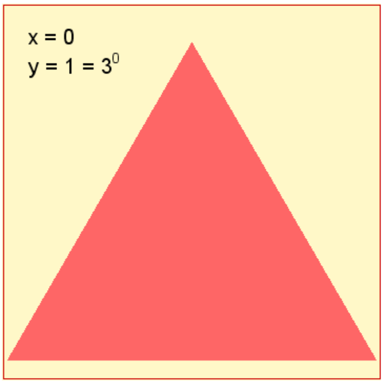
10 Funcións elementais

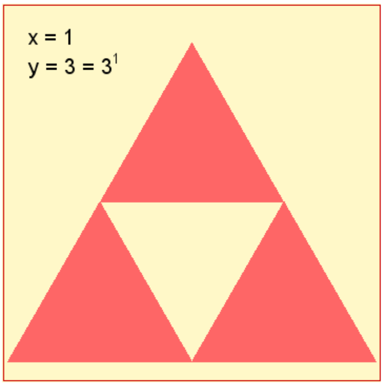
Obxectivos

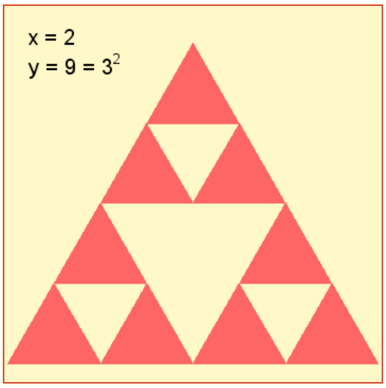
Nesta quincena aprenderás a:

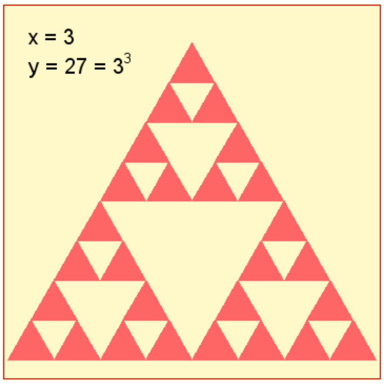
- Recoñecer e distinguir algunhas das funcións máis habituais.
- Utilizar algunhas funcións non lineais: cuadrática, de proporcionalidade inversa e exponenciais
- Recoñecer as características máis importantes deses tipos de funcións
- Representar e interpretar funcións "definidas a anacos"
- Buscar e interpretar funcións de todos estes tipos en situacións reais

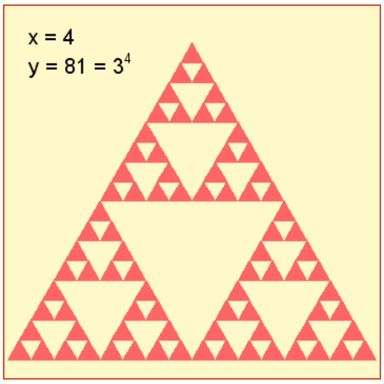
Antes de empezar

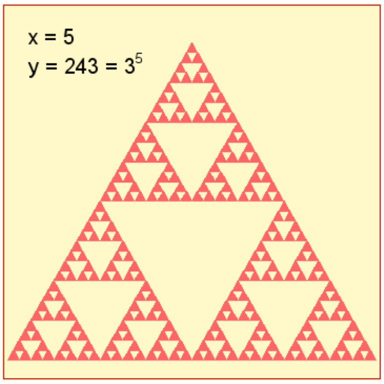












Investiga

Un investigador está a facer un estudio de certa poboación de microbios. Comprobou que cada hora que pasa cada elemento da poboación se divide en outros tres.
A animación que acabas de ver é unha simulación deste experimento.
A táboa adxunta mostra a relación entre o número de individuos da poboación e o tempo transcorrido:

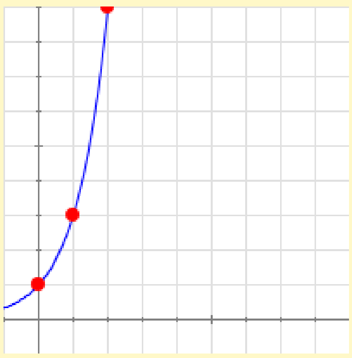
Horas	0	1	2	3	4	5	6
Nº mic	1	3	9	27	81	243	729

Como podes ver se chamamos x ao tempo e y ao número de individuos temos:

$$y = 3^x$$

É un exemplo de función exponencial.

A gráfica desta función ten este aspecto:
(arrastra a gráfica co rato para vela mellor)



Como podes comprobar o seu crecemento é moi rápido. Poderías calcular canto tempo tardaría en alcanzarse unha poboación dun millón de individuos?

1. Funcións polinómicas

Función de proporcionalidade directa

Como o seu nome indica, a función de proporcionalidade directa ou **función lineal** relaciona dúas magnitudes directamente proporcionais, é dicir, tales que o seu cociente é constante. O devandito cociente recibe o nome de **constante de proporcionalidade**.

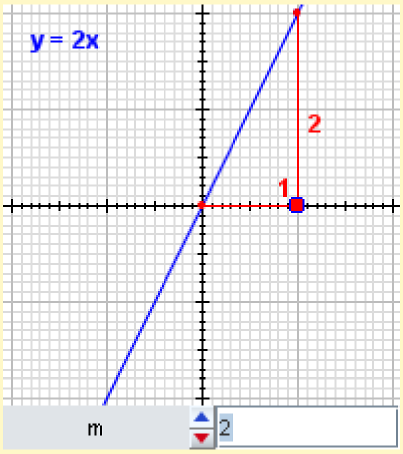
Da definición dedúcese que a ecuación da función lineal é

$$y = m \cdot x$$

Onde ***m*** é a constante de proporcionalidade.

A gráfica desta función é sempre unha liña recta que pasa pola orixe (*se x=0, entón y=0*), crecente se ***m*** é positiva, decrecente se ***m*** é negativa e tanto máis cerca da vertical canto maior sexa o valor absoluto de ***m***. Por ese motivo tamén se chama a ***m*** **pendente** da recta.

EN RESUMO: As ecuacións do tipo ***y = m·x*** representan funcións lineais ou de proporcionalidade directa.



· Se m>0 é crecente

· Se m<0 é decrecente

(Observa que sucede se m=0)

Pola súa parte, a constante de proporcionalidade é unha medida da inclinación da recta.

Chamámola **pendente**.

$$m = \frac{2}{1} = 2$$

As rebaixas

Chegaron as rebaixas e nunha tenda decidiron clasificar todos os seus produtos en tres lotes, A, B y C, aos que van a aplicar o 20%, o 30% e o 50% de desconto, respectivamente.

Se chamamos **x** ao prezo inicial e **y** ao prezo final, as táboas que ves debaixo mostran os cambios de varios produtos dos distintos lotes:

Lote A: 20%		Lote B: 30%		Lote C: 50%	
x	y	x	y	x	y
375,00 €	300,00 €	213,00 €	149,10 €	297,00 €	148,50 €
452,00 €	361,60 €	198,00 €	138,60 €	561,00 €	280,50 €
126,00 €	100,80 €	321,00 €	224,70 €	319,00 €	159,50 €
180,00 €	144,00 €	202,00 €	141,40 €	56,00 €	28,00 €
412,00 €	329,60 €	135,00 €	94,50 €	87,00 €	43,50 €

Lote A: 20%		
x	y	y/x
375,00 €	300,00 €	0,8
452,00 €	361,60 €	0,8
126,00 €	100,80 €	0,8
180,00 €	144,00 €	0,8
412,00 €	329,60 €	0,8

Imos a analizar cada caso dividindo o prezo rebaixado polo prezo inicial.

Como podes observar, no primeiro lote todos os cocientes son iguais. Como vimos, iso significa que o prezo rebaixado é **directamente proporcional** ao prezo inicial e, neste caso, a constante de proporcionalidade é 0,8.

