

Obxectivos

Nesta quinceira aprenderás a:

- Coñecer e interpretar as funcións e as distintas formas de presentalas.
- Recoñecer o dominio e o percorrido dunha función.
- Determinar se unha función é continua ou descontinua.
- Achar a taxa de variación media dunha función nun intervalo.
- Determinar o crecemento ou decrecemento dunha función e achar os seus máximos e mínimos.
- Investigar o comportamento a longo prazo dunha función.
- Comprobar a simetría dalgúns funcións respecto a orixe e ao eixe OY.
- Recoñecer se unha función é periódica.

Antes de empezar.

1.Funcións	páx. 4
Concepto	
Táboas e gráficas	
Dominio e percorrido	
2.Propiedades	páx. 8
Continuidade	
Simetrías	
Periodicidade	
Tendencia	
3.Monotonía	páx. 12
Taxa de variación media	
Crecemento e decrecemento	
Máximos e mínimos	

Exercicios para practicar

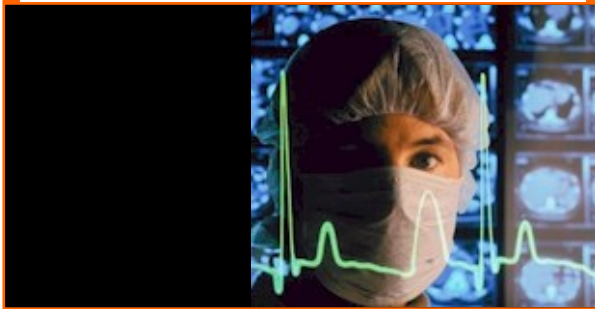
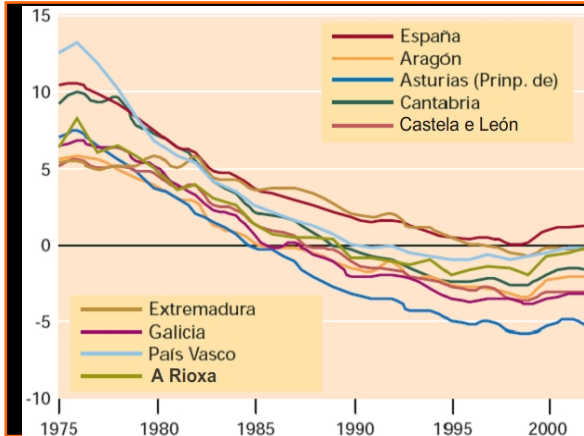
Para saber máis

Resumo

Autoavaliación

Antes de empezar

A linguaxe das gráficas



Das distintas formas en que pode presentarse unha función, mediante un enunciado, unha táboa, unha expresión alxébrica ou unha gráfica, esta última é a que nos permite ver dunha soa ollada o seu comportamento global, de aí a súa importancia. Neste tema aprenderás a recoñecer e interpretar as súas características principais.



Investiga

Imaxina que montas nunha nora cuxo raio mide 30 m e para subir hai que ascender 5 m desde o chan.

A nora comeza a xirar, como é a gráfica da función que da a altura á que te atopas segundo o ángulo de xiro?.

Ti vas na cabina laranxa e uns amigos na verde, como será a súa gráfica?

Funcións e gráficas

1. Funcións

Concepto de función

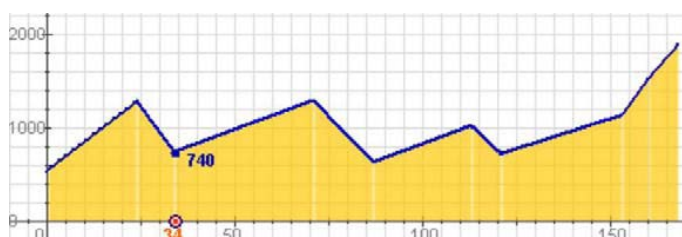
Unha función é unha **correspondencia** entre dous conxuntos numéricos, de tal forma que a cada elemento do conxunto inicial lle corresponde un **elemento e só un** do conxunto final, a imaxe.

Relaciónanse así dúas variables numéricas que adoitan chamarse **x** e **y**,

$$f: x \rightarrow y=f(x)$$

x é a variable **independente**

y é a variable **dependente**



km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

Gráfica dunha función

Para ver o comportamento dunha función, **f: x → y**, Usamos a súa **representación gráfica** sobre os eixes cartesianos, no eixe de abscisas (OX) a variable independente e no de ordenadas (OY) a dependente; sendo as coordenadas de cada punto da gráfica: **(x, f(x))**.

