5

Inecuacións

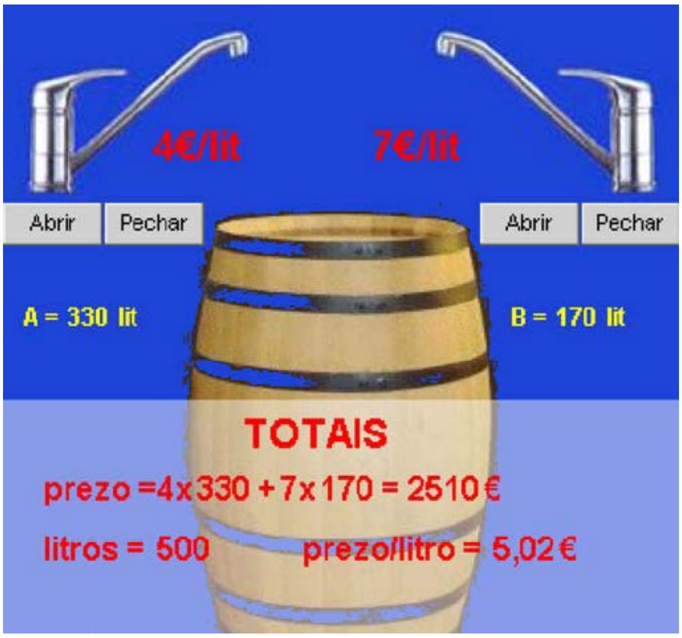
Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Resolver inecuacións de primeiro e segundo grao cunha incógnita.
- Resolver sistemas de ecuacións cunha incógnita.
- Resolver de forma gráfica inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas.
- Resolver de forma gráfica sistemas de inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas.
- Formular e resolver problemas con inecuacións.

Antes de empezar

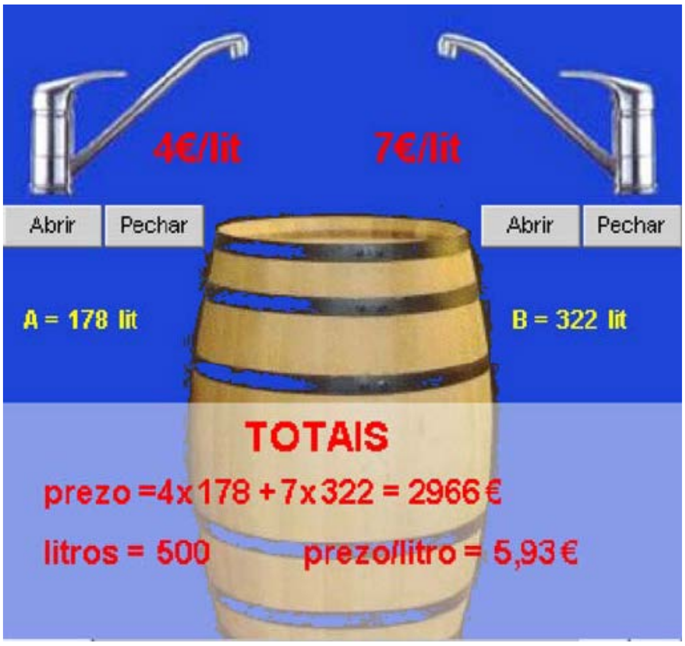
Para poñerte en situación



As inecuacións utilízanse con frecuencia para resolver problemas de mesturas. Aquí formulámosche un problema para que vaias investigando pola túa conta. No capítulo 4 has atopar a solución, se non a deches atopado ti só.

Un viñateiro dispón no seu almacén de dous tipos de viño: un a 4€ o litro e outro a 7€ o litro. Quere mesturalos para encher un tonel de 500 litros de capacidade e quere que a mestura non custe máis de 6 € nin menos de 5 € o litro. Descubre entre que valores debe estar a cantidade de litros do primeiro tipo de viño para que o prezo final estea no intervalo desexado.

As imaxes adxuntas preséntanche dúas situacións próximas á solución do problema. Usa a calculadora para tentar achegar máis os resultados ao valor real da solución.



1. Inecuacións de primeiro grao cunha incógnita

Definicións

Unha **desigualdade** é calquera expresión na que se utilice algún dos seguintes símbolos:

< (menor que), > (maior que)
≤ (menor ou igual que), ≥ (maior ou igual que)

Por exemplo:

$2<3$ (dous é menor que 3)
$7>\pi$ (sete é maior que pi)
$x\leq 5$ (x é menor ou igual que 5)

Unha **inecuación** é unha **desigualdade** entre expresións alxébricas. Aquí estudamos só as de primeiro grao.

Unha **inecuación de primeiro grao** é unha inecuación na que os seus dous membros son polinomios de grao menor ou igual a 1.

As **solucións** dunha inecuación son todos os números reais que fan que esa inecuación sexa certa.

Inecuacións equivalentes

O proceso de resolución de inecuacións que veremos despois baséase (igual que no caso das ecuacións) na transformación da inecuación inicial noutra equivalente máis sinxela.

Dise que dúas inecuacións son **equivalentes** se teñen o mesmo conxunto de solucións.

- ✓ Se aos dous membros dunha inecuación se lles suma ou resta a mesma cantidade, obtense unha inecuación equivalente.
- ✓ Se se multiplican ou dividen os dous membros dunha inecuación por unha mesma cantidade, obtense unha inecuación equivalente co mesmo sentido da desigualdade, se esa cantidade é positiva, e co sentido contrario se esa cantidade é negativa.

As desigualdades poden ser **certas** ou **falsas**.

Por exemplo:

$2 < 3$ é unha desigualdade certa

$2 > 3$ é unha desigualdade falsa

$x < 5$ é unha desigualdade que pode ser certa para algúns valores de x, e falsa para outros.

Os números ou as expresións que aparecen a ámbolos dous lados dos símbolos da desigualdade reciben o nome de **membros** da desigualdade.

Lembra que tamén se usa ese nome nas igualdades e nas ecuacións.

Unha **inecuación** é unha desigualdade da que os membros son expresións alxébricas.

Por exemplo:

$3x + 7y < 5$, $x^2 - 3x + 5 \geq 0$, $\frac{3-x}{2+x+y} < 5 - xy$

Se os dous membros da inecuación son polinomios falaremos dunha inecuación polinómica.

Os dous primeiros exemplos son deste tipo, en cambio o terceiro non o é.

Se ámbolos dous polinomios son de grao non superior a 1 falamos dunha inecuación de primeiro grao.