Polo tanto, para o lote A temos: ***y = 0,8·x***

Lote B: 30%			Lote C: 50%		
x	y	y/x	x	y	y/x
213,00 €	149,10 €	0,7	297,00 €	148,50 €	0,5
198,00 €	138,60 €	0,7	561,00 €	280,50 €	0,5
321,00 €	224,70 €	0,7	319,00 €	159,50 €	0,5
202,00 €	141,40 €	0,7	56,00 €	28,00 €	0,5
135,00 €	94,50 €	0,7	87,00 €	43,50 €	0,5

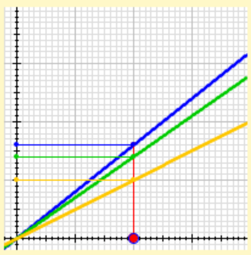
Nos outros lotes sucede algo parecido, pero en cada caso a constante de proporcionalidade é diferente de maneira que:

para o lote B temos: ***y = 0,7·x***

para o lote C temos: ***y = 0,5·x***

en cualquera caso todas teñen a forma ***y = m·x***

Imos analizar agora as gráficas das tres funcións: Como ves as tres son ***liñas rectas que pasan pola orixe***, con maior inclinación canto máis grande é a constante de proporcionalidade.



x = 200,00 €

Lote A:
y = 160,00 €

Lote B:
y = 140,00 €

Lote C:
y = 100,00 €

EXERCICIOS resoltos

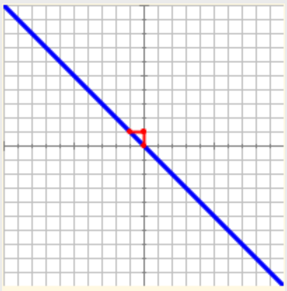
1. Descobre se as funcións definidas polos datos da táboas adxuntas son ou non son funcións lineais. En caso afirmativo calcula o seu pendente e debuxa a súa gráfica:

x	y	y/x
-3	4,55	-1,52
-1	0,51	-0,51
1	0,51	0,51
3	4,55	1,52
5	12,64	2,53

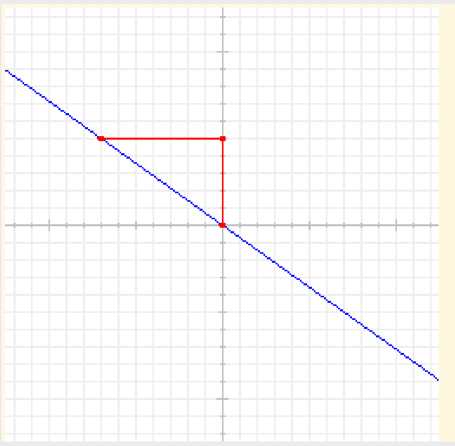
Como vemos, ao dividir y por x no se obtén sempre o mesmo valor, polo tanto as dúas magnitudes non son directamente proporcionais e a función que representa esta táboa **non é lineal**.

x	y	y/x
-3	3	-1
-1	1	-1
1	-1	-1
3	-3	-1
5	-5	-1

Neste caso os cocientes son todos iguais, polo tanto, as magnitudes que representan x e y son directamente proporcionais e a función que relaciona **si é lineal**. A pendente é a constante de proporcionalidade m=-1 e a gráfica é



2. Determina a pendente e a ecuación da función cuxa gráfica é:



Como é unha recta que pasa pola orixe trátase dunha función lineal de ecuación y=mx.

Para achar a pendente localizamos un punto con dúas coordenadas enteiras. Neste caso o punto (-7,5). A pendente calcúlase dividindo a segunda coordenada pola primeira, así pois,

$$m = -\frac{5}{7}$$

e a ecuación da función é

$$y = -\frac{5}{7}x$$

Funcións afíns

Podemos considerar unha **función afín** como unha función lineal á que se lle aplicaron certas *condicións iniciais*. Aínda que non representa dúas magnitudes directamente proporcionais, existe entre elas certa proporcionalidade como verás na escena adxunta.

A ecuación da función afín é

$$y = m \cdot x + n$$

Onde m segue representando esa certa *proporcionalidade* e n representa as *condicións iniciais*.

A súa gráfica é unha liña recta que corta ao eixe Y no punto n (*se* $x=0$, *entón* $y=n$). Por ese motivo tamén se di que ***n*** é a **ordenada na orixe** da recta. A ***m*** ten o mesmo significado que nas funcións lineais.

Nunha empresa de aluguer de vehículos cobran 50€ polo contrato de aluguer máis 0,20€ por kilómetro recorrido. Queremos atopar unha ecuación que nos permita calcular con facilidade o prezo dun aluguer en función da distancia recorrida.

x (km)	Y (€)
0	50,00 €
100	70,00 €
200	90,00 €
300	110,00 €
400	130,00 €

A empresa proporciónanos a táboa adxunta para que nos poidamos facer unha idea do prezo.

O primeiro que observamos é que se duplicamos o número de km, o prezo non se duplica: **As magnitudes non son directamente proporcionais**.

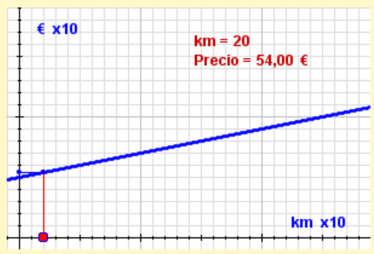
Imos analizar con máis detalle a situación:
Se descontamos en cada caso o valor inicial e dividimos o prezo pola distancia obtemos sempre o mesmo cociente, é dicir, ***o prezo (descontado o custe inicial) si é directamente proporcional á distancia***. O valor obtido é a constante de proporcionalidade como no caso anterior.

x (km)	y (€)	y-50	(y-50)/x
0	50,00 €		
100	70,00 €	20,00 €	0,20
200	90,00 €	40,00 €	0,20
300	110,00 €	60,00 €	0,20
400	130,00 €	80,00 €	0,20

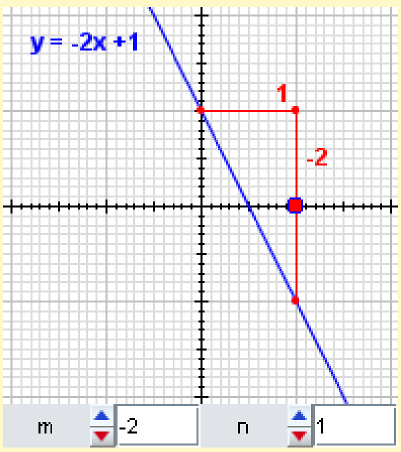
Polo tanto, $y-50 = 0{,}2x$ de onde se deduce que:

$y = 0{,}2 \cdot x + 50$ que ten a forma $y = m \cdot x + n$

Ao igual que nas funcións lineais a **m** representa a pendente e agora a **n** representa o punto no que a recta corta ao eixe Y.



EN RESUMO: As ecuacións do tipo $y = m \cdot x + n$ representan funcións afíns.



- **Se m>0 é crecente**
- **Se m<0 é decrecente**

(Observa que sucede se m=0)

A pendente calcúlase agora con respecto á ordenada na orixe.

$$m = \frac{-2}{1} = -2$$

EXERCICIOS resoltos

3. Unha axencia de aluguer de coches cobra por un determinado modelo 0 € ao contratar e 0,50 € por km percorrido. Noutra axencia cobran 30 € ao contratar e 0,30 € por km percorrido. Analiza, en función dos km percorridos cál é a axencia máis vantaxosa.

Se chamamos x aos km percorridos e y ao prezo total do aluguer, para a primeira axencia temos:

$$y = 0{,}50x$$

Para a segunda:

$$y = 0{,}30x + 30$$

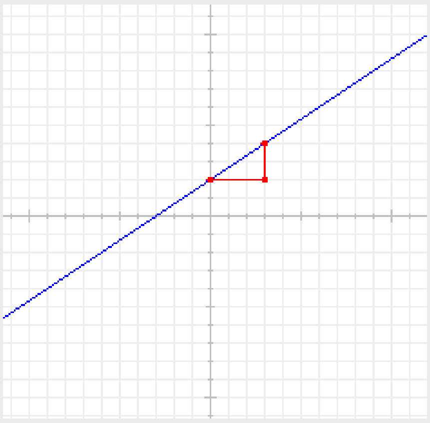
Resolvendo o sistema de ecuacións obtemos as coordenadas do punto de corte:

$$0{,}50x = 0{,}30x + 30$$

$$x = \frac{30}{0{,}20} = 150$$

Polo tanto, ata 150 km é mellor a primeira (a súa gráfica queda por debaixo).
A partir desa distancia é mellor a segunda.

4. Determina as ecuacións das funcións correspondentes ás gráficas:



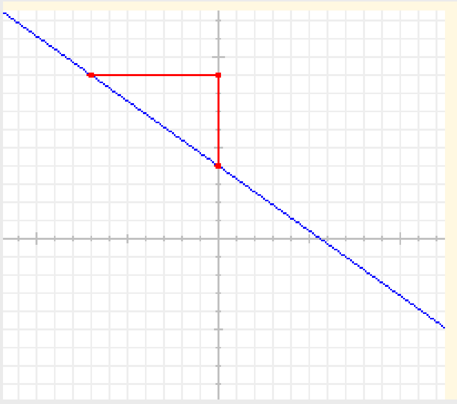
Por ser unha recta que non pasa pola orixe, trátase dunha función afín de ecuación y=mx+n.

O valor de n é o punto no que a recta corta ao eixe Y, polo tanto, n=2.

Como a recta é crecente, a pendente é positiva.

Para achar a pendente buscamos outro punto con coordenadas enteiras, por exemplo (3,4), trazamos un triángulo rectángulo que o unha co punto de corte co eixe Y (0,2). O cociente entre o cateto vertical e o horizontal dános a pendente: m=2/3 e a ecuación é

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$



Neste caso n=4.

Como a recta é decrecente, a pendente é negativa.