Na figura está representada a función:

$$f(x) = 0,5x^2 + 3x + 3,5$$

Facendo unha táboa de valores, represéntanse os puntos obtidos, x no eixe de abscisas (OX), f(x) no de ordenadas (OY).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5

Hai uns puntos que teñen especial interese, nos que a gráfica corta aos eixes coordenados.

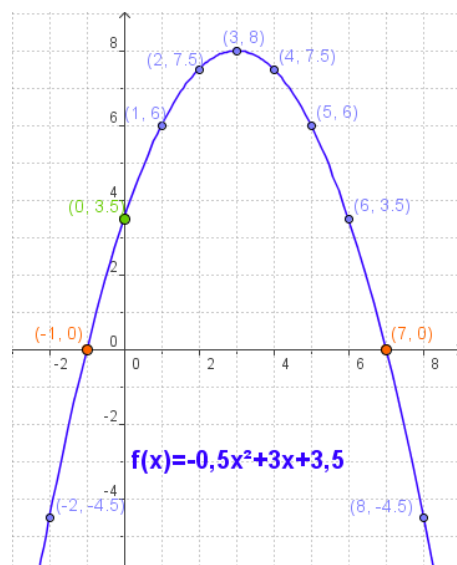
Para calculalos:

- Corte co eixe OY:
Os puntos do eixe de ordenadas teñen abscisa 0, basta facer **x=0** na fórmula da función.
- Cortes co eixe OX:
Os puntos do eixe de abscisas teñen **y=0**. Resólvese a ecuación **f(x)=0**.



O gráfico describe o percorrido da 9ª Etapa da Volta Ciclista 2007, indicando os km totais e a altitude nos puntos principais do traxecto.

Á esquerda aparece a gráfica anterior trazada sobre uns eixes cartesianos, para simplificala uníronse os puntos principais mediante segmentos. Trátase dunha función que dá a altitude segundo os km percorridos, observa a táboa de valores.



Cortes cos eixes

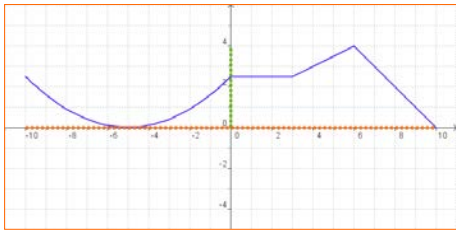
Eixe OY: $f(0)=3,5$ Punto **(0, 3,5)**

Eixe OX: Resolvendo a ecuación:
 $0,5x^2 + 3x + 3,5 = 0$

Resulta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{-2 \cdot 0,5} = 3 \pm 4 = \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}$$

Puntos **(7, 0)** **(-1, 0)**



Dom $f = [-10, 10]$

Dominio e percorrido

Dada unha función $y=f(x)$

- Chámase **dominio** de f ao conxunto de valores que toma a variable independente, x . Indícase como **Dom f** . O dominio está formado, polo tanto, polos valores de x para os que existe a función, é dicir, para os que hai un $f(x)$.
- O **percorrido** é o conxunto de valores que pode tomar a variable dependente, y , isto é o conxunto das imaxes. Representase por **Im f** .

Calcular Dominios

- Se a expresión analítica da función é un polinomio, o dominio son todos os números reais.

$$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } f = (-\infty, 5]$$

- Se a expresión analítica da función é un cociente, o dominio son todos os reais excepto os que anulan o denominador.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Im } f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

- Se a expresión analítica da función é unha raíz cadrada, o dominio está formado polos números reais para os que o radicando é positivo ou cero.