O primeiro exemplo é deste tipo.

O segundo exemplo ten unha **incógnita**; os outros teñen dúas.

Resolver unha inecuación é encontrar todos os números reais que fan que sexa certa. A estes números chamarémolos **solucións** da inecuación.

A diferenza das ecuacións, é frecuente que unha inecuación teña infinitas solucións, polo que para representar o conxunto desas solucions adóitase utilizar a notación de intervalos que usamos no primeiro capítulo destas leccións.

Por exemplo, dásenos a inecuación $2x < 6$, as solucións exprésanse de calquera destas formas:

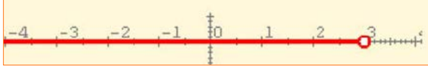
$\{x\in \mathbb{R} \,/\, x<3\}$

Conxunto de todos os números reais menores que 3,

$x \in (-\infty,3)$

ou números que pertencen ao intervalo indicado

ou, de forma gráfica:



$-2x + 2 \leq 1$

Restamos 2 aos dous membros e queda:

$-2x \leq -1$

Dividimos os dous membros por -2 e queda:

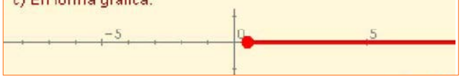
$x \geq \frac{-1}{-2} = 0{,}50$

Solucións:

a) Como conxunto: $\{x \in R \ / \ x \geq 0{,}50\}$

b) Como intervalo: $[0{,}50, +\infty)$ *(intervalo pechado)*

c) En forma gráfica:



$-1x + (2) > -1x + (-1)$

Restamos 2 y -1 x aos dous membros e queda:

$0 < -3$

Como isto sempre é certo,

as solucións son todos os números reais.

Solucións:

a) Como conxunto: $\{x \in R\}$

b) Como intervalo: $(-\infty, +\infty)$

Resolución

Este proceso consiste en ir transformando a inecuación inicial noutras equivalentes máis simples ata que o resultado final sexa dalgún dos seguintes tipos:

$$x<k\,,\,x\leqslant k\,,\,x>k\,,\,x\geqslant k$$

ou ata que o resultado final sexa contraditorio, e daquela, a inecuación non ten solucións.

EXEMPLO: $\mathbf{x+2\leq 1}$

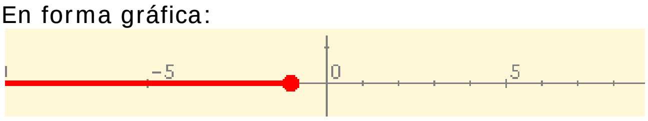
Restámoslles 2 aos dous membros e queda: $\mathbf{x \leq -1}$

O conxunto de solucións represéntase de calquera das seguintes maneiras:

a) Como conxunto: $\{x \in IR \ / \ x \leq -1\}$

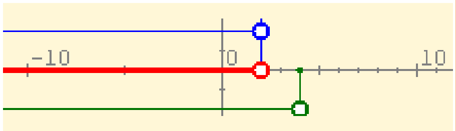
b) Como intervalo: $(-\infty, -1]$

c) En forma gráfica:



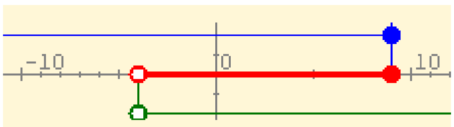
$$\begin{cases} x < 2 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in (-\infty, 2) \\ x \in (-\infty, 4) \end{matrix}$$

Solucións do sistema: $x \in (-\infty, 2)$



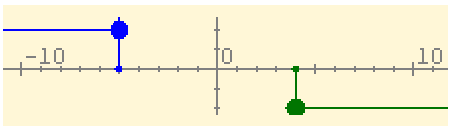
$$\begin{cases} x \leq 9 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in (-\infty, 9] \\ x \in (4, +\infty) \end{matrix}$$

Solucións do sistema: $x \in (4, 9]$



$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in (-\infty, -5] \\ x \in [4, +\infty) \end{matrix}$$

Solucións do sistema: **Non ten**



Sistemas de inecuacións

Un **sistema de inecuacións de primeiro grao** é un conxunto de dúas ou máis inecuacións de primeiro grao.

Para resolver un sistema de inecuacións cunha incógnita resólvese cada inecuación por separado. As solucións do sistema fórmanas todos os números reais que satisfagan todas e cada unha das inecuacións do sistema.

Cada inecuación do sistema debe resolverse de forma independente ata que quede nalgunha das formas seguintes:

$$x<k\,,\,x\leqslant k\,,\,x>k\,,\,x\geqslant k$$

Na marxe podes ver algúns exemplos de resolución de sistemas de inecuacións de primeiro grao cunha incógnita.

EXERCICIOS resoltos

1. En cada caso indica cal das inecuacións, I, II, III, IV é equivalente á dada:

a) Dada a inecuación $-4x \leq -3x-5$, indica cal das seguintes inecuacións é equivalente a ela: I) $-x \geq -5$ II) $x \leq -5$ III) $x \leq 5$ IV) $-x \leq -5$

b) Dada a inecuación $-9x \leq 6$, indica cal das seguintes inecuacións é equivalente a ela: I) $x \geq -\frac{6}{9}$ II) $x \leq -\frac{6}{9}$

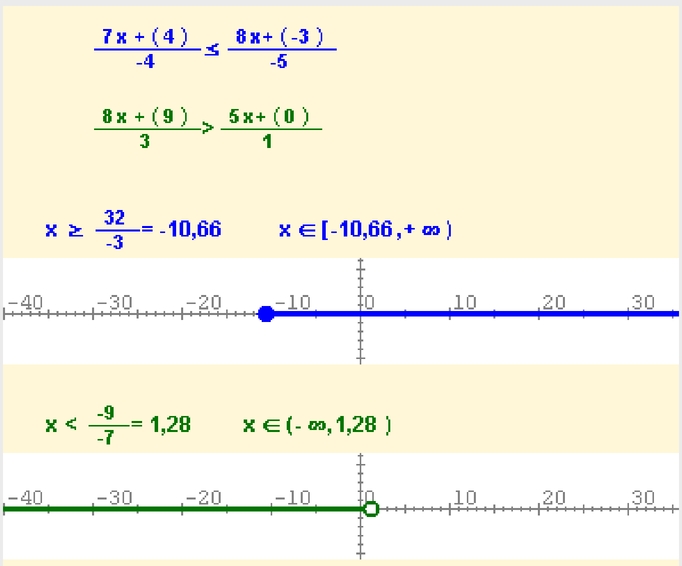
c) Dada a inecuación $\frac{-6x-5}{9} \leq 5$, indica cal das seguintes inecuacións é equivalente a ela: I) $x \geq -\frac{50}{6}$ II) $x \leq -\frac{50}{6}$

2. Resolve a inecuación $\frac{-6x+7}{-3} > \frac{8x-4}{2}$

$$\frac{-6x+7}{-3} > \frac{8x-4}{2} \Leftrightarrow -12x+14 < -24x+12 \Leftrightarrow 12x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$$

3. Resolve o seguinte sistema de inecuacións mostrando as solucións nas formas indicadas na explicación:



As solucións comúns son os puntos que son a un tempo maiores ou iguais que -10'66 e menores estritamente que 1,28.

