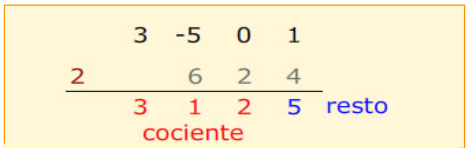
	4	5	2
-3/2		-6	3/2
	4	**-1**	**7/2 resto**

cociente
4x-1

Observa a división e como se realiza a Regra de Ruffini paso a paso



Vólvese multiplicar e sumar, obtendo



Coa calculadora

Para calcular o valor numérico dun polinomio coa calculadora, valor de
$P(x)=3x^3-5x^2+1$ en x=2
Podemos aplicar a regra de Ruffini, para iso teclea a seguinte secuencia:

2 M in x 3 → 3
-5 = → 1
x MR + 0 = → 2
x MR + 1 =5

Obtemos: 5 que é o resto de dividir P(x) para x-2 e o valor numérico en x=2.
De paso foron saíndo os coeficientes do cociente cada vez que se premía =.

Teorema do resto

Exemplo
Dividendo=$\mathbf{x^4-2}$; divisor=**x-4**
Fai a división no teu caderno

Resulta, cociente=$\mathbf{x^3+4x^2+16x+64}$ **e** resto=**254**
Escribe a igualdade Dividendo = divisor·cociente+resto

$\mathbf{x^4-2=(x-4)\cdot(x^3+4x^2+16x+64)+254}$
Substitúe a x por 4

$\mathbf{4^4-2=(4-4)\cdot(4^3+4\cdot4^2+16\cdot4+64)+254}$
$4^4-2=0\cdot(4^3+4\cdot4^2+16\cdot4+64)+254$
$4^4-2=0\cdot($________________$)+254$
$4^4-2=0+254$

Conclusión, **ao substituír a x por 4 no dividendo dános o resto da división entre x-4**

Teorema do resto. Para calcular o resto da división dun polinomio P(x) entre x-a abonda con substituír en P(x) o x por a.

Lembra

P(x) é divisible entre x-a <=> P(a)=0

A miúdo, para calcular o resto dunha división entre x-a, resulta máis cómodo aplicar a regra de Ruffini que substituír o x. O teorema do resto sérvenos para resolver problemas como o seguinte: achar m para que o polinomio

$$P(x)=x^3+mx-4$$

sexa divisible por x-2, que se resolve substituíndo o x por 2, igualando a 0 e despexando m, así m=-2.

EXERCICIOS resoltos

14. Aplica a regra de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ e $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre x-3

	1	5	-2	1
3)		3	24	66
	1	8	22	67

Cociente $x^2+8x+22$

Resto 67

	2	0	0	0	-5
3)		6	18	54	162
	2	6	18	54	157

Cociente $2x^3+6x^2+18x+54$

Resto 157

	1	3	-4	0
3)		3	18	42
	1	6	14	42

Cociente $x^2+6x+14$

Resto 42

15. Aplica a regra de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ e $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre x+1

	1	3	-2	1
-1)		-1	-2	4
	1	2	-4	5

Cociente x^2+2x-4

Resto 5

	1	0	0	0	-2
-1)		-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1

Cociente x^3-x^2+x-1

Resto -1

	1	-4	-1	0
-1)		-1	5	-4
	1	-5	4	-4

Cociente x^2-5x+4

Resto -4

16. Aplica a regra de Ruffini para dividir $P(x)=3x^3+5x^2-2x+1$ e $Q(x)=6x^4-2$ e entre x+2/3

	3	5	-2	1
-2/3)		-2	-2	8/3
	3	3	-4	11/3

Cociente $3x^2+3x-4$

Resto 11/3

	6	0	0	0	-2
-2/3)		-4	8/3	-16/9	32/27
	6	-4	8/3	-16/9	-22/27

Cociente $6x^3-4x^2+\frac{8}{3}x-\frac{16}{9}$

Resto $-22/27$

17. Se o valor numérico dun polinomio en 2 é igual a 3 e o cociente da súa división de entre x-2 é x, sabes de que polinomio se fala?