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

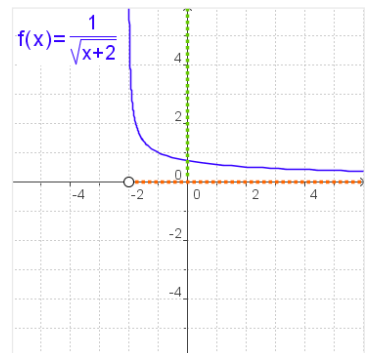
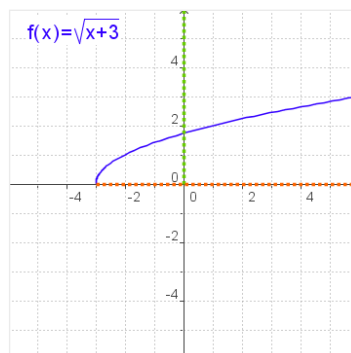
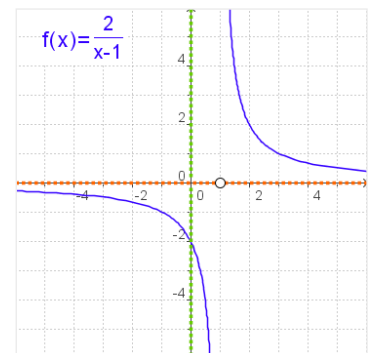
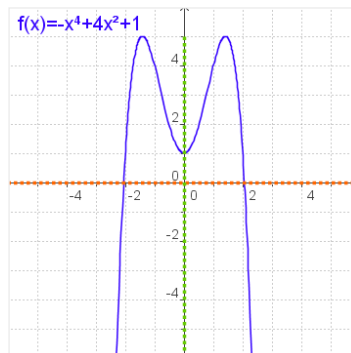
$$\text{Dom } f = [-3, +\infty)$$

$$\text{Im } f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

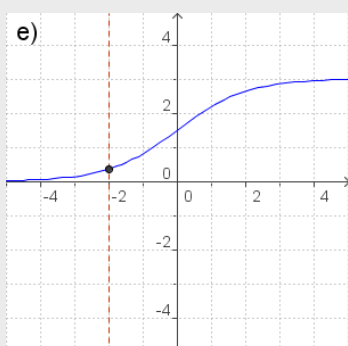
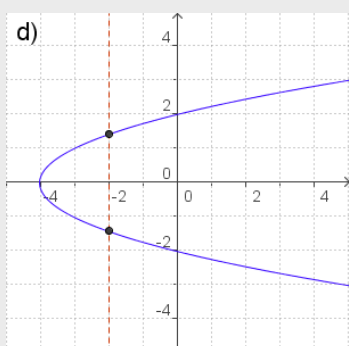
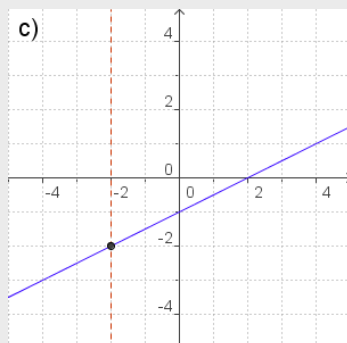
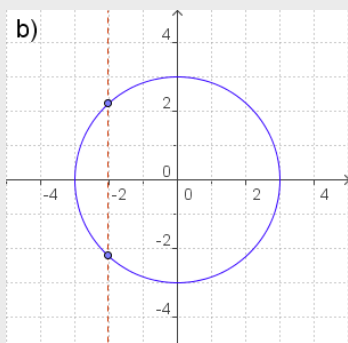
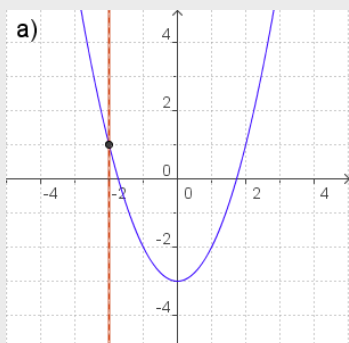
$$\text{Dom } f = (-2, +\infty)$$

$$\text{Im } f = (0, +\infty)$$



EXERCICIOS resoltos

1. Das seguintes gráficas indica as que correspondan a unha función e as que non.

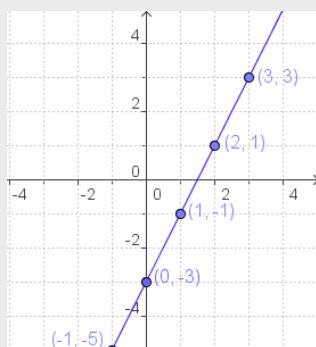


- Son gráficas dunha función a), c), e), xa que a cada x do dominio lle corresponde un único valor de y.
- Non son gráficas dunha función b), d)