Para achar a pendente buscamos outro punto con coordenadas enteiras, por exemplo (-7,9), trazamos un triángulo rectángulo que o una co punto de corte co eixe Y (0,4). O cociente entre o cateto vertical e o horizontal dános a pendente: m=-5/7 e a ecuación é

$$y = -\frac{5}{7}x + 4$$

Funcións cuadráticas

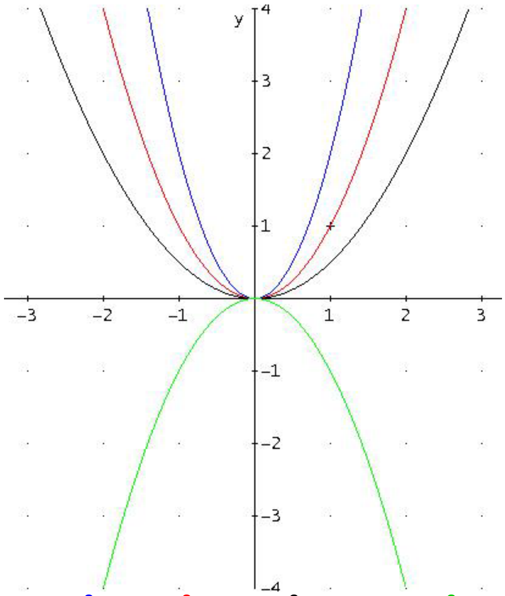
Unha **función cuadrática** é a que vén representada por un polinomio de segundo grao *(a x está elevada ao **cadrado**)*.

A ecuación da función cuadrática é

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

O significado dos coeficientes a, b e c explícase nas escenas correspondentes a este apartado.

A súa gráfica é unha curva especial denominada **parábola**. Este tipo de curvas atópase con facilidade na vida real pois é a curva que describe calquera obxecto lanzado ao aire e sometido á influencia da gravidade.

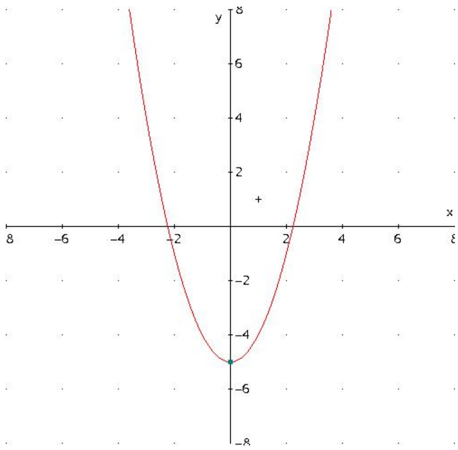


$y=2x^2$ **$y=x^2$** **$y=x^2/2$** **$y=-x^2$**

Caso 1: b = c = 0. **$y=ax^2$**

Características:

1. Sempre pasa pola orixe.
2. É simétrica respecto ao eixe Y.
3. Se a>0 está aberta cara arriba.
4. Se a<o está aberta cara abaixo.
5. Canto maior é |a|, máis pechada está.
6. A orixe é o **vértice** da parábola.
7. Se a>0 o vértice é un mínimo.
8. Se a<0 o vértice é un máximo.



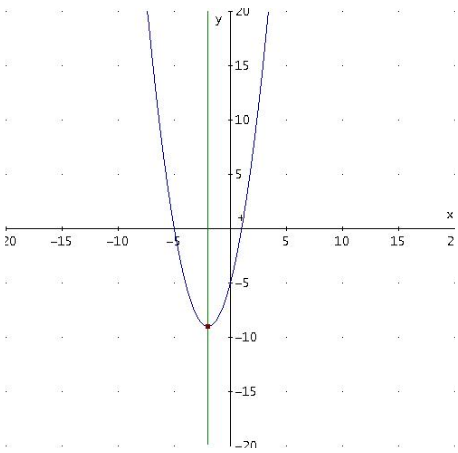
$y=x^2 - 5$

Caso 2: b=0. **$y=ax^2+c$**

Características:

1. O vértice é o punto (0,c)
2. Se **a** e **c** teñen o mesmo signo, non corta ao eixe X.
3. Se **a** e **c** teñen distinto signo, curta en dous puntos ao eixe X.
4. As demais propiedades mantéñense, en particular o significado de **a** segue sendo o mesmo.

Sumar ou restar c produce un desprazamento vertical da gráfica.



$y=x^2+4x-5$

Caso xeral: **$y=ax^2+bx+c$**

Características:

1. O eixe de simetría é $x = -\dfrac{b}{2a}$
2. O vértice calcúlase substituíndo o valor anterior na ecuación.
3. Agora, **c** representa só o punto de corte co eixe Y.
4. As demais propiedades mantéñense.

b representa unha certa medida do desprazamento horizontal da gráfica.

EXERCICIOS resoltos

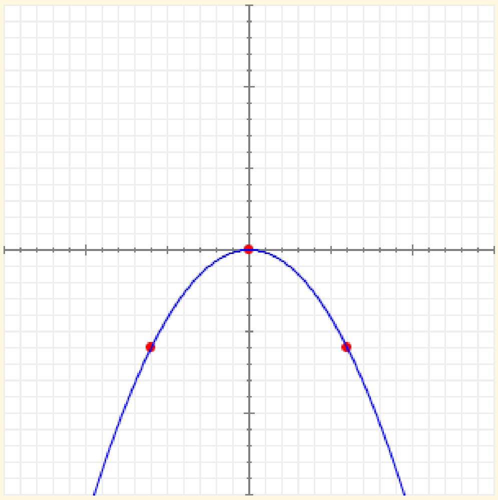
5.

Debuxa a gráfica da función $y = -\frac{1}{6}x^2$

Como xa sabemos, as funcións do tipo $y = ax^2$ son parábolas simétricas con respecto ao eixe Y e co vértice na orixe de coordenadas.

Como neste caso a < 0, a pará bola está aberta cara abaixo. Para achar as coordenadas doutros puntos damos uns cantos valores á x tendo en conta a simetría:

x	-12	-6	0	6	12
y	-24	-6	0	-6	-24



6.

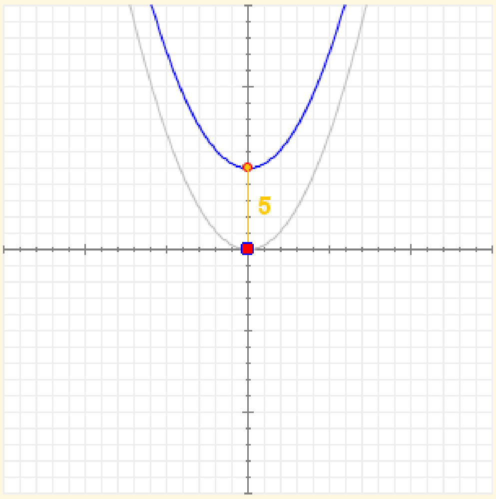
Debuxa a gráfica da función $y = \frac{2}{7}x^2 + 5$

É unha función do segundo tipo, polo que a súa gráfica será igual que a da función

$$y = \frac{2}{7}x^2$$

pero desprazada 5 unidades cara arriba.

Polo tanto, só temos que debuxar esta función como se explicou no exercicio anterior e logo desprazala 5 unidades cara arriba.

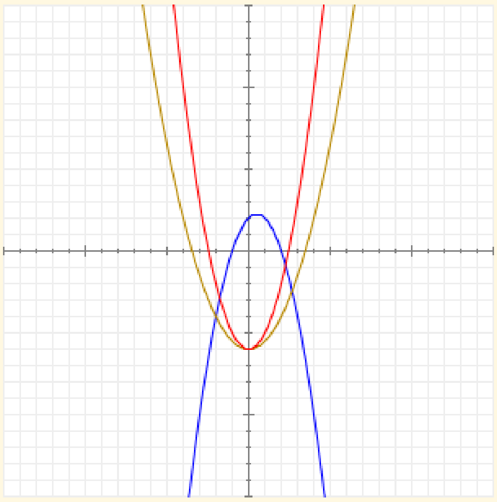


7.

Asocia de forma razoada cada gráfica coa súa ecuación

1) $y = -x^2 + x + 2$
2) $y = 0{,}5x^2 - 6$
3) $y = x^2 - 6$

Recorda que o signo de a indica cara a onde está aberta.
O valor de c indica o punto de corte co eixe Y.
Se b ≠ 0, o eixe de simetría da parábola non coincide co eixe Y.
Canto maior é o valor absoluto de a máis pechada está a parábola e viceversa.



EXERCICIOS resoltos

8.