Dividendo = divisor·cociente +resto, o divisor é x-2, o cociente x e o resto 3, polo tanto o polinomio é x^2-2x+3

18. Acha m para que mx^2+2x-3 sexa divisible entre x+1

O polinomio será divisible entre x+1 se o seu valor en -1 é 0, daquela ha de ser

m-2-3=0, é dicir, m=5

19. Existe algún valor de m para que o polinomio $x^3+mx^2-2mx+5$ sexa divisible por x-2?

Polo teorema do resto abonda con resolver a ecuación $2^3+m\cdot2^2-2m\cdot2+5=0$, o que dá unha igualdade imposible 13 =0; xa que logo, non hai ningún valor de m para o cal o polinomio sexa divisible por x-2

5. Descomposición factorial

Sacar factor común unha potencia de x

Chámanse divisores impropios dun polinomio P(x), con coeficientes en IR, os números reais e os polinomios obtidos ao multiplicar P(x) por un número real.

> Os primos de IR[x] son os polinomios de grao un e os polinomios de grao dous, **ax^2+bx+c**, con **$b^2-4ac<0$**

Un polinomio é **primo** se non ten divisores propios e o seu grao é maior ca cero (os polinomios de grao cero chámanse unidades ou invertibles porque teñen inverso).
O primeiro paso para descompoñer un polinomio en factores primos é sacar factor común unha potencia de x, cando sexa posible; isto explícase na animación da dereita.

Exemplos de descomposición factorial

$x^5-5x^4+6x^3$ $=x^3\cdot(x^2-5x+6)=$**$x^3\cdot(x-2)\cdot(x-3)$**
Sacouse factor común x^3 de todos os sumandos, ou monomios, para o segundo paso resolveuse a ecuación de segundo grao $x^2-5x+6=0$, pois segundo o teorema do resto, x^2-5x+6 é divisible por (x-a) se a^2-5a+6 vale cero, daquela a é solución da ecuación $x^2-5x+6=0$

$x^2-6x+9=(x-3)^2$ Aplicouse unha identidade notable para descompoñelo.

$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$ A ecuación $x^2+x+1=0$ non ten solución real, daquela o polinomio é primo.

$2x^2+3x+1=2\cdot(x+1)\cdot(x+1/2)$ As solucións da ecuación $2x^2+3x+1=0$ son -1 e -1/2. **Hai que ter coidado**, en factorizacións deste tipo, **de non esquecer o factor de x^2**.

Raíces dun polinomio

Se x-a é un divisor do polinomio P(x), dise que **a é raíz** de P(x), polo teorema do resto sabemos que isto equivale a dicir que P(a)=0.

$P(x)=p_n\mathbf{x}^n+p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{x}+p_0$ e **a raíz** de P(x),

$p_n\mathbf{a}^n+p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{a}+p_0=0,$

e despexando p_0

$p_0=-p_n\mathbf{a}^n-p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}-\ldots-p_1\mathbf{a}$

Polo tanto, se os coeficientes de P(x) son números enteiros e **a** tamén, p_0 é múltiplo de **a**.

> As **raíces** non nulas dun polinomio con coeficientes enteiros son **divisores do coeficiente de menor grao** do polinomio.

A descomposición dun polinomio de terceiro grao con raíces 4, 1 e -2 será a·(x-4)·(x-1)·(x+2).