2. Fai unha táboa de valores, debuxa os puntos obtidos e representa a función.

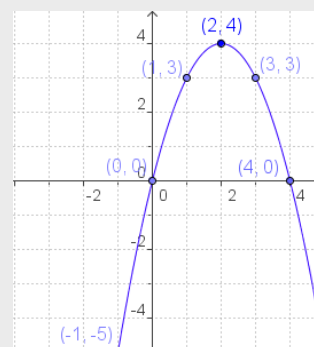
a) $f(x) = 2x - 3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



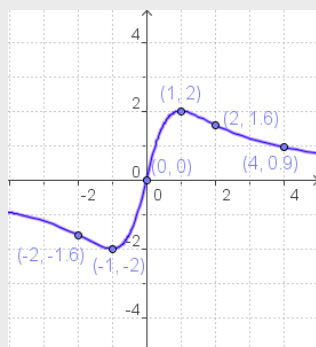
b) $f(x) = -x^2 + 4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9

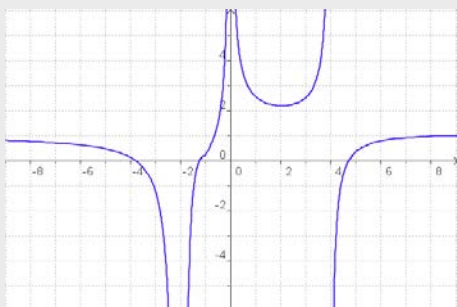


- Lembra
Para facer unha táboa de valores, a partir da expresión dunha función, substitúe na fórmula a x por os valores que desexes, opera e calcula os correspondentes de $y=f(x)$. En xeral procura alternar valores positivos e negativos.
Debuxa os puntos, (x,y), obtidos e úneos.

EXERCICIOS resoltos

3. Calcula o dominio das seguintes funcións.

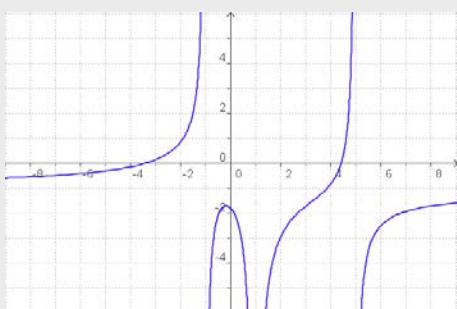
a)



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$$

Nestes puntos, non se pode atopar $f(x)$ na gráfica.

b)



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1, 5\}$$

Nos puntos indicados, non se pode atopar $f(x)$ na gráfica.

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Dom $f = \mathbb{R}$ xa que é un polinomio

d) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

Non se pode calcular $f(2)$ porque o denominador se fai 0.

e) $f(x) = \sqrt{x-5}$

$$x-5 \geq 0, \quad x \geq 5 \Rightarrow \text{Dom } f = [5, +\infty)$$

f) $f(x) = \sqrt{5-x}$

$$5-x \geq 0, \quad 5 \geq x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 5]$$

g) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4}}$

$$x+4 > 0, \quad x > -4 \Rightarrow \text{Dom } f = (-4, +\infty)$$

-4 non é do Dominio porque anula o denominador.

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

$$2-x > 0, \quad 2 > x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 2)$$

2 non é do Dominio porque anula o denominador.

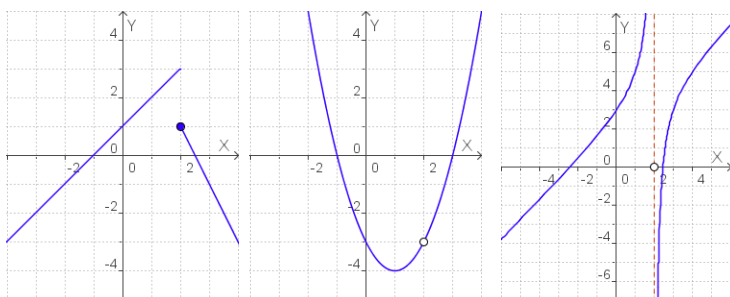
2. Propiedades das funcións

Continuidade

A primeira idea de función **continua** é que pode ser representada dun só trazo, sen levantar o lapis do papel.

Cando unha función non é continua nun punto dise que presenta unha **descontinuidade**.