Xa que logo, as solucións do sistema son os puntos do intervalo

[-10'66,1'28)

2. Inecuacións de segundo grao cunha incógnita.

RECORDA:

As solucións dunha ecuación de segundo grao

$ax^2+bx+c=0$

veñen dadas pola fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

sempre que o discriminante, b^2-4ac, sexa maior ou igual ca cero. E se chamamos r1 e r2 as posibles solucións, daquela:

$ax^2+bx+c = a(x-r1)(x-r2)$

Se o discriminante é nulo, só hai unha solución, r, y

$ax^2+bx+c = a(x-r)^2$

Resolución por descomposición

Unha **inecuación de segundo grao** é toda inecuación equivalente a unha das seguintes:

$$ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c<=0$$
$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c>=0$$

onde a, b e c son números reais.

Se o polinomio que caracteriza a inecuación ten raíces reais, pódese usar a súa descomposición en factores para resolvela como un sistema de ecuacións de primeiro grao. Pódense dar os seguintes casos:

CASO 1: a (x-r1) (x-r2) <0

Para que o produto de tres factores sexa negativo han de ser negativos un ou tres deles.

- Se a é positivo, só outro dos factores pode selo, polo que a inecuación é equivalente aos sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} x-r1<0 \\ x-r2>0 \end{array}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{array}{l} x-r1>0 \\ x-r2<0 \end{array}\right\}$$

- Se a é negativo, os outros dous deben ser simultaneamente positivos ou negativos, polo que a inecuación é equivalente aos sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} x-r1<0 \\ x-r2<0 \end{array}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{array}{l} x-r1>0 \\ x-r2>0 \end{array}\right\}$$

CASO 2: a (x-r1) (x-r2) ≤ 0

A única diferenza co caso anterior é que agora os intervalos son pechados.

CASO 3: a (x-r1) (x-r2) > 0

Semellante ao caso 1.

CASO 4: a (x-r1) (x-r2) ≥ 0

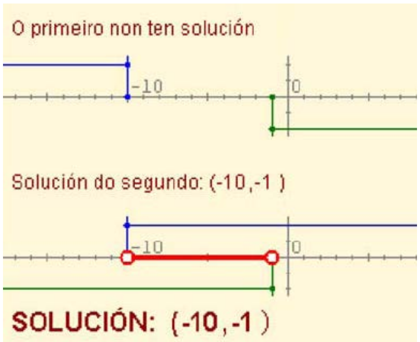
Semellante ao caso 2.

EXEMPLOS CASO 1:

7(x+10)(x+1)<0

equivale aos sistemas:

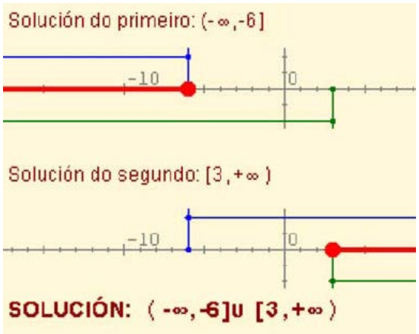
$$\begin{cases} x<-10 \\ x>-1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x>-10 \\ x<-1 \end{cases}$$



-2(x+6)(x-3) ≤ 0

equivale aos sistemas:

$$\begin{cases} x\le -6 \\ x\le 3 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x\ge -6 \\ x\ge 3 \end{cases}$$



CASO 5: $a\,(x-r)^2 < 0$

Se a>0 nunca é certo e non ten solucións. Se a<0 sempre é certo e as solucións son todos os números reais.

CASO 6: $a\,(x-r)^2 \le 0$

Se a>0 só é certo se x=r, daquela, o conxunto solución ten un único elemento. Se a<0 sempre é certo e as solucións son todos os números reais.

CASO 7: $a\,(x-r)^2 > 0$

É como o caso 5 pero coas situacións ao revés.

CASO 8: $a\,(x-r)^2 \ge 0$

É como o caso 6 pero coas situacións ao revés.

Á esquerda podes ver algúns exemplos que ilustran este procedemento de resolución gráfica.

O cadrado dun nº distinto de 0 sempre é positivo, $(x-3)^2 \ge 0$.

- $-2(x-3)^2<0$ Solución: IR
- $2(x-3)^2\le 0$ Solución: x=3
- $2(x-3)^2>0$ Solución: IR
- $-2(x-3)^2>0$ Non ten solución

Resolución xeral

O procedemento empregado no apartado anterior é válido se o polinomio de segundo grao resultante ten raíces reais. No caso contrario non nos serve.

Neste apartado veremos un procedemento xeral que é válido para calquera inecuación de segundo grao, teña ou non raíces reais.

Este procedemento baséase en saber se a representación gráfica do polinomio (unha parábola) está aberta cara arriba ou cara abaixo e se corta o eixe das abscisas.

Consideremos o polinomio

$$ax^2+bx+c$$

Xa viches que a súa gráfica é unha parábola aberta cara arriba se a é positiva e cara abaixo se a é negativa.

O **discriminante** do polinomio é

$$\Delta=b^2-4ac$$

Se Δ>0 a gráfica corta o eixe X en dous puntos (x1 e x2 que se obteñen coa fórmula da ecuación de segundo grao); se Δ=0 a gráfica corta o eixe X nun único punto e se Δ<0 a gráfica non corta o eixe X.