Chámase **multiplicidade** dunha raíz ao número de veces que aparece na descomposición.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=2\cdot\boxed{x^4\cdot x^5}+\boxed{x^4\cdot x^2}-3\cdot x^4$$

x^4 está en todos os sumandos

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=\ x^4\cdot(2x^5+x^2-3)$$

Sacouse factor común unha potencia de x

Raíz 2	Raíz -2
Divisor x-2	Divisor x+2

Descomposición factorial de $x^4-15x^2+10x+24$
As posibles raíces racionais deste polinomio son os divisores de 24
±1 ±2 ±3 ±4 ±6 ±8 ±12 ±24

Coa regra de Ruffini imos vendo que divisores son raíces

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**
2)		2	2	-24	
	1	1	-12	**0**	
3)		3	12		
	1	4	**0**		

$x^4-15x^2+10x+24$ $=$
$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$

EXERCICIOS resoltos

21. Saca factor común unha potencia de x en cada un dos seguintes polinomios:
$P(x)=2x^3+3x$ $Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solución: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $Q(x)=x^4\cdot(2x^2-3x+1)$ $R(x)=2x^3\cdot(x^3+3x^2+4)$, neste último caso púidose sacar factor común tamén un número.

22. Acha a descomposición factorial de $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. Sacouse factor común x^4.
As posibles raíces enteiras de x^3-x^2**-4** son os **divisores de -4**:

1,-1, 2,-2, 4,-4

Vexamos pola regra de Ruffini se 1 é raíz de P	Vexamos pola regra de Ruffini se -1 é raíz de P	Vexamos pola regra de Ruffini se **2** é raíz de P
1 -1 0 -4	1 -1 0 -4	1 -1 0 -4
1) 1 0 0	-1) -1 2 -2	**2**) 2 2 4
1 0 0 **-4 ≠ 0,**	1 -2 2 **-6 ≠ 0**	1 1 2 **0**
1 non é raíz de P	**-1** non é raíz de P	**2 é raíz** de P

1 1 2 = x^2+x+2 a ecuación $x^2+x+2=0$ non ten solucións reais, polo tanto, é primo

$\boxed{\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x\mathbf{-2})\cdot(x^2+x+2)}$

23. Acha a descomposición factorial de $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$

As posibles raíces enteiras de $x^4+x^3-x^2-2x$**-2** son os **divisores de -2**:

1,-1, 2,-2

Vexamos pola Regra de Ruffini se 1 é raíz de P	Vexamos pola Regra de Ruffini se -1 é raíz de P
1 -1 -1 -2 -2	1 -1 -1 -2 -2
1) 1 0 -1 -3	-1) -1 2 -1 3
1 0 -1 -3 **-5 distinto de 0,**	1 -2 1 -3 **1 distinto de 0,**
1 non é raíz de P	**-**1 non é raíz de P

Vexamos pola Regra de Ruffini se 2 é raíz de P	Vexamos pola Regra de Ruffini se 1 é raíz de P
1 -1 -1 -2 -2	1 -1 -1 -2 -2
2) 2 2 2 0	-2) -2 6 -10 24
1 1 1 0 **-2 distinto de 0,**	1 -3 5 -12 **22 distinto de 0,**
2 non é raíz de P	-2 non é raíz de P

$\boxed{\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2} \text{ Non ten raíces enteiras}}$

Non podemos achar a descomposición factorial deste polinomio.

EXERCICIOS resoltos

25. Se os coeficientes de $P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+...+p_1x+p_0$ son números enteiros, as posibles raíces racionais de P(x) son da forma

$$\frac{\text{divisor de } p_0}{\text{divisor de } p_n}$$

Acha a descomposición factorial de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$

As posibles raíces en Q de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$ son os cocientes dos divisores de 6 entre os divisores de 12,

$$\frac{\text{divisores de } 6}{\text{divisores de } 12};\qquad \frac{\pm1\ \ \pm2\ \ \pm3\ \ \pm6}{\pm1\ \ \pm2\ \ \pm3\ \ \pm4\ \ \pm6\ \ \pm12}$$

$$\pm1\quad \pm\frac{1}{2}\quad \pm\frac{1}{3}\quad \pm\frac{1}{4}\quad \pm\frac{1}{6}\quad \pm\frac{1}{12}\quad \pm2\quad \pm\frac{2}{3}\quad \pm3\quad \pm\frac{3}{2}\quad \pm\frac{3}{4}\quad \pm6$$

É fácil ver coa regra de Ruffini que nin 1, nin -1 son raíces de P.