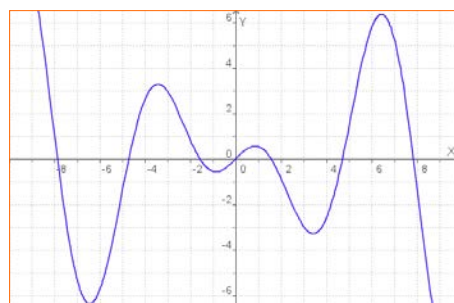
As tres funcións debuxadas debaixo son descontinuas en $x=2$, pero teñen distintos tipos de descontinuidade.



Salto finito

Descontinuidade evitable

Salto infinito



Unha función $y=f(x)$ é continua en $x=a$ se:

- A función está definida en $x=a$, existe $f(a)=b$.
- As imaxes dos valores próximos a a tenden a b .

Hai varias razóns polas que unha función pode non ser continua nun punto:

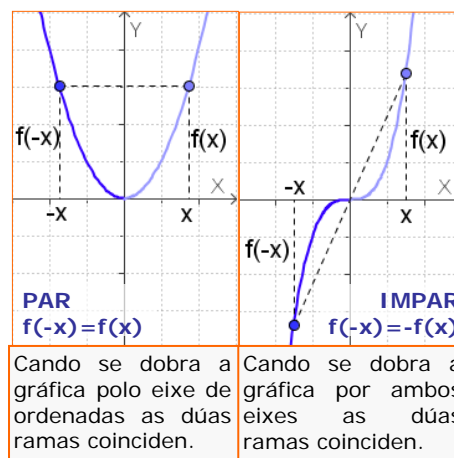
- Presenta un salto.
- A función non está definida nese punto, ou se o está queda separado, hai un "burato" na gráfica.
- A función non está definida e o seu valor crece (ou decrece) de forma indefinida cando nos acercamos ao punto.

Simetrías

A gráfica dalgunhas funcións pode presentar algún tipo de simetría que se se estuda previamente, facilita o seu debuxo.

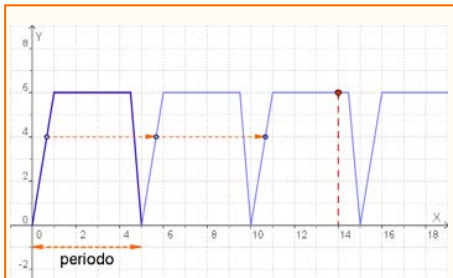
- Unha función é **simétrica** respecto ao **eixe OY**, se $f(-x)=f(x)$. Neste caso a función dise que é **PAR**.
- Unha función é **simétrica** respecto ao **orixe de coordenadas** cando $f(-x)=-f(x)$. Neste caso a función dise que é **IMPAR**.

Observa os gráficos para recoñecelas.



Cando se dobra a gráfica polo eixe de ordenadas as dúas ramas coinciden.

Cando se dobra a gráfica por ambos eixes as dúas ramas coinciden.



Unha cisterna énfese e baléirase automaticamente expulsando 6 litros de auga cada 5 minutos, seguindo o ritmo da gráfica. Cando o depósito está baleiro comeza o enchido, que leva 1 minuto, permanece cheo 3,5 minutos e baléirase en 0,5 minutos. Este proceso repítese periodicamente.

Para coñecer o volume de auga no depósito en cada instante basta con coñecer o que ocorre nestes primeiros 5 minutos.

Así aos 14 minutos, a cantidade de auga é:

$$f(14) = f(4 + 2 \cdot 5) = f(4) = 6$$

Ao dividir 14:5, cociente=2 resto=5

En xeral, se o período é 5:
 $f(x+5 \cdot n) = f(x)$

Funcións periódicas

Na natureza e no teu contorno habitual hai fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como o caso das mareas, os péndulos e resortes, o son...