$x^2-3x>0$

$y=x^2-3x$

a>0 a parábola está cara arriba

Solución: (-∞,0) U (3,+ ∞)

$2x^2-3x+3>0$

$y=2x^2-3x+3$

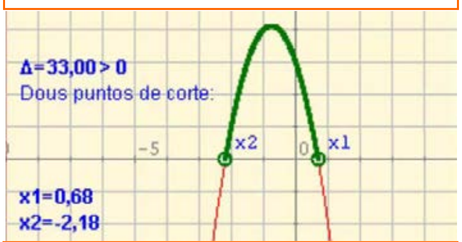
a>0 a parábola está cara arriba

Sen solución

$-2x^2-3x+3>0$

$y=-2x^2-3x+3$

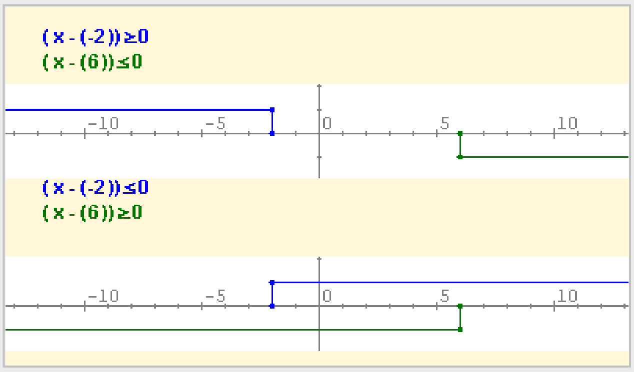
a<0 a parábola está cara abaixo



Solución: (-2,18 , 0,68)

EXERCICIOS resoltos

4. Resolve a inecuación seguinte por descomposición: $2x^2-8x-24 \le 0$



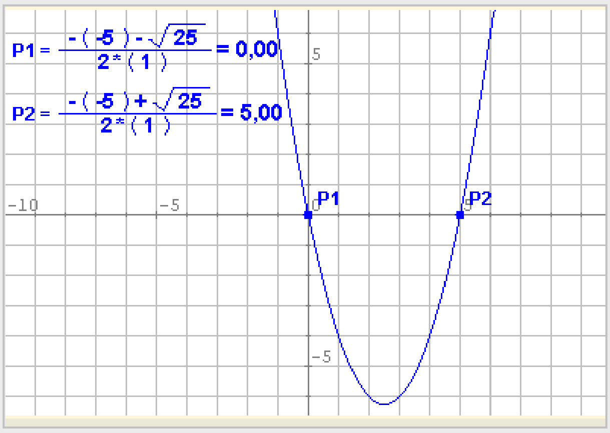
Achamos as raíces do polinomio:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+192}}{4} = \begin{matrix} 6 \\ -2 \end{matrix}$$

Descompoñemos a inecuación en factores: $2(x-6)(x+2) \le 0$.

A inecuación é equivalente aos dous sistemas da esquerda. O primeiro non ten solucións e as solucións do segundo e da nosa inecuación son os puntos do intervalo pechado **[-2,6]**

5. Resolve a inecuación seguinte en forma gráfica: $x^2-5x>0$



Achamos as raíces do polinomio:

$$x\ (x-5) = 0$$

É unha parábola aberta cara arriba (coeficiente principal 1 >0) que corta o eixe das abscisas nos puntos x=0 e x=5. Daquela, a solución da inecuación é

$$(-\infty,0) \cup (5,+\infty)$$

3. Inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas.

Definicións

Unha **inecuación de primeiro grao con dúas incógnitas** é calquera inecuación equivalente a algunha destas:

$ax+by+c<0$ $ax+by+c \le 0$

$ax+by+c>0$ $ax+by+c \ge 0$

Neste caso, as solucións non son conxuntos de números, senón conxuntos de parellas de números, polo que non se poden representar sobre unha liña recta: débense representar como subconxuntos do plano.

RECUERDA:

$ax+by+c = 0$

es la **ecuación general de una recta** en el plano.

Usaremos este hecho para resolver las inecuaciones de primer grado con dos variables.

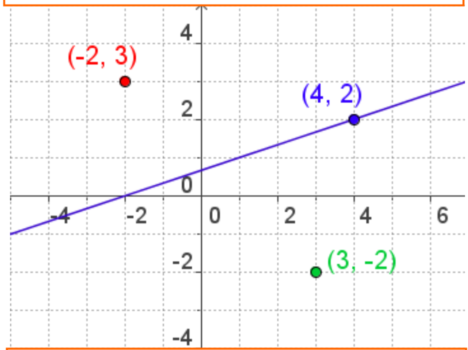
Resolución gráfica

Unha solución dunha inecuación de dúas variables é unha parella de números (x_0,y_0), tales que, ao substituír os seus valores nas incógnitas da inecuación, fan que a desigualdade sexa certa. Cada parella de números reais pódese representar como un punto do plano.

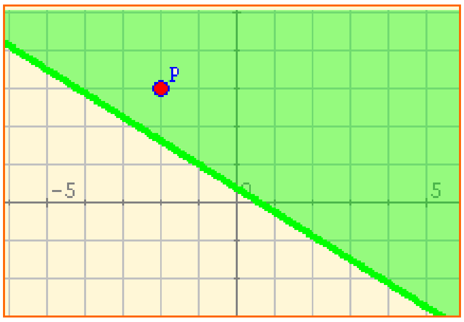
Xa que logo, **resolver a inecuación equivale a obter todos os puntos do plano cunhas coordenadas que fan que se verifique a desigualdade**.

Para iso procédese do seguinte xeito: debúxase a recta, elíxese un punto que non pertenza a ela e compróbase se as coordenadas do punto cumpren a desigualdade ou non; se a cumpren, a zona na que está o punto elixido é a solución da inecuación, se non a cumpren, a solución é a outra zona.

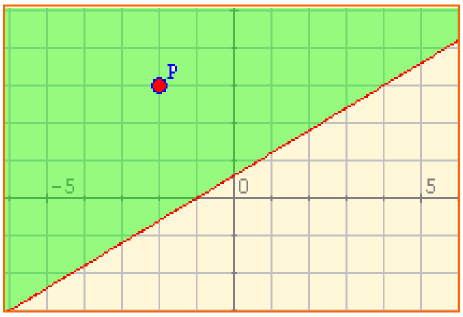
A recta **x-3y+2=0** divide o plano en dous semiplanos.
Descubre en que zonas do plano, os valores que se obteñen ao substituír as coordenadas dun punto calquera na ecuación da recta son positivos, negativos ou nulos.



A(4,2) 4-3·2+2=0
o punto está na recta
B(-2,3) -2-3·3+2=-7<0
C(2,-3) 2-3·(-3)+2=13>0



-5x-8y+3≤0 P(-2,3)
5·(-2)-8·3+3=-11<0
A zona verde é a solución, incluída a recta, posto que a desigualdade é ≤



3x-5y+3<0 P(-2,3)
3·(-2)-5·3+3=-18<0
A zona verde é a solución.