Debuxa a gráfica da función $y = x^2 + 8x + 15$

Neste caso o proceso consiste en seguir os seguintes pasos:

1) Determinar se está aberta cara arriba ou cara abaixo: **Como a = 1 está abierta cara arriba**

2) Achar o punto de corte co eixe Y: **Se x = 0, entón y = 15**

3) Achar os puntos de corte co eixe X

Un punto está no eixe X se a súa segunda coordenada (a y) é igual a cero. Logo temos que resolver a ecuación

$$x^2 + 8x + 15 = 0; \qquad x = \frac{-8 \mp \sqrt{64 - 60}}{2}; \quad x1 = -3;\ x2 = -5$$

4) Achar o vértice. Para iso recordamos que o vértice se atopa no punto de abscisa **$x = -b/2a = -4$**
e a segunda coordenada do vértice obténse substituíndo este valor na función: **$y = -1$**

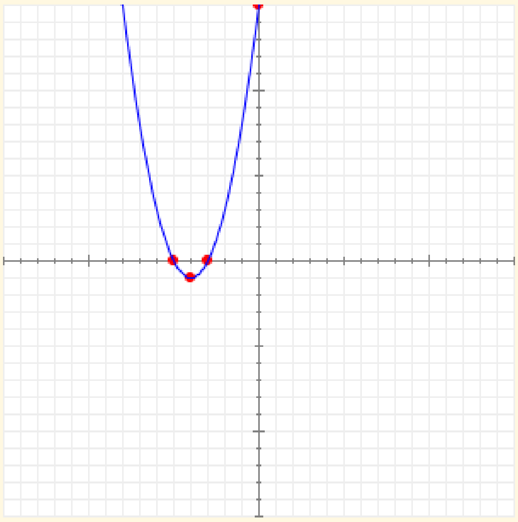
Resumindo:

está aberta cara arriba

Pasa polo punto **(0, 15)**

Corta ao eixe X en **(-3 ,0)** e en **(-5 ,0)**

O vértice é **(-4 , -1)**



2. Outras funcións

Función de proporcionalidade inversa

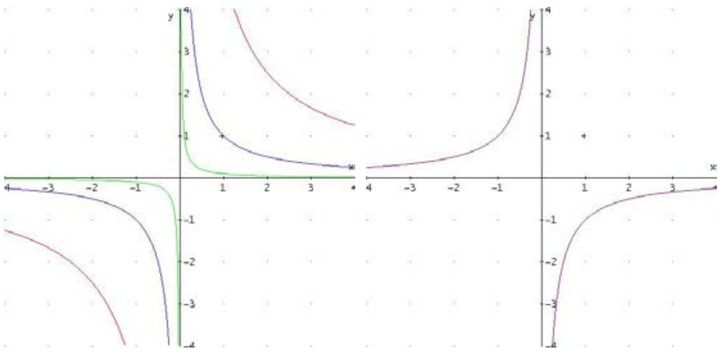
Como o seu nome indica, a función de proporcionalidade inversa relaciona dúas magnitudes inversamente proporcionais, é dicir, tales que o seu produto é constante. O devandito produto recibe o nome de **constante de proporcionalidade**

A ecuación desta función é

$$y = \frac{k}{x} \qquad \text{ou} \qquad x \cdot y = k$$

Onde **k** é a constante de proporcionalidade.

A súa gráfica é unha curva especial denominada **hipérbole**. Trátase dun tipo de curva que tende a parecerse a unha liña recta cando nos afastamos da orixe.



x·y=1 **x·y=5** **x·y=1/10** **x·y=-1**

***Características*:**

1. Función descontinua na orixe.
2. Canto maior é |k| máis se afasta dos eixes.
3. Se k>0 a gráfica está nos cuadrantes 1 e 3.
4. Se k<0 a gráfica está nos cuadrantes 2 e 4.
5. É impar (simétrica respecto da orixe).
6. As dúas ramas da gráfica vanse aproximando aos eixes. Dicimos que os eixes son **asíntotas** desta función.

Se cambiamos x por x-a e y por y-b, a gráfica desprázase de maneira que agora o vértice é (a,b), as asíntotas son as rectas x=a e y=b.
A gráfica da esquerda corresponde á función:

$$\mathbf{(x+2)\cdot(y-5)=1}$$

VIAXE DE ESTUDOS

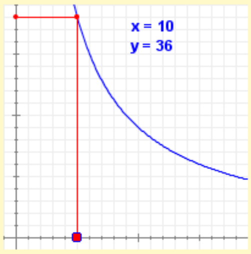
Un grupo de alumnos quere organizar unha excursión e para iso piden orzamento a unha axencia de viaxes que lles pide 360€ polo aluguer dun autocar sexa cal sexa o número de alumnos que se apunten.

Os organizadores están un pouco preocupados porque só son 10 e 36 € parécenlles moitos cartos. Pouco a pouco van convencendo a máis compañeiros e ao final reúnen un grupo de 30 alumnos (o triplo dos iniciais), polo que a viaxe sáelles a 12€ por alumno (a terceira parte da cantidade inicial).

Temos un exemplo de proporcionalidade inversa: ***o prezo por alumno é inversamente proporcional ao número de alumnos*** .

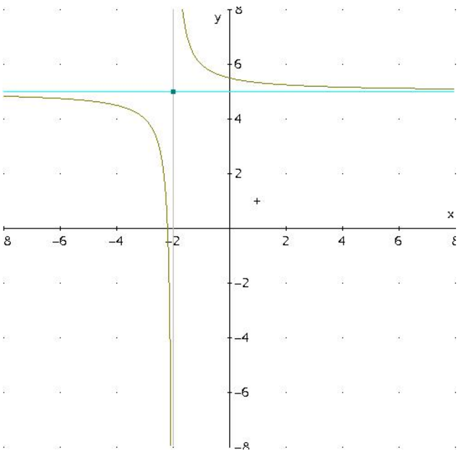
Se chamamos **x** ao número de alumnos e **y** ao prezo que debe pagar cada un, está claro que se cumpre:

$$x \cdot y = 360 \quad \text{ou ben,} \quad y = \frac{360}{x}$$



Temos unha función de proporcionalidade inversa cuxa constante de proporcionalidade é 360.

A gráfica adxunta mostra como varía o prezo en función do número de alumnos.



Función exponencial

Unha **función exponencial** é unha función definida por unha potencia na que a base é constante e o expoñente é variable. Por motivos de operatividade só se admiten bases positivas e distintas de 1.

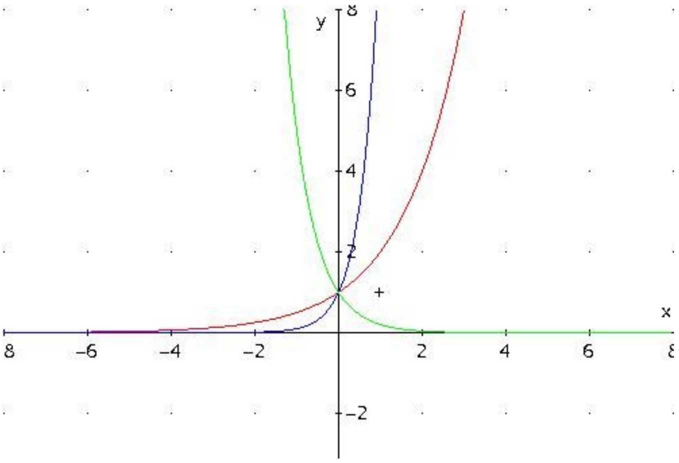
A ecuación desta función é

$$y = k \cdot a^x$$

Onde a é calquera número real maior que cero e distinto de un, e k é unha constante que afasta ou achega a gráfica ao eixe X.

Ao igual que as hipérboles a súa gráfica ten sempre unha asíntota, pero a diferenza delas non é simétrica. A súa principal característica é a de presentar un crecemento ou un decrecemento moi rápido.

Caso 1: k=1. $y = a^x$



$y = 2^x$ $y = 10^x$ $y = (0{,}2)^x$

Características:

1. É crecente se a>1 e decrecente se a<1.
2. Corta ao eixe Y no punto (0,1).
3. Non corta ao eixe X.
4. A recta y=0 é unha asíntota horizontal (pola esquerda se a>1 e pola dereita se a<1).

Caso xeral:
Canto maior sexa |k| máis se afasta a gráfica do eixe X. Se k é negativo as gráficas pasan aos cuadrantes 3 e 4 e as funcións crecentes transfórmanse en decrecentes e viceversa.

Nun banco propóñenme unha inversión a longo prazo ao 3% anual de forma que os xuros vanse acumulando ao capital. Na táboa móstrase un exemplo a 10 anos para un capital inicial de 20.000€.

ANOS	CAPITAL INICIAL	XUROS	CAPITAL FINAL
1	20.000,00 €	600,00 €	20.600,00 €
2	20.600,00 €	618,00 €	21.218,00 €
3	21.218,00 €	636,54 €	21.854,54 €
4	21.854,54 €	655,64 €	22.510,18 €
5	22.510,18 €	675,31 €	23.185,48 €
6	23.185,48 €	695,56 €	23.881,05 €
7	23.881,05 €	716,43 €	24.597,48 €
8	24.597,48 €	737,92 €	25.335,40 €
9	25.335,40 €	760,06 €	26.095,46 €
10	26.095,46 €	782,86 €	26.878,33 €

Imos buscar unha ecuación que nos sirva para calquera prazo.