As funcións que describen este tipo de fenómenos chámanse **periódicas**

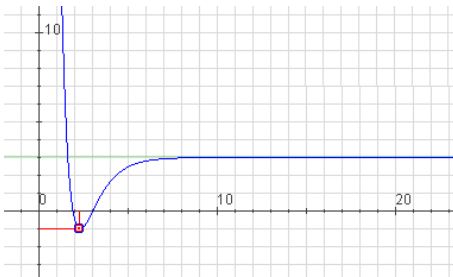
Unha **función** é **periódica** cando o seu valor se repite cada vez que a variable independente percorre un certo intervalo. O valor deste intervalo chámase **período**.

$$f(x + \text{período}) = f(x)$$

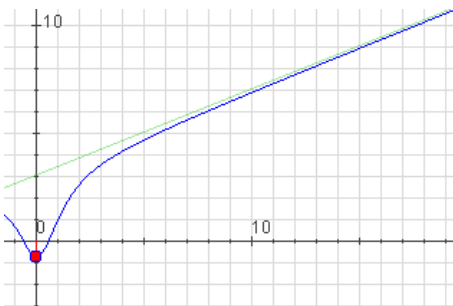
Tendencia dunha función

En ocasións a parte que nos interesa dunha función é o seu **comportamento a longo prazo**, é dicir, os valores que toma a función cando a x se fai cada vez máis grande. Cando ese comportamento é claramente definido dicimos que a función ten unha determinada **tendencia**.

No apartado anterior vimos que algunhas funcións presentan un comportamento periódico: repiten os seus valores a intervalos regulares. Aquí imos ver outros tipos de tendencias.



Función con asíntota horizontal

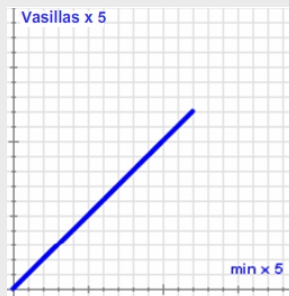


Función con tendencia lineal

1. Unha función ten unha **asíntota horizontal** se a medida que a variable independente vai tomando valores máis e máis grandes, a variable dependente vaise estabilizando entorno a un valor concreto, k. A asíntota é unha liña recta de ecuación $y=k$.
2. Unha función ten **tendencia lineal** se a medida que a variable independente vai tomando valores máis e máis grandes a súa gráfica parécese cada vez máis á dunha liña recta, á que chamaremos **asíntota oblicua**.
3. Unha función ten **tendencia cuadrática** se a medida que a variable independente vai tomando valores máis e máis grandes, a súa gráfica parécese cada vez máis a unha curva que estudaremos no próximo capítulo que se denomina **parábola** e cuxa ecuación ven dada por un polinomio de segundo grao.

EXERCICIOS resoltos

4. A imaxe adxunta representa o reloxo de auga do Museo dos Nenos en Indianápolis (Estados Unidos). O seu funcionamento é como segue: na columna da dereita hai 60 vasillas que se van enchendo de auga pouco a pouco. Cando se enche a que fai o piso 60 baléirase de golpe toda a columna e énchese unha das bolas da columna da esquerda que ten 12 bolas. Como podes supoñer a columna da esquerda indica as horas e a columna da dereita os minutos. Indica se a función que relaciona a altura da auga na columna da dereita co tempo transcorrido é continua e fai un esbozo da súa gráfica.

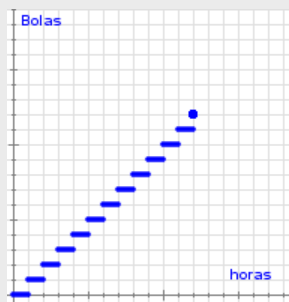


A lo longo dunha hora a columna da dereita énchese de forma case constante, polo que a **súa gráfica é continua** e ten o aspecto que se indica ao lado.

Se chamamos x ao tempo en minutos e chamamos y ao número de vasillas (o que equivale á altura), a expresión alxébrica desta función é $y = x$.

5. Indica se a función que relaciona a altura da auga na columna da esquerda co tempo transcorrido é continua e fai un esbozo da súa gráfica.

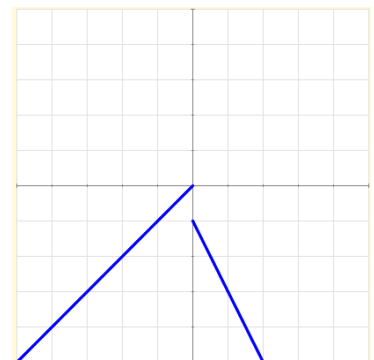
Cando cae a auga da columna dereita énchese unha bola da columna esquerda de forma case instantánea, e durante unha hora a altura da columna esquerda non cambia. Estas variacións súbitas da altura indicannos **que a función non é continua**.