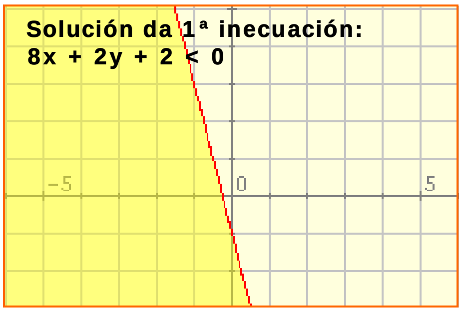
Sistemas de inecuacións

Un **sistema de inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas** é un conxunto formado por dúas ou máis inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas.

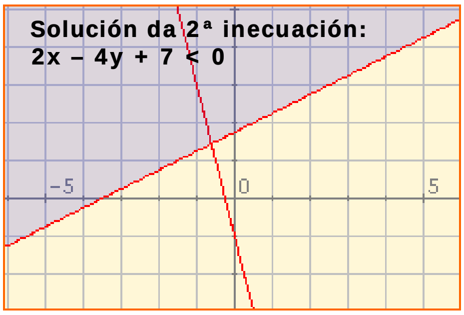
Como no caso dos sistemas cunha incógnita, resólvese cada inecuación por separado, e o conxunto de todas as solucións comúns a todas as inecuacións do sistema é o conxunto solución del.

Fíxate nos exemplos desenvolvidos e observa que se poden dar situacións sen solución.

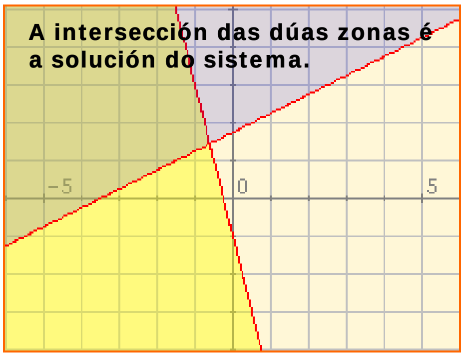
$8x + 2y + 2 < 0$
$2x - 4y + 7 < 0$



Solución da 1ª inecuación: $8x + 2y + 2 < 0$



Solución da 2ª inecuación: $2x - 4y + 7 < 0$

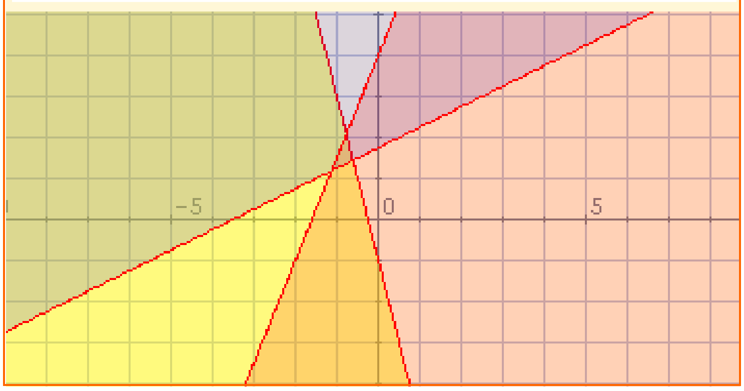


A intersección das dúas zonas é a solución do sistema.

Engadindo unha terceira inecuación:

$8x + 2y + 2 < 0$
$2x - 4y + 7 < 0$
$5x - 2y + 8 < 0$

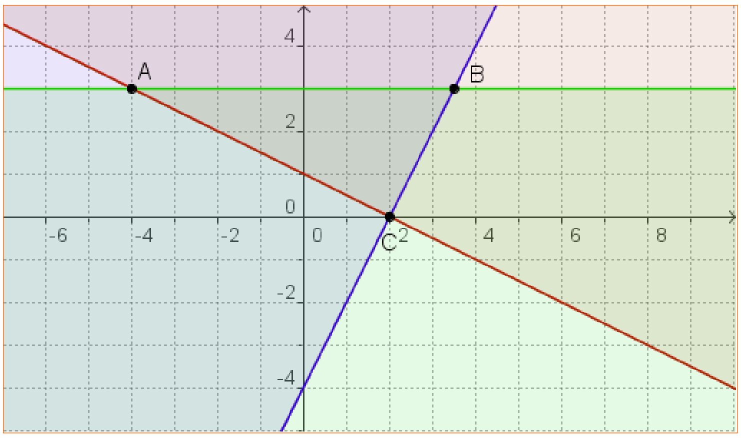
A solución é o triángulo común ás tres zonas



OUTRO EXEMPLO

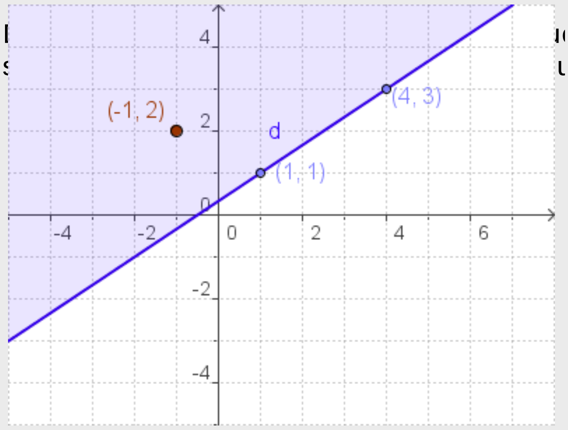
$x + 2y - 2 \geq 0$
$2x - y - 4 \leq 0$
$y - 3 \leq 0$

A solución é o triángulo de vértices ABC, común ás tres zonas



EXERCICIOS resoltos

6.



Podemos debuxar a recta dándolle dous valores a x e obtendo os correspondentes valores de y.

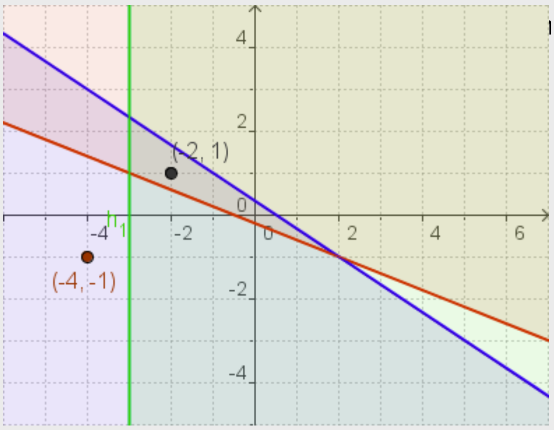
x=1 y=1 x=-2 y=-1

Deseguido substituímos as coordenadas de P no polinomio e vemos que a desigualdade é certa.