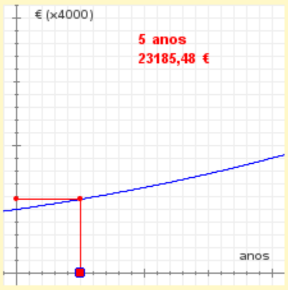
Imos chamar Co ao capital inicial, i aos xuros anuais, t ao número de anos e Cf ao capital final. A partir da táboa adxunta dedúcese a relación entre o capital final e o inicial:

ANOS	Ci	XUROS	Cf
1	Co	I = 0,03·Co	C1 = Co+i = Co+0,03·Co = 1,03·Co
2	C1	0,03·C1	C2 = 1,03·C1 = $(1{,}03)^2$·Co
3	C2	0,03·C2	C3 = 1,03·C2 = $(1{,}03)^3$·Co
4	C3	0,03·C3	C4 = 1,03·C3 = $(1{,}03)^4$·Co
5	C4	0,03·C4	C5 = 1,03·C4 = $(1{,}03)^5$·Co
6	C5	0,03·C5	C6 = 1,03·C5 = $(1{,}03)^6$·Co
7	C6	0,03·C6	C7 = 1,03·C6 = $(1{,}03)^7$·Co
8	C7	0,03·C7	C8 = 1,03·C7 = $(1{,}03)^8$·Co
9	C8	0,03·C8	C9 = 1,03·C8 = $(1{,}03)^9$·Co
10	C9	0,03·C9	C10 = 1,03·C9 = $(1{,}03)^{10}$·Co

$Cf = Co \cdot (1{,}03)^t$ ou, en xeral, $Cf = Co \cdot (1+r)^t$

Sendo r o tipo de xuro aplicado.

A función que obtivemos ten o aspecto: $y = k \cdot a^x$
(y é o capital final, k o capital inicial, a=1,03>0 e distinto de 1, x o tempo transcorrido).
Temos, pois, unha **función exponencial** cuxa gráfica é:

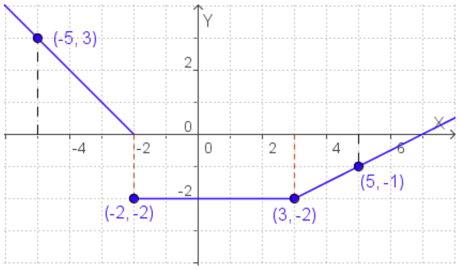


Ampliando a escala facémonos unha idea mellor do aspecto da gráfica. Como podes ver sempre é crecente e aínda que ao principio o crecemento é bastante lento, co tempo acelérase rapidamente.

Naturalmente, non imos facer unha inversión a tan longo prazo, pero pensa en empresas ou institucións que planifican con décadas de antelación.

Hai unha novela de Ciencia-Ficción (*Retorno das Estrelas*) de Stanislaw Lem que usa este recurso.

Funcións definidas a anacos



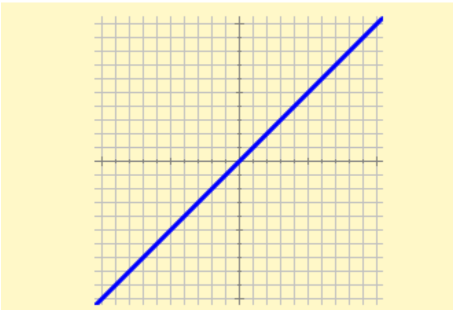
$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & x < -2 \\ -2 & -2 \le x \le 3 \\ 0{,}5x - 3{,}5 & x > 3 \end{cases}$$

Hai un tipo de funcións que veñen definidas con distintas expresións alxébricas segundo os valores de x, dise que están definidas **a anacos**.

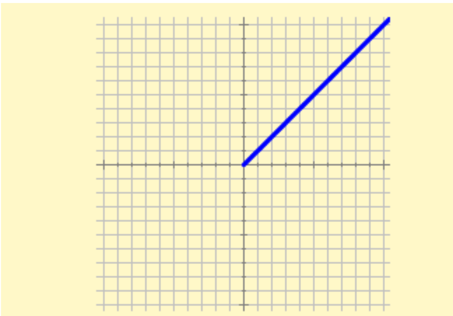
Para describir analiticamente unha función formada por anacos doutras funcións, danse as expresións dos distintos tramos, por orde de esquerda a dereita, indicando en cada tramo os valores de x para os que a función está definida.

Na figura podes ver un exemplo deste tipo de funcións e a súa representación gráfica.

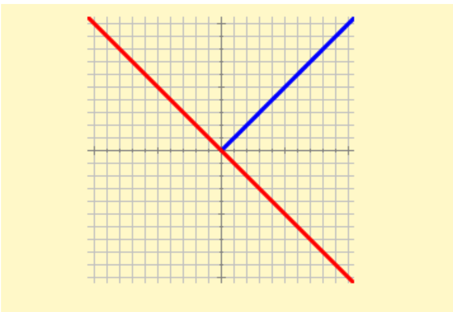
Función valor absoluto



Esta é a gráfica da función lineal **y = x**



Se quedamos só coa parte na que x é positiva esta é a gráfica que queda.



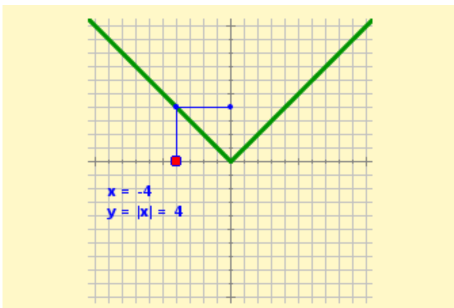
A liña vermella é a gráfica da función lineal **y = - x**

Como recordarás da segunda quincena, o valor absoluto dun número representa a súa distancia ao cero. A función valor absoluto é a que asigna a cada número esa distancia.

Tendo en conta que o valor absoluto dun número é o mesmo número se este é positivo e o seu oposto se é negativo, a ecuación desta función é

$$y = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Como ves é un exemplo de función definida a anacos. En cada anaco vén representada por unha función lineal de pendentes 1 e -1 respectivamente, polo que a súa gráfica está composta por dúas semirrectas con esas pendentes que se unen na orixe.



Así pois, esta é a gráfica da función valor absoluto:
y = | x |

EXERCICIOS resoltos

9. Indica se a base e a altura de todos os rectángulos a superficie dos cales mide 6000 m^2 son magnitudes inversamente proporcionais. En caso afirmativo escribe a ecuación da función que as relaciona e debuxa a súa gráfica

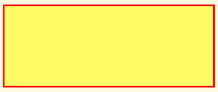
A área dun rectángulo é igual á base (b) pola altura (h). Se a área é constante temos

b·h = k.

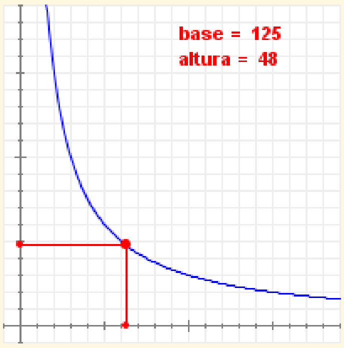
Logo si son inversamente proporcionais.

No noso caso a ecuación é

$$\mathbf{b \cdot h = 6000 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{6000}{b}}.$$



altura x10



base x20

base 125 **SUPERFICIE = 6000 m^2**

10. Determina a ecuación da gráfica adxunta.

Trátase dunha función de proporcionalidade inversa.

$$\mathbf{x \cdot y = k}$$

Intentamos localizar un ou varios puntos con coordenadas enteiras:

Por exemplo: **(9 , 5)**

Entón a ecuación é $\mathbf{x \cdot y = 9 \cdot 5 = 45}$

Se é posible buscamos outros puntos para confirmar.

11. Debuxa a gráfica da ecuación **x·y = -4**

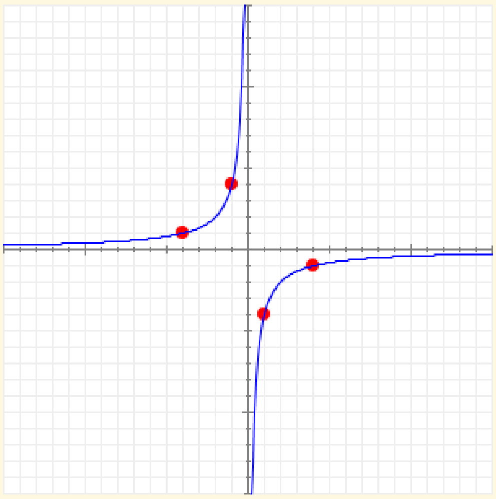
Como k é negativa a gráfica ten que estar no segundo e cuarto cuadrantes.

Buscamos un ou varios puntos con coordenadas enteiras cuxo produto sexa -4 e temos en conta a simetría da función.

Por exemplo, pasa por **(1 , -4)**

e por **(-1 , 4)**

Se é posible buscamos máis puntos.

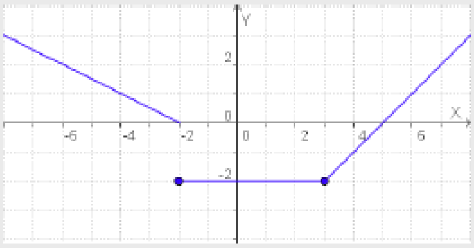


EXERCICIOS resoltos

12. Nas seguintes funcións, definidas a anacos, calcula as imaxes dos valores de x indicados.

a) $f(x)=\begin{cases} -0{,}5x-1 & \text{si} \quad x<-2 \\ -2 & \text{si} \quad -2\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

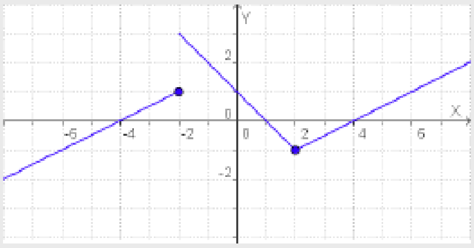
x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



x=–4 substitúese arriba (–4<–2).
x=–2, x=1 e x=3 substitúense na do medio, xa que están en [–2,3]
x=6 substitúese abaixo pois 6>3.