Se chamamos x ás horas transcorridas e y ao número de vasillas cheas da esquerda, a expresión alxébrica desta función é $y = \text{ent}(x)$ (A parte enteira de x)

6. Indica se as gráficas que se xuntan son continuas ou descontinuas.

A primeira é descontinua porque para debuxala hai que levantar o lapis do papel, en cambio, a segunda é continua.

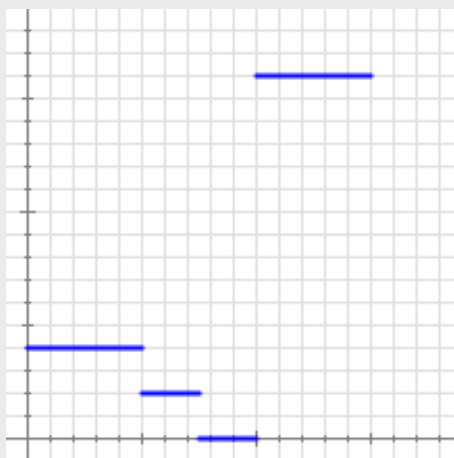


EXERCICIOS resoltos

7. Xoán ten hoxe unha excursión na escola. Como vive lonxe adoita ir en bicicleta. Nada máis chegar á escola saen todos os alumnos andando cara a estación de trens e alí esperan un rato a que chegue o tren. Soben ao tren e por fin chegan o seu destino.

Abaixo podes ver dúas gráficas: unha representa a distancia que vai percorrendo Xoán con respecto ao tempo transcorrido e a outra representa a velocidade á que se despraza, tamén con respecto ao tempo transcorrido.

Indica de forma razoada que gráfica corresponde a cada unha das dúas situacións e indica en cada caso se a función representada é continua ou non.



A primeira gráfica representa as velocidades:

Ao principio vai en bicicleta pero sempre á mesma velocidade (por iso a gráfica é horizontal). En canto chega á escola empeza a andar (segue sendo horizontal, pero está máis baixa, o que significa que andando vai máis lento que en bicicleta). Chega á estación e queda parado un rato (a velocidade é cero). Sobe ao tren (a velocidade é constante pero a gráfica máis alta indica que van moito máis rápido).

A gráfica é **descontinua** e os saltos prodúcense ao cambiar o método de locomoción.

A segunda gráfica representa as distancias a súa casa.

Ao principio a distancia vai aumentando de maneira constante (viaxe en bici), despois segue aumentando pero a gráfica está menos inclinada (iso significa que a velocidade é menor: vai andando). Durante un rato, a distancia non aumenta (a gráfica é horizontal, está parado). Por último volve aumentar moi rápido (a maior inclinación indica maior velocidade: viaxe en tren).

Neste caso non hai saltos na gráfica (polo tanto é **continua**), pero si hai cambios bruscos de velocidade que quedan reflectidos nos cambios de inclinación da gráfica.

Funcións e gráficas

3. Monotonía

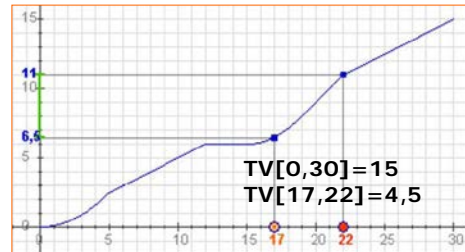
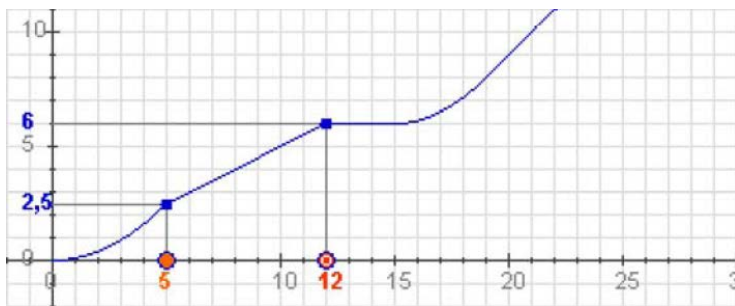
Taxa de variación dunha función

A **taxa de variación** ou **incremento** dunha función é o aumento ou diminución que experimenta unha función ao pasar a variable independente dun valor a outro.

$$TV[x_1, x_2] = f(x_1) - f(x_2)$$

De máis utilidade resulta calcular a chamada **taxa de variación media**, que nos indica a variación relativa da función respecto á variable independente:

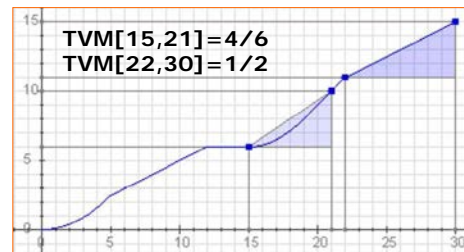
$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



A gráfica representa a distancia en km percorrida dun ciclista en función do tempo empregado, en minutos.