Vexamos pola Regra de Ruffini se 1/2 é raíz de P

	12	4	-17	6
1/2)		6	5	-6
	12	10	-12	**0**

1/2 é raíz de P.

Ao resolver a ecuación $12x^2+10x-12=0$, obtense que -3/2 e 2/3 son raíces de P.

$$\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}=12\cdot(x-1/2)\cdot(x+3/2)\cdot(x-2/3)$$

26. Acha a descomposición factorial de $\mathbf{x^4-4}$

Busquemos as raíces racionais de $\mathbf{x^4-4}$. As posibles raíces en Q son os cocientes dos divisores de -4 (coeficiente de menor grao) entre os divisores de 1 (coeficiente de maior grao),

$$\frac{\text{divisores de } -4}{\text{divisores de } 1};\qquad \frac{\pm1\quad \pm2\quad \pm4}{\pm1}$$

$$\pm1\quad \pm2\quad \pm4$$

É fácil ver coa regra de Ruffini que ningún dos posibles valores son raíces de x^4-4. O polinomio non ten raíces racionais.

Se se recoñece x^4-4 como unha diferenza de cadrados, $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ resultará fácil a descomposición factorial: $x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
O primeiro factor é primo, pero o segundo volve ser unha diferenza de cadrados $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$$

EXERCICIOS resoltos

27. Acha a descomposición factorial de $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$

As posibles raíces racionais deste polinomio son os divisores de 12

$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 4 \quad \pm 6 \quad \pm 12$

Coa regra de Ruffini miramos que divisores son raíces do polinomio

	1	-7	4	12
-1)		-1	8	-12
	1	**-8**	**12**	**0**
2)		2	-12	
	1	-6	**0**	

$\boxed{\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)}$

28. Acha a descomposición factorial de $(\mathbf{2x^3+x+3/2})^2$**-**$(\mathbf{x^3+5x-3/2})^2$

Aplícanse as **identidades notables**:

diferenza de cadrados = suma por diferenza:

$(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2=(3x^3+6x)\cdot(x^3-4x+3)$

O primeiro factor $(3x^3+6x)$ descomponse sacando **factor común** 3x, $(3x^3+6x)=3x\cdot(x^2+2)$; x^2+2 é primo pois a ecuación de segundo grao $x^2+2=0$ non ten raíces reais.

Para (x^3-4x+3) **búscanse as súas raíces racionais**

1	-1	3	-3

Vemos que 1 é raíz

	1	0	-4	3
1)		1	1	-3
	1	1	-3	**0**

$(x^3-4x+3)=(x-1)\cdot(x^2+x-3)$

Para descompoñer x^2+x-3 resólvese a **ecuación de segundo grao** $x^2+x-3=0$ que ten por solucións

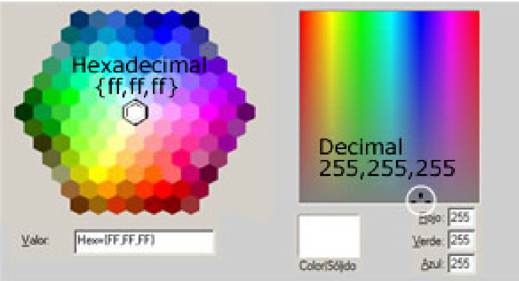
$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$$\boxed{\left(2x^3+x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(x^3+5x-\frac{3}{2}\right)^2=3x\cdot(x^2+2)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)}$$

Para practicar

1. O número 5352 está en base 7. Cal é o seu valor no sistema decimal? Débese calcular o valor numérico en 7 do polinomio de coeficientes 5 3 5 2.