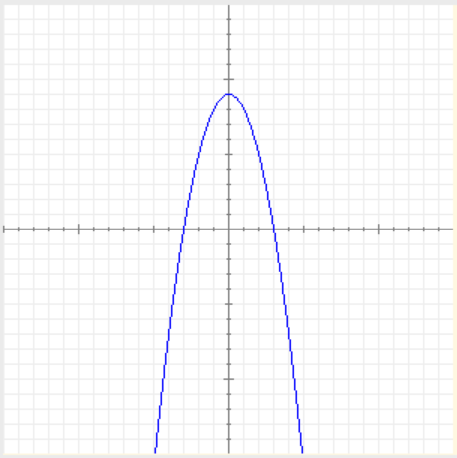
b) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+2 & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x+1 & \text{si} \quad -2<x<2 \\ 0{,}5x-2 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

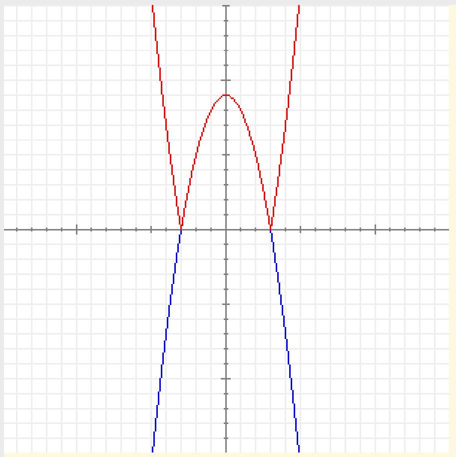
x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



x=–6, x=–2 substitúense arriba.
x=0 substitúese na do medio, xa que está en –2<0<2.
x=2, x=4 substitúense abaixo.

13. A imaxe adxunta correspóndese coa gráfica da función $y=-x^2+9$. Debuxa a gráfica que corresponde ao valor absoluto desta función.

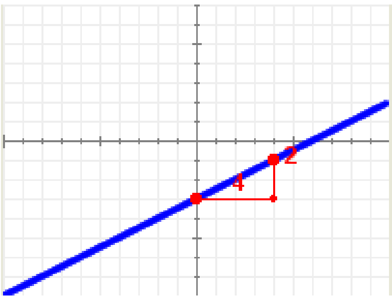




A liña vermella da dereita representa a gráfica buscada. Recorda que o valor absoluto dun número coincide co número se este é positivo e co seu oposto se o número é negativo.

Para practicar

1. Determina a ecuación da función cuxa gráfica é a seguinte, indicando se se trata dunha función lineal ou afín.



2. Debuxa a gráfica da función **y=-2x+5**

3. Acha as coordenadas do punto de corte das rectas cuxas ecuacións son:
f: y = x + 9 **g: y = 3x + 13**

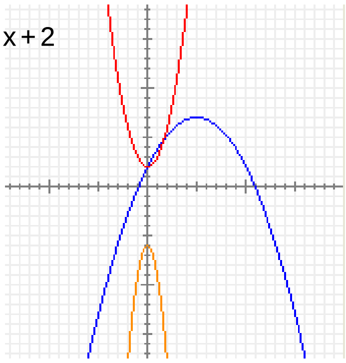
4. Acha a ecuación da función cuxa gráfica é paralela á da función **y = 4x – 2** e pasa polo punto **P(-1,4)**

5. Acha a ecuación da función cuxa gráfica pasa polos puntos
P(-2,7) e Q(-1,4)

6. Debuxa a gráfica da función **$y=x^2-1$**.

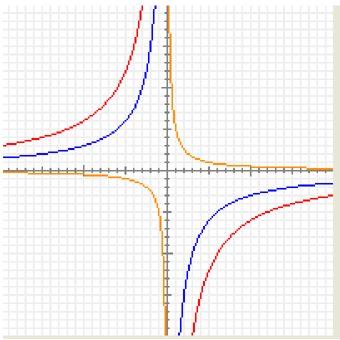
7. Asocia cada gráfica coa súa ecuación:

a) $y=-0{,}2x^2+2x+2$
b) $y=-3x^2+6$
c) $y=x^2+2$



8. Asocia cada gráfica coa súa ecuación:

a) x·y = -60
b) x·y = -30
c) x·y = 5

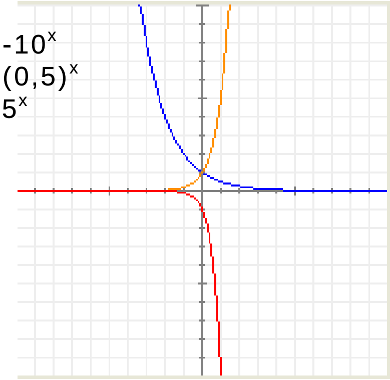


9. Os números da táboa adxunta corresponden a cantidades de dúas magnitudes inversamente proporcionais. Enche os ocos que quedan e escribe a ecuación da función que relaciona a estas dúas magnitudes.

x	y
2	40
	-320
5	16
-8	
	-8
-20	

10. Asocia cada gráfica coa súa ecuación:

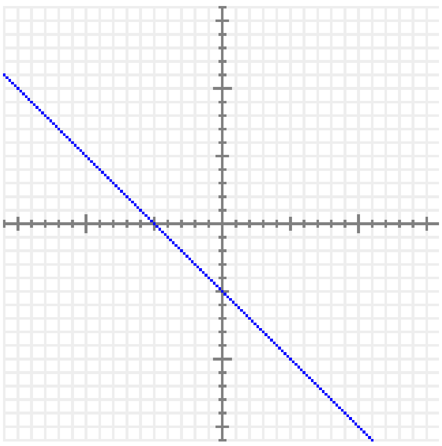
a) $y = -10^x$
b) $y = (0{,}5)^x$
c) $y = 5^x$



11. Debuxa a gráfica da función:

$$y = \begin{cases} -x-5 & si \quad x \le -1 \\ +4 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

12. A gráfica adxunta corresponde a unha certa función y=f(x). Debuxa a gráfica da función y=|f(x)|.



13. En certa gasolineira o prezo dun litro de gasolina é de 1,04 €. Un día deciden subir o prezo un 1,66%. Uns días despois deciden incrementar outra vez o prezo un 3,18% sobre o último prezo. Calcula o prezo final e a porcentaxe de aumento sobre o prezo inicial.

14. O prezo de certo artigo nun centro comercial é de 601€. Nas rebaixas de xaneiro deciden aplicarlle un desconto do 13%. Ao chegar febreiro, aínda quedan existencias, polo que deciden aplicarlle un novo desconto do 11% sobre o prezo que tiña en xaneiro. Calcula o prezo final e o desconto total sobre o valor inicial.

15. Se unha compañía de teléfonos cobra 12,14 € por falar durante 2 minutos e 12,70 € por falar durante 10 minutos, calcula a cota fixa mensual que cobra así como o custo por minuto. Calcula tamén o importe dun recibo mensual se se falou durante 22 minutos.

16. Unha avioneta ten combustible para 4 horas, viaxando a unha velocidade constante de 270 km/h. Ao despegar, o piloto observa que hai vento a favor que lle permite voar a 318 km/h co mesmo gasto, pero debe ter en conta que á volta só poderá ir a 222 km/h. Cal é a distancia máxima á que pode chegar?

17. Calcula as dimensións do rectángulo de área máxima o perímetro da cal é igual a 436 metros.

18. Un móbil percorre un traxecto de 265 km con velocidade constante. Escribe a ecuación da función que relaciona a velocidade do móbil co tempo empregado en percorrer ese traxecto. Despois calcula o tempo se a velocidade é de 50 km/h e calcula a velocidade se o tempo empregado é de 8 horas.

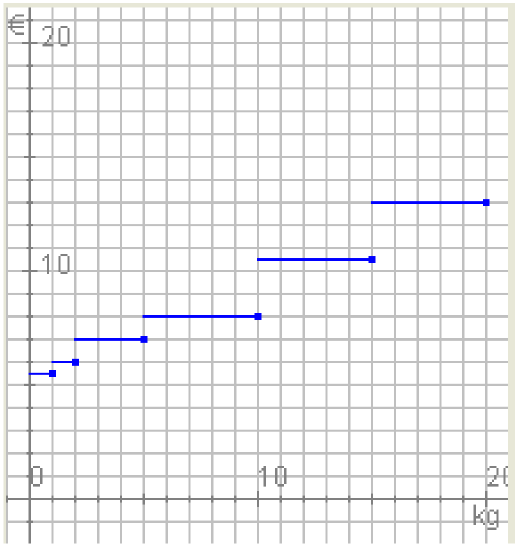
19. Unha billa cun caudal de 7 litros por minuto tarda 15 minutos en encher un depósito. Acha a ecuación da función que relaciona o tempo que tarda en encherse o depósito co caudal da billa. Debuxa a súa gráfica e calcula o tempo que tardaría en encherse se o caudal da billa fose de 14 litros por minuto.