Xa que logo a solución é o semiplano onde está P, incluíndo a recta, porque o símbolo de desigualdade é menor ou igual.

7. Descubre se o punto P(-4,-1) é unha solución do sistema de inecuacións:

$$-2x-5y-1<0$$
$$2x+3y-1<0$$
$$-x-3<0$$



Observa no debuxo os valores que se obteñen ao substituír as coordenadas de P nos tres polinomios. Os valores obtidos cumpren as dúas últimas inecuacións pero non a primeira, polo tanto P non é unha solución do sistema.

As solucións son os puntos que estean por enriba da recta vermella (1ª), por debaixo da recta azul (2ª) e á dereita da recta verde (3ª). É dicir, todos os puntos do interior do triángulo que determinan as tres rectas.

Unha posible solución é Q (-2,1)

4. Problemas con inecuacións.

Formulación e resolución

Para resolver un problema con inecuacións debemos seguir os seguintes pasos:

1. **Asignación de variables**: poñerlles nome aos termos descoñecidos.
2. **Formulación**: establecer relacións entre os datos coñecidos e os descoñecidos, formulando unha ou varias inecuacións (de primeiro ou de segundo grao, cunha ou con varias incógnitas).
3. **Resolución**: de entre os métodos explicados aplicar o que se axuste á nosa formulación.

Un viñateiro dispón no seu almacén de dous tipos de viño: un a 4 € o litro e outro a 7 € o litro. Quere mesturalos para encher unha cuba de 500 litros de capacidade e quere que a mestura non custe máis de 6 € nin menos de 5 € o litro. Descubre entre que valores debe estar a cantidade de litros do primeiro tipo de viño para que o prezo final estea no intervalo desexado.

ASIGNACIÓN DE VARIABLES:

x=nº de litros do primeiro tipo

500-x=nº de litros do segundo tipo

FORMULACIÓN:

$4x+7(500-x)>5\cdot 500$

$4x+7(500-x)<6\cdot 500$

RESOLUCIÓN:

$4x+3500-7x>2500 \rightarrow -3x>-1000$

$\rightarrow x<\dfrac{1000}{3}=333,3...$

$4x+3500-7x<3000 \rightarrow -3x<-500$

$\rightarrow x>\dfrac{500}{3}=166,6...$

SOLUCIÓN:

x pode tomar calquera valor entre 167 e 333 litros.

EXERCICIOS resoltos

Problema 1

Un fabricante de pensos quere obter unha tonelada dun determinado penso, para vendelo a 0,21€/kg. Para obtelo vai mesturar dous tipos de penso dos que xa dispón e que custan a 0,24€/kg e 0,16€/kg respectivamente.

1) Calcula a cantidade que debe entrar polo menos na mestura do penso máis barato para non perder diñeiro.
2) Cales deben ser as cantidades de cada tipo na mestura se quere gañar polo menos 0,03€/kg?

Asignación de variables: x=nº kg do tipo barato 1000-x: nº de kg do tipo caro

Formulación: Custo da mestura: $0,16x+0,24(1000-x)$

Para non perder diñeiro debe cumprir: $0,16x+0,24(1000-x)\le 0,21\cdot 1000$

Para gañar polo menos 0,03€/kg debe ser: $0,16x+0,24(1000-x)\le 0,18\cdot 1000$

Resolución: a) $-0,08x\le -30 \rightarrow x\ge 30/0,08 \rightarrow x\ge 375$ kg

b) $-0,08x\le -60 \rightarrow x\ge 60/0,08 \rightarrow x\ge 750$ kg

Problema 2

Unha biblioteca ten un orzamento de 600 € para adquirir exemplares de dúas novas novelas que se editaron. Cada exemplar da primeira custa 25 € e cada exemplar da segunda 30 €. Cantos exemplares de cada unha pode adquirir? Representa o problema en forma dun sistema de inecuacións, represéntao graficamente e indica varias posibles solucións.

x=nº exemplares da 1ª y: nº de exemplares da 2ª

Formulación: $25x+30y\le 600$ $x>0$ $y>0$

Solución: Calquera punto da zona sombreada con valores enteiros é solución do problema. Se o punto está na recta axústase de todo ao orzamento. Por exemplo x=10, y=10 ou x=6, y=15.

Para practicar

1. Inecuacións con valor absoluto.
Resolve as seguintes inecuacións:

a) $|x+6| < 1$

b) $|-x-4| \leq 4$

c) $|-2x-1| > 3$

d) $|2x-4| \geq 5$

2. Inecuacións de segundo grao.
Resolve as inecuacións:

a) $2x^2 - x + 2 \leq 0$

b) $-2x^2 + 6x + 1 \leq 0$

c) $-x^2 + 7x - 9 \geq 0$

d) $(x - 8)(x - 1) < 0$

3. Inecuacións racionais.

Resolve as inecuacións:

a) $\dfrac{x+4}{1-x} < 0$

b) $\dfrac{2x+4}{3+x} > 0$

c) $\dfrac{3x-5}{2x+1} \leq 0$

d) $\dfrac{x+4}{1-x} \geq 0$

4. Inecuacións con dúas incógnitas.
Resolve os seguintes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x < 1 \\ -4x - 3y > 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y < 2 \\ -5x + 4y > 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -4x - y < 4 \\ -5x - 4y > 4 \end{array}\right\}$

EXPLICACIÓN E EXEMPLO

No primeiro tema vimos que o valor absoluto da diferenza entre dous números reais, $|x-y|$, equivale a calcular a distancia entre os puntos que representan a tales números.

É frecuente encontrar problemas nos que é necesario calcular todos os puntos nos que distancia a un punto fixo sexa maior ou menor ca certo valor prefixado. Nestes casos o problema equivale a resolver algunha destas inecuacións::

$$|x-a|<b,\ |x-a|\leq b,\ |x-a|>b,\ |x-a|\geq b$$

Que a distancia entre x e a sexa menor ca b significa que x se encontra *dentro* do intervalo (a-b,a+b), polo tanto, x > a-b e, ao mesmo tempo, x < a+b, polo que a inecuación

$|x-a|<b$ é equivalente ao sistema $\left(\begin{array}{l} x-a > -b \\ x-a < b \end{array}\right)$ e

$|x-a|\leq b$ é equivalente ao sistema $\left(\begin{array}{l} x-a \geq -b \\ x-a \leq b \end{array}\right)$

Que a distancia entre x e a sexa maior ca b significa que x se encontra *fora* do intervalo (a-b,a+b), polo tanto, x < a-b ou x > a+b, polo que as solucións da inecuación

$$|x-a|>b$$

son todas as solucións de $x-a<-b$ e todas as de $x-a> b$;
e as solucións de

$$|x-a|\leq b$$

son todas as solucións de $x-a\leq -b$ e todas as de $x-a\geq b$.