2. A cantidade de cor adóitase expresar no sistema hexadecimal ou de base 16, este sistema ten 16 cifras:0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 e neste sistema a cantidade **38** de cor azul equivale a **3**·16+**8**=56 en decimal



Estas imaxes pódense ver ao escoller a cor en Word. A cantidade de vermello, verde e azul define calquera cor.

Expresa en decimal as cantidades hexadecimais 62 e 5d de cor azul.

3. Acha P(x)-5·Q(x) sendo $P(x)=4x^2+4x$ e $Q(x)=6x^2+2x$.

4. Multiplica os polinomios $P(x)=4x^2-7x+3$ e $Q(x)=-x^2+5$.

5. Acha o cociente e o resto da división de $-4x^3+7x^2-x-5$ entre $-2x^2-5x-2$.

6. Fai a división de $3x^3+x-4$ entre $x+2$ coa regra de Ruffini.

7. Aplica o teorema do resto para calcular o resto da división de $3x^3-5x^2+7$ entre $x-5$.

8. a) Acha m para que $x^3+mx^2-3mx+3$ sexa divisible por $x+5$

b) Acha m para que $x^3+mx^2-5mx+6$ sexa divisible por $x-5$.

9. Efectúa las potencias

a) $(2x+3)^2$ b) $(2x-1)^3$

c) $(x-3)^2$ d) $(x+2)^3$

10. Resolve as seguintes ecuacións aplicando as identidades notables:

a) $x^2+4x-21=0$

b) $x^2-10x+9=0$

11. Acha a fila 4ª do triángulo de Pascal Cal é o coeficiente de grao 2 de $(x+1)^4$?

12. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas

a) $\dfrac{x^2+8x+16}{3x+12}$

b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$

c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{12x^2-3}$

13. Acha a descomposición en factores primos dos seguintes polinomios

a) $4x^7+12x^6-4x^5-12x^4$

b) $3x^8+9x^7-12x^5$

c) $12x^3-16x^2-7x+6$

d) $8x^3-20x^2+22x-7$

e) $2x^3-9x^2+5x+5$

14. Aplica as identidades notables para descompoñer os seguintes polinomios

a) x^4-6^4

b) $x^4-x^2-24x-12^2$

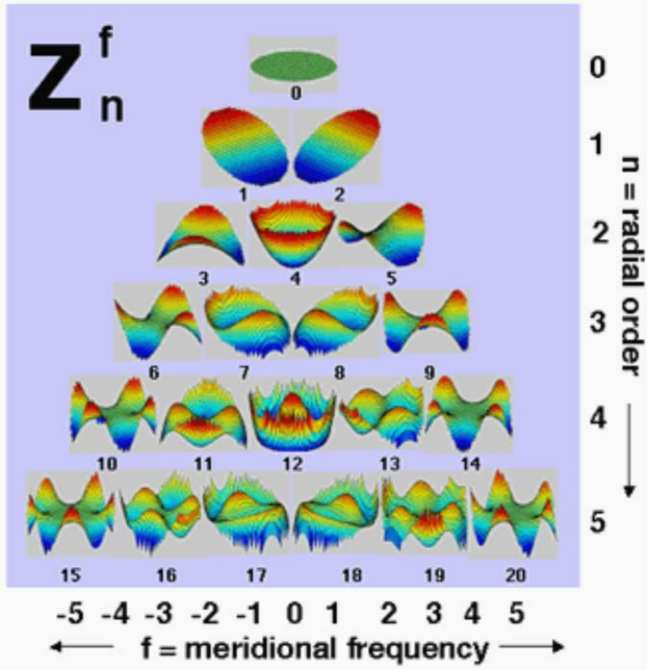
c) $x^4-98x^2+49^2$

15. Un polinomio de grao 3 ten por raíces –1, 4 e 1. Acha a súa descomposición factorial sabendo que o seu valor en 2 é -24.