20. O IPC (Índice de Prezos ao Consumo) é unha medida porcentual da variación dos presos dun ano a outro. Se o IPC se mantén constantemente igual a 1,9% durante 5 anos, un produto que inicialmente valía 655€, que prezo terá ao cabo deses anos?

21. Mercamos un coche por 17739€. Se o prezo de venda no mercado de segunda man se deprecia un 14% anual, cal será o prezo do coche ao cabo de 11 anos?

22. Temos un bloque de xeo a –24º C de temperatura. Poñémolo a quentar nun recipiente e tarda 10 minutos en acadar os 0º C. Mantense 6 minutos a esa temperatura ata que se licúa totalmente. Logo tarda 7 minutos en acadar a ebulición a 100º C e outros 10 minutos en evaporarse completamente, período durante o cal mantén a temperatura constante a 100º C. Acha a ecuación que relaciona a temperatura da auga no recipiente co tempo transcorrido e debuxa a súa gráfica. Despois calcula canto se tarda en acadar unha temperatura de 25º C e que temperatura se acada ao cabo de 25 minutos.

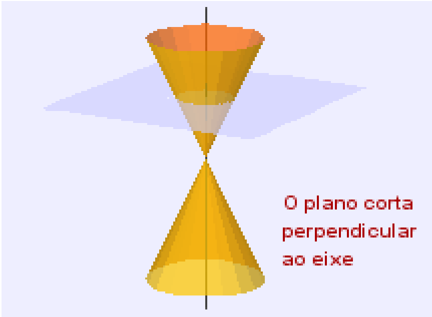
23. A gráfica seguinte describe o custo de enviar un paquete por correo en función do peso do devandito paquete. Escribe a función correspondente a esta gráfica e descobre o prezo de envío dun paquete de 17 kg.



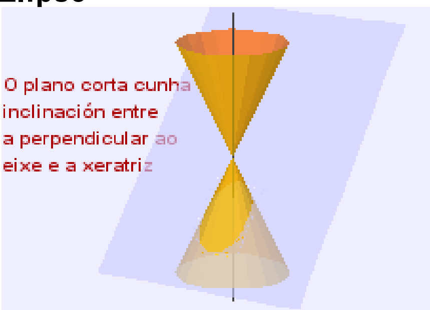
As cónicas

A hipérbole e a parábola pertencen a unha familia de curvas chamadas **cónicas**, á que tamén pertencen a elipse e a circunferencia. Obtéñense ao cortar unha superficie cónica cun plano:

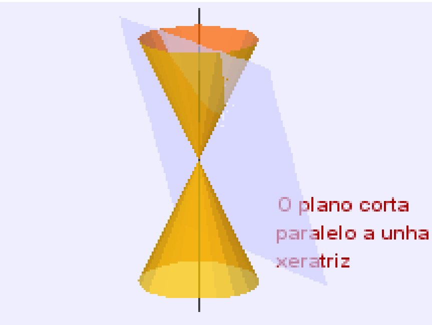
Circunferencia



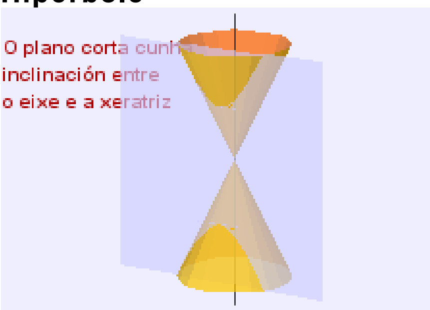
Elipse



Parábola

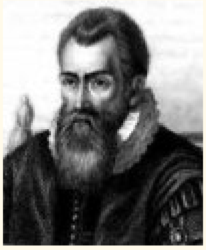


Hipérbole



Para saber máis

Logaritmos



O **logaritmo** dun número, y, nunha certa base, b, é o número, x, ao que hai que elevar b para obter y, é dicir:

$$\log_b y = x \text{ equivale a } y = b^x$$

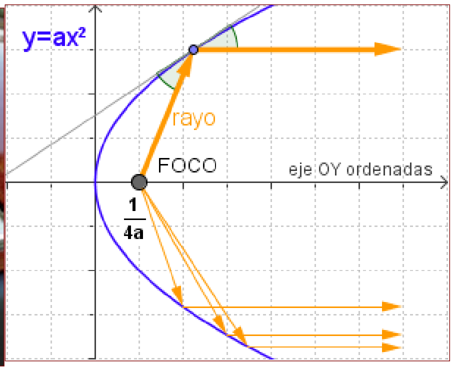
Informalmente, dicimos que o logaritmo é a operación contraria da exponenciación. O cálculo con logaritmos iniciase de forma sistemática no século XVII co matemático inglés John Napier.

Na páxina inicial preguntábasenos canto se tardaría en acadar unha poboación dun millón de microbios. Trátase de resolver a ecuación:

$$3^x = 1.000.000$$

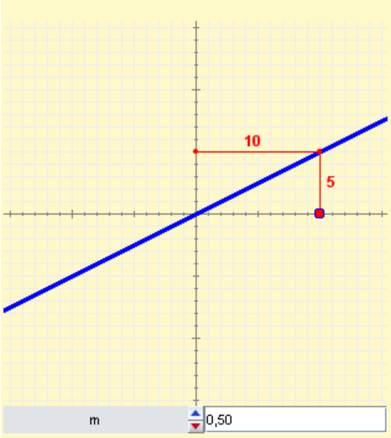
ou o que é o mesmo, ***calcular o logaritmo en base 3 dun millón***. Se usas a calculadora tes que achar o logaritmo dun millón e dividilo polo logaritmo de 3 e obterás un valor comprendido entre 12 e 13 horas.

Nas parábolas todos os raios que parten do **foco** ou inciden nel son reflectidos na mesma dirección. De aí que os faros dos coches ou as antenas teñan forma parabólica.



Lembra o máis importante

Funcións lineais



ECUACIÓN: $y = m \cdot x$

$y = 0{,}5 \cdot x$

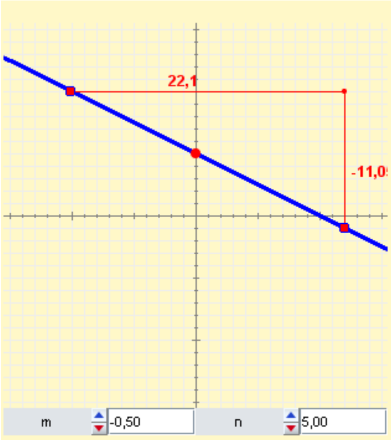
A súa gráfica é unha **recta** que:

- Pasa pola orixe
- Crece se m>0
- Decrece se m<0
- É horizontal se m=0

m é a PENDENTE e coincide co cociente entre a ordenada e a abscisa de calquera punto da recta.

Relaciona dúas magnitudes DIRECTAMENTE PROPORCIONAIS

Funcións afíns



ECUACIÓN: $y = m \cdot x + n$

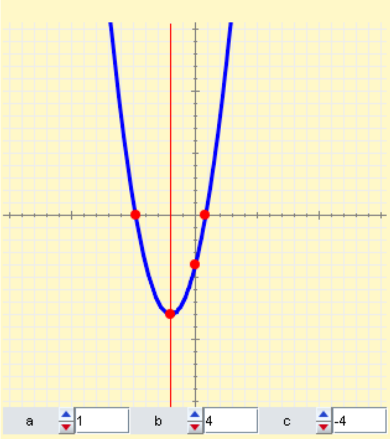
$y = -0{,}5 \cdot x + 5$

A súa gráfica é unha **recta** que:

- Pasa por (0 , n)
- Crece se m>0
- Decrece se m<0
- É horizontal se m=0

m é a PENDENTE e coincide co cociente entre a diferenza de ordenadas e a diferenza de abscisas entre dous puntos calquera da recta.

Funcións cuadráticas



ECUACIÓN: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$y = x^2 + 4x - 4$

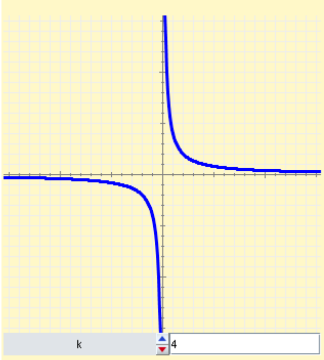
A súa gráfica é unha **parábola**:

- Pasa por (0 , c)
- Aberta cara arriba se a>0
- Aberta cara abaixo se a<0
- Máis pechada canto maior é a en valor absoluto.

Eixe de simetría $x = -\frac{b}{2a}$

Os puntos de corte co eixe X obtéñense igualando a ecuación a cero.