Observa que nestes casos non se trata dun sistema de inecuacións senón de todas as solucións das dúas.

EXPLICACIÓN:

Chamamos **inecuacións racionais** ás inecuacións equivalentes ás do tipo:

$$\frac{ax+b}{cx+d}<0 \quad \text{ó} \quad \frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$$

A dificultade destas inecuacións está en que non sabemos se cx+d é positivo ou negativo, polo que non podemos quitar o denominador sen máis. Por iso, para resolver este tipo de inecuacións debemos transformalas previamente en dous sistemas de inecuacións, tendo en conta que, para que o cociente sexa negativo, se o denominador é negativo o numerador debe ser positivo e viceversa:

Así a inecuación $\dfrac{ax+b}{cx+d}<0$ é equivalente á parella de sistemas:

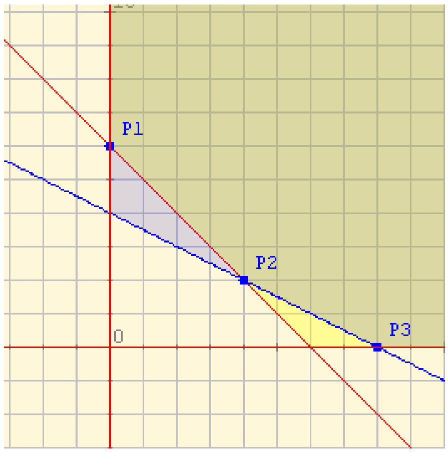
$$\left(\begin{array}{l} ax+b>0 \\ cx+d<0 \end{array}\right) \quad \text{ó} \quad \left(\begin{array}{l} ax+b<0 \\ cx+d>0 \end{array}\right)$$

que se resoven polos procedementos coñecidos e as solucións da inecuación inicial son a unión das solucións de ámbolos dous sistemas.

Para saber máis

Para que serven as inecuacións?

Unha das principais utilidades das inecuacións é a súa aplicación aos **problemas de decisión**: consiste en programar unha situación co obxectivo de decidirse por unha alternativa que sexa **óptima**. En xeral, o proceso de **optimizar** consiste en lograr un resultado **máximo** ou **mínimo** segundo lle conveña ao problema formulado. Mira o exemplo adxunto.



PROGRAMACIÓN DUNHA DIETA PARA CEBAR ANIMAIS

Téntase programar unha dieta con dous alimentos A e B.

Unha unidade do alimento A contén 500 calorías; unha unidade de B contén 500 calorías e 20 gramos de proteínas. A dieta require como mínimo 3000 calorías e 80 gramos de proteínas diarias. Se o prezo dunha unidade de A é 8 e o dunha unidade B é 12, que cantidade de unidades de A e de B debe comprar para satisfacer as esixencias da dieta a un custo mínimo?.

O esquema seguinte mostra as cantidades respectivas en forma ordenada.

	A	B	mínimo
Calorías	500	500	3000
Proteínas	10	20	80
Prezo	8	12	**?**

Sexan: **x** o número de unidades do alimento A, **y** o número de unidades do alimento B. De acordo con isto, a inecuación $500x + 500y >= 3000$ representa a restrición ou condición relativa ás calorías. Igualmente, $10x + 20y >= 80$ corresponde á restrición referida á cantidade de proteínas. Ademais, débese cumprir que $x >= 0$ e $y >= 0$, xa que en ningún caso a cantidade de alimentos A ou B pode ser negativa.

A rexión en cor verde é a intersección dos conxuntos solución das inecuacións formuladas e chámase **rexión de solucións factibles**, xa que as coordenadas de calquera dos seus puntos satisfán as restricións impostas.

Pero aínda non se considerou o prezo posible dos alimentos. Se x e y son as cantidades dos alimentos A e B, respectivamente, e os prezos son 8 e 12, daquela a **función custo** é: $\mathbf{F = 8x + 12y}$. Pódese probar que esta función se optimiza, neste caso tomando un valor mínimo, para aqueles valores de x e y que corresponden a un vértice no gráfico.

Vértices	Valor da función custo
(0,6) x = 0; y = 6	F = 8 x 0 + 12 x 6 = 72
(4,2) x = 4; y = 2	F = 8 x 4 + 12 x 2 = 32 + 24 = 56
(8,0) x = 8; y = 0	F = 8 x 8 + 12 x 0 = 64

Dos tres valores da función custo F, o mínimo é 56. Corresponde a x = 4 e y = 2, é dicir, a 4 unidades de A e 2 unidades de B.

Tales cantidades de A e B proporcionan un total de calorías e proteínas de acordo coas esixencias formuladas.
4 unidades de A : 4 x 500 = 2000 calorías 2 unidades de B : 2 x 500 = 1000 calorías Total = 3000 calorías
4 unidades de A : 4 x 10 = 40 gramos de proteínas 2 unidades de B : 2 x 20 = 40 gramos de proteínas
Total = 80 gramos de proteínas

O custo mínimo para lograr isto é 56.
Con esta cantidade, pódense adquirir 4 unidades do alimento A e 2 do B.

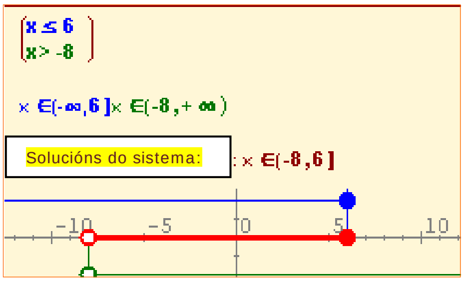
Lembra o máis importante

Inecuacións cunha incógnita

As súas solucións exprésanse en forma de intervalos, abertos, cando as desigualdades son estritas (< , >), e pechados no caso contrario (< =, = >).

Inecuacións de dúas incógnitas

As súas solucións son semiplanos e resólvense en forma gráfica.



Inecuacións de segundo grao.