Para saber más

Os polinomios noutras ciencias

Se investigaches na web, é probable que atopases moitos polinomios con nome propio: Polinomios de Lagrange, Hermite, Newton, Chevichev... copiamos aquí un extracto dun blog que fala dos polinomios de Zernike e a súa aplicación na óptica para corrixir defectos visuais.



...As matemáticas, cos polinomios de Zernike, ofrécennos un método para descompoñer superficies complexas nas súas compoñentes máis simples. **Así, con este procedemento matemático podemos xerarquizar e definir todas as aberracións visuais**. Un esquema que está presente con moita frecuencia nas consultas de cirurxía refractiva é o das diferentes aberracións agrupadas e xerarquizadas:

O da xerarquía é fundamental, porque segundo cal sexa o grupo da aberración, terá máis ou menos importancia, será máis ou menos doada de corrixir, etc. Por exemplo, o número 4 corresponde á miopía (e o seu inverso, a hipermetropía), e o 3 e 5 corresponden ao astigmatismo...

Extracto da páxina
http://ocularis.es/blog/?p=29

Algoritmo de Euclides

A descomposición factorial de números ou de polinomios serve para simplificar fraccións.

Numéricas	Polinómicas
$\frac{18}{30}=\frac{2\cdot 3^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{3}{5}$	$\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{x}{x+2}$

Pero non resulta doado con este método simplificar calquera fracción, xa que a descomposición factorial pode resultar difícil de calcular. O algoritmo de Euclides é un método seguro para calcular o m.c.d. e poder así simplificar calquera fracción; baséase en que o m.c.d. do dividendo e do divisor é o m.c.d. do divisor e do resto.

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$$

Dividendo =divisor·cociente+resto
Polo tanto
m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)
Así se reducen os elementos dos que calcular o m.c.d.
Recorda esta igualdade

Achar o **m.c.d. de 1219 e 299**

$$\begin{array}{r|l} 1219 & 299 \\ \hline 23 & 4 \end{array}$$

Aplicamos que **m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)** logo basta calcular o **m.c.d.(299,23)**

$$\begin{array}{r|l} 299 & 23 \\ \hline 69 & 13 \\ 0 & \end{array}$$

m.c.d.(299,23)=m.c.d.(13,0)=13
pois todos os números son divisores de 0

Achar o **m.c.d. de $x^4+2x^3+7x^2+6x+9$ e $x^4+2x^3+6x^2+5x+6$**

Facemos a división

$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 7\ 6\ 9 & 1\ 2\ 6\ 5\ 6 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 3 & 1 \end{array}$$

Aplicamos que **m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)** e volvemos a dividir

$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 6\ 5\ 6 & 1\ 1\ 3 \\ \hline 1\ 3\ 5 & 1\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 6 & \\ 0\ 0 & \end{array}$$

O m.c.d. pedido é **1 1 3 = x^2+x+3**

Lembra o máis importante

Operacións con polinomios Regra de Ruffini e Teorema do resto

O resto da división por x-a é o valor numérico do dividendo en a

3	-5	0	1	1	-2
-3	6			3	1	2
	1	0		cociente	
	-1	2			
		2	1		
		-2	4		
			5 resto		

T. del resto

$5=3\cdot 2^3-5\cdot 2^2+1$

Regra de Ruffini

	3	-5	0	1
2		6	2	4
	3	1	2	5 resto

cociente

Triángulo de Pascal

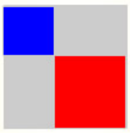
$(x+1)^0$	1
$(x+1)^1$	1 1
$(x+1)^2$	1 2 1
$(x+1)^3$	1 3 3 1
$(x+1)^4$	1 4 6 4 1