Función de proporcionalidade inversa



ECUACIÓN:

$x \cdot y = k$ ou ben $y = \frac{k}{x}$

$x \cdot y = 4$

A súa gráfica é unha **hipérbole**:

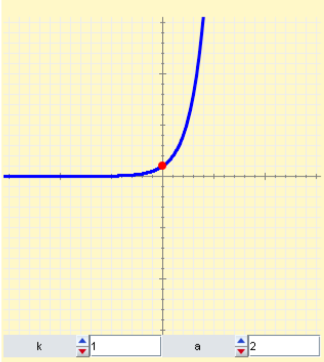
As súas ramas están
- nos cuadrantes 1 e 3 se k>0
- nos cuadrantes 2 e 4 se k<0

Ten dúas **asíntotas**.

É simétrica con respecto ao punto de corte das súas asíntotas.

É descontinua.

Funcións exponenciais



ECUACIÓN: $y = k \cdot a^x$

$y = 2^x$

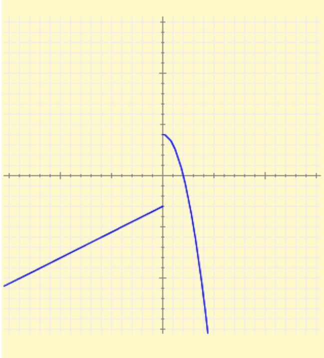
Só está definida para valores de a maiores que cero e distintos de un. k debe ser distinta de cero.

- Crecente se
  k>0 e a>1 ou k<0 e a<1.
- Decrecente se
  k<0 e a>1 ou k>0 e a<1.

Corta ao eixe Y en (0 , k)

Ten unha **asíntota**.

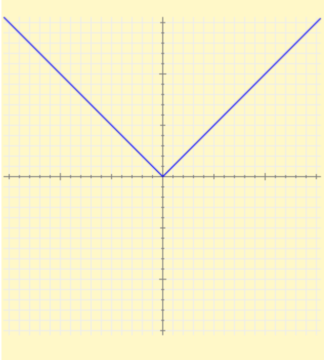
Funcións definidas a anacos



Son funcións que están definidas por ecuacións distintas en diferentes zonas do seu dominio.

Úsanse para explicar as propiedades das funcións e para describir situacións nas que certa magnitude cambia bruscamente a súa forma de comportarse.

Función valor absoluto

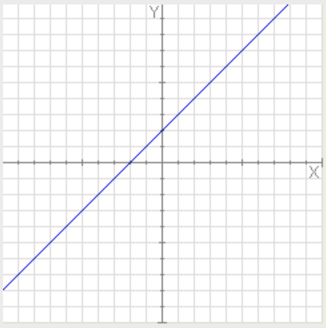


ECUACIÓN: $y = |x|$

$$y = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

É un exemplo de función definida a anacos

Autoavaliación



1. Cál é a pendente da recta da imaxe?

2. Cál é a ecuación da recta paralela á recta y=0,5x+2 que pasa polo punto (1,0)?

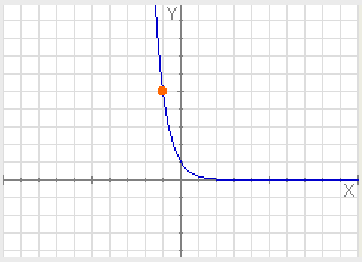
3. Acha a ecuación da recta que pasa polos puntos A(1,0) e B(3,3).

4. Calcula as coordenadas do punto de corte das rectas r: y=2,5x+6,5 e s: y=-2x-7

5. Calcula as coordenadas do vértice da parábola $y = x^2 + 2x + 5$.

6. Calcula as coordenadas dos puntos nos que a parábola $y = -x^2+3x+4$ corta aos eixes de coordenadas.

7. Acha a ecuación da función de proporcionalidade inversa cuxa gráfica pasa polo punto P(-3,2) e debuxa a gráfica.



8. Acha a ecuación da función exponencial da figura coa axuda do punto que está marcado.

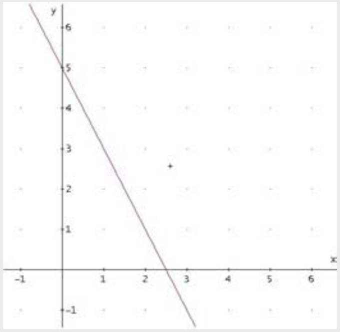
9. Poñemos un capital de 100.000€ ao 7% de interese composto. A canto ascenderá ao cabo de 13 anos? (Redondea a euros)

10. Calcula |f(2)| sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & si\, x < 3 \\ 2x-1 & si\, x \geq 3 \end{cases}$$

Solucións dos exercicios para practicar

1. $y=\frac{1}{2}x-3$

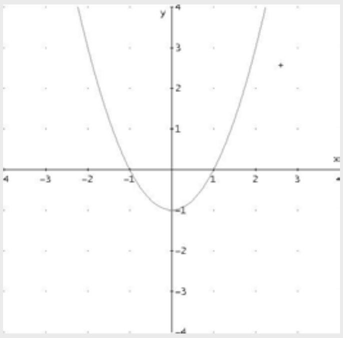


2.

3. (-2,7)

4. y=4x+8

5. y= -3x+1



6.

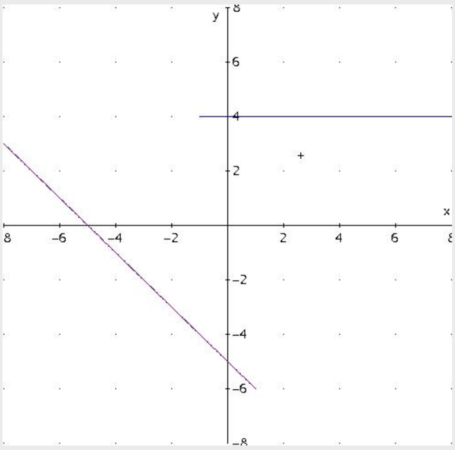
7. a ---- azul
b ---- amarelo
c ---- vermello

8. a ---- vermello
b ---- azul
c ---- amarelo

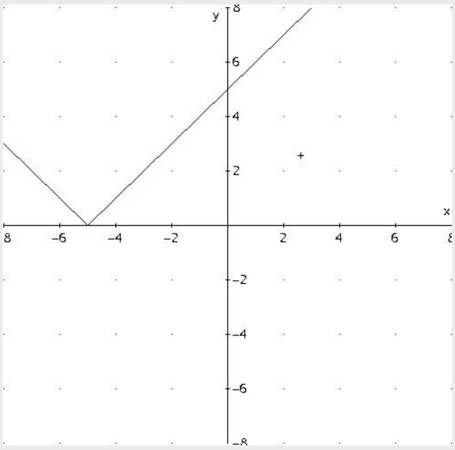
9. x·y = 80

x	y
2	40
-0,25	-320
5	16
-8	-10
-10	-8
-20	-4

10. a ---- vermello
b ---- azul
c ---- amarelo



11.



12.

13. Prezo final: 1,09€;
aumento: 4,89%

14. Prezo final: 465,35€;
desconto: 22,57%

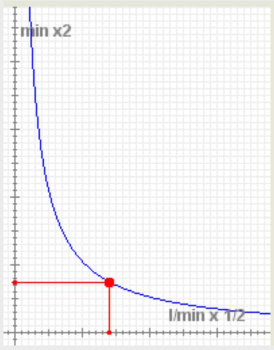
15. Cota fixa: 12€; minuto: 0,07€;
22 minutos: 13,54€.

16. 522,93 km

17. b = h = 109 m

18. x·y=265; x=5,3 h; y=33,13 km/h

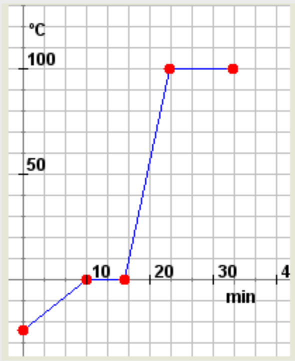
19. x·y=105; 7,5 minutos



20. 719,77 €

21. 3376,08 €

22.



23. continuación
Tarda 17,75 minutos en chegar a 25 ºC.
Aos 25 minutos a temperatura é 100 ºC

$$y = \begin{cases} \frac{24}{10}x - 24 & si\ x \geq 0 \ \ y \ \ x < 10 \\ 0 & si\ x \geq 10 \ \ y \ \ x < 16 \\ \frac{100}{7}(x - 16) & si\ x \geq 16 \ \ y \ \ x < 23 \\ 100 & si\ x \geq 23 \ \ y \ \ x < 33 \end{cases}$$

24.

$$y = \begin{cases} 5{,}5 & se\ x \leq 1 \\ 6 & se\ x > 1 \ \ e \ \ x \leq 2 \\ 7 & se\ x > 2 \ \ e \ \ x \leq 5 \\ 8 & se\ x > 5 \ \ e \ \ x \leq 10 \\ 10{,}5 & se\ x > 10 \ \ e \ \ x \leq 15 \\ 13 & se\ x > 15 \ \ e \ \ x \leq 20 \end{cases}$$

Enviar un peso de 17 kg custa 13,00 € porque ese peso corresponde á zona 6 .

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. 1
2. y=0,5x-0,5
3. y=1,5x-1,5
4. (-3,-1)
5. (-1,4)
6. x1=-1; x2=4; y=4
7. x·y=-6
8. $y=(0{,}2)^x$
9. 240.985 €
10. 6