Pódense resolver como un sistema ou en forma gráfica, descubrindo se a parábola que a representa corta o eixe X e se se abre cara arriba ou cara abaixo.

Inecuacións equivalentes

Se aos dous membros dunha inecuación lles sumamos a mesma cantidade obtense unha inecuación equivalente:

x < y <====> x+a < y+a

Se os dous membros dunha inecuación se multiplican pola mesma cantidade, non nula, obtense unha inecuación equivalente (**pero ollo co signo**):

a>0 ==> (x < y <====> ax < ay)

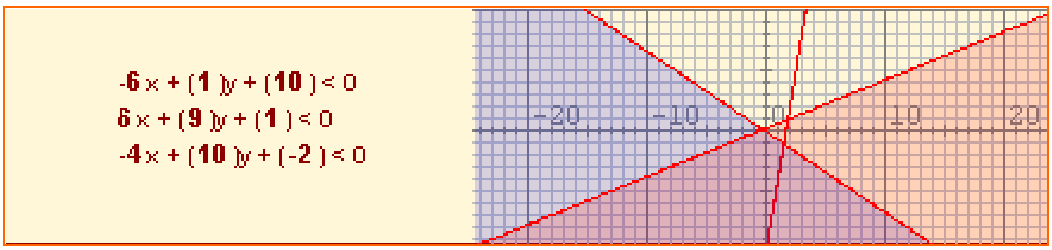
a<0 ==> (x < y <====> ax > ay)

Sistemas cunha incógnita

Cada inecuación resólvese de forma independente. As solucións do sistema son as comúns a todas elas. Exprésanse como intervalos ou como unión de intervalos.

Sistemas con dúas incógnitas

Cada inecuación resólvese de forma independente. As solucións do sistema son as comúns a todas elas. Resólvense de forma gráfica.



Auto-avaliación

1. Resolve a inecuación: $\dfrac{-2x-4}{3} < 0$

2. Un móbil desprázase en liña recta a unha velocidade que varía entre 69 m/s e 84 m/s. Entre que distancias dende o punto de partida está o móbil ao cabo de dez horas?

3. Resolve o sistema $\left.\begin{matrix} x < 5 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\}$.

4. Resolve o sistema $\left.\begin{matrix} x > 5 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\}$.

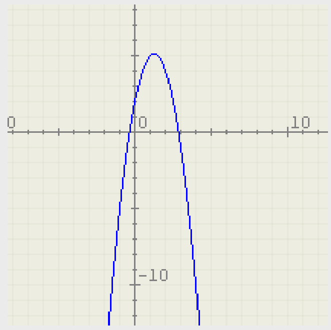
5. Resolve a inecuación $-2x^2 - 16x - 32 \geq 0$

6. Resolve a inecuación $-2x^2 + 14x - 20 \geq 0$

7. A imaxe adxunta é a gráfica do polinomio de segundo grao da inecuación $-2x^2 + 5x + 2 < 0$. Indica cal é o conxunto solución dela.

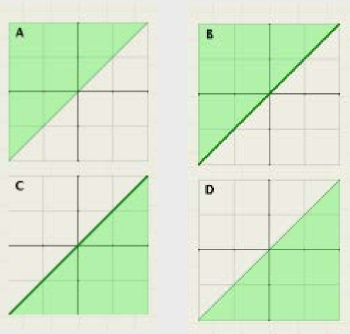
a) No ten solucións
b) Todos os números reais
c) Un intervalo finito
d) A unión de dous intervalos infinitos

7



8. Indica cal das seguintes imaxes representa o conxunto solución da inecuación $x < y$

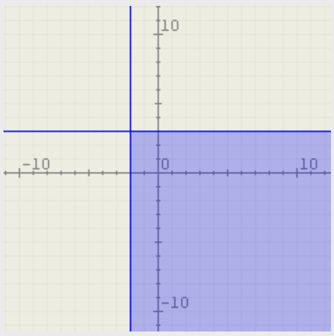
8



9. Indica cal dos seguintes sistemas de inecuacións con dúas incógnitas ten como conxunto solución esta imaxe:

a) x<-2   y<3
b) x<-2   y>3
c) x>-2   y<3
d) x>-2   y>3

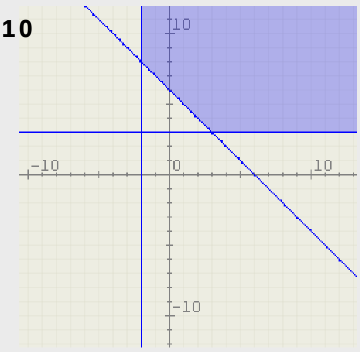
9



10. Indica cal dos seguintes sistemas de inecuacións con dúas incógnitas ten como conxunto solución esta imaxe:

a) x>-2   y>3   x+y>6
b) x<-2   y>3   x+y<6
c) x>-2   y<3   x+y<6
d) x>-2   y>3   x+y<6

10



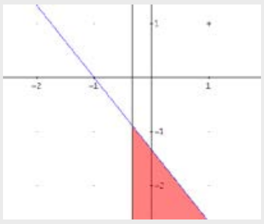
Solucións dos exercicios para practicar

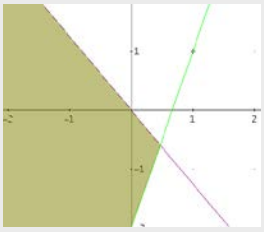
1) Inecuacións valor absoluto:
   a. (-7,-5)
   b. [-8,0]
   c. (-∞,-1)U(1,+ ∞)
   d. (-∞,-1/2]U[9/2,+ ∞)

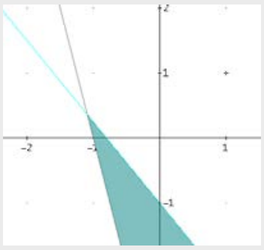
2) Inecuacións 2º grao:
   a. Non ten solucións
   b. (-∞,-0’16]U[3’16,+ ∞)
   c. [1’7,5’3]
   d. (1,8)

3) Inecuacións racionais
   a. (-∞,-4)U(1,+ ∞)
   b. (-∞,-3)U(-2,+∞)
   c. (-1/2,5/3]
   d. [-4,1)

4) Inecuacións con 2 incógnitas

a. 

b. 

c. 

Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1. (-2,+ ∞)
2. Entre 2484 e 3024 km
3. [2,5)
4. (5,+ ∞)
5. {-4}
6. (-∞ ,2) U (5,+ ∞)
7. Resposta D
8. Resposta A
9. Resposta C
10. Resposta A