Raíces dun polinomio

Raíz 2	Raíz -2
Divisor x - 2	Divisor x+2

P(2)=0   P(-2)=0

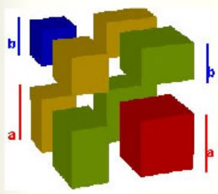
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$



$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

$(a+b)^3=$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$



Raíz dun polinomio
Raíz a
Divisor x-a
P(a)=0

As raíces racionais dun polinomio son da forma

$\dfrac{\text{Divisores do coef. de grao menor}}{\text{Divisores do coef. de grao maior}}$

Descomposición factorial

Os polinomios con coeficientes en IR primos son os de grao un e os de grado 2, ax^2+bx+c con $b^2-4ac<0$

Para calcular a descomposición factorial dun polinomio terase en conta as seguintes ferramentas:

Regra de Ruffini

Ecuación de 2° grao

Identidades notables

Identidades notables

Descomposición factorial

Auto-avaliación

1. Acha os coeficientes de $P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot R(x)$ sendo $P(x)=2x+1$, $Q(x)=5x^2-5$ e $R(x)=x^2+11x$.

2. Calcula o cociente e o resto da división de $6x^3-5x^2+4$ entre x^2+3.

3. Cales son os coeficientes de $(x+4)^3$?

4. É certa a igualdade $4x^2+10x+25=(2x+5)^2$?

5. Calcula m para que o resto de a división de $8x^2+mx+3$ entre $x+2$ sexa 3.

6. Se $P(x)=ax^2+bx+5$ e $a\cdot 6^2+b\cdot 6=4$, cal é o resto da división de P(x) entre x-6?

7. Acha unha raíz enteira do polinomio x^3+5x^2+6x+8

8. Acha unha raíz racional de $4x^3+5x^2+25x+6$

9. O polinomio $5x^3+7x^2-28x-12$ ten por raíces 2 e –3 Cal é a outra raíz?

10. As raíces dun polinomio de grao 3 son –5, 0 e 6. Calcula o valor numérico do polinomio en 7 sabendo que o seu coeficiente de maior grao é 3.

Solucións dos exercicios para practicar

1. 1899
2. 98, 93
3. $-26x^2-6x$
4. $-4x^5+7x^4-17x^2-35x+15$
5. Cociente=2x-17/2, resto= $\frac{-79}{2}x-22$
6. Cociente 3 -6 13 **resto -30**
7. $3\cdot5^3-5\cdot5^2+7=257$
8. a) m=61/20,

   b) Non pode divisible entre x-5
9. a) $4x^2+12x+9$

   b) $8x^3-12x^2+6x-1$

   c) x^2-6x+9

   d) $x^3+6x^2+12x+8$
10. a) $(x+2)^2-5^2=(x+2+5)\cdot(x+2-5)$;

    -7 e 3

    b) $(x-5)^2-4^2=(x-5+4)\cdot(x-5-4)$;1 e 9
11. 1 4 **6** 4 1
12. a) $\frac{x+4}{3}$

    b) $\frac{3x+6}{x-2}$

    c) $\frac{2x+1}{6x-3}$
13. a) $4x^4\cdot(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

    b) $3x^5\cdot(x+2)^2\cdot(x-1)$

    c) $12\cdot(x+2/3)\cdot(x-3/2)\cdot(x-1/2)$

    d) $(x-1/2)\cdot(8x^2-16x+14)$

    e) $(x+\frac{1}{2})\cdot2\cdot(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2})\cdot(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2})$
14. a) $(x^2+36)\cdot(x+6)\cdot(x-6)$

    b) $(x^2+x+12)\cdot(x-4)\cdot(x+3)$

    c) $(x+7)^2\cdot(x-7)^2$
15. $4\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)$

Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1. 12 28 1 -5
2. Cociente 6x-5, resto $-18x+19$
3. 1 12 48 64
4. No, $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
5. m=16
6. 9
7. –4
8. –1/4
9. –2/5
10. 252