A TV corresponde á distancia percorrida nun intervalo de tempo.

A TVM é a velocidade media nun intervalo de tempo determinado.



Crecemento e decrecemento

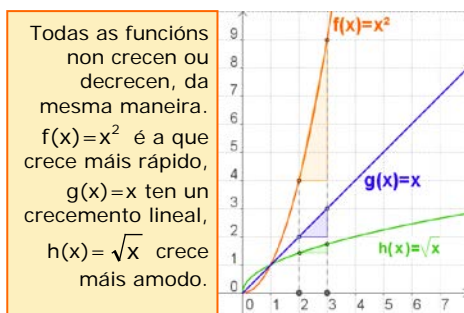
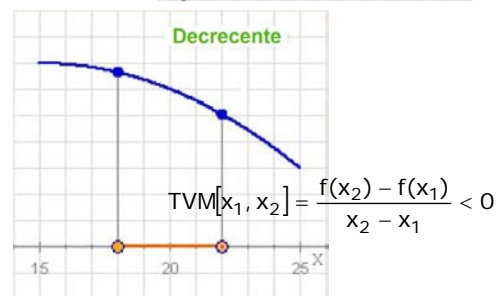
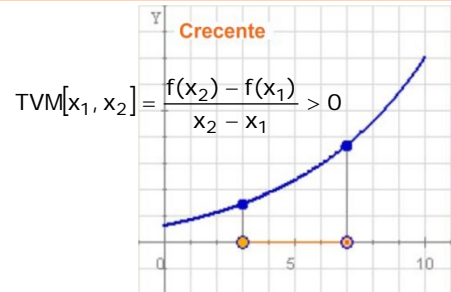
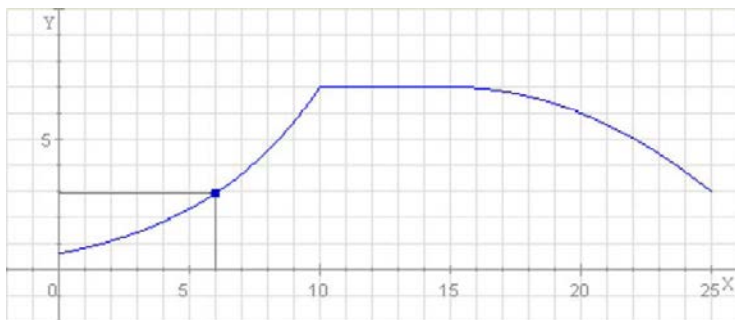
Unha característica das funcións que se pode visualizar facilmente nas gráficas é a monotonía. Cando ao aumentar o valor de x aumenta o valor de $y=f(x)$, a gráfica "ascende" e dise que a función é **crecente**. Se polo contrario ao aumentar x diminúe y , a gráfica "descende", e a función **decrece**. Precisando un pouco máis:

Unha **función** é **crecente** nun intervalo, cando dados dous puntos calquera do mesmo

- Se $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) < f(x_2)$

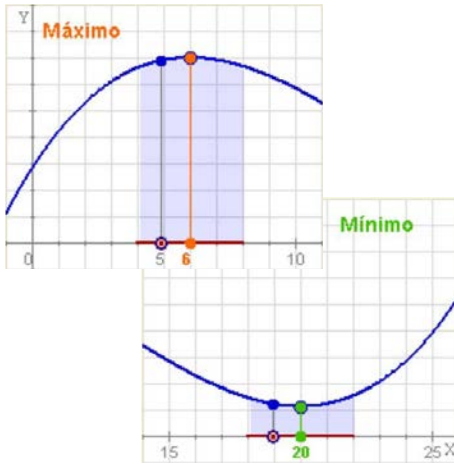
E será **decrecente**:

- Se $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) > f(x_2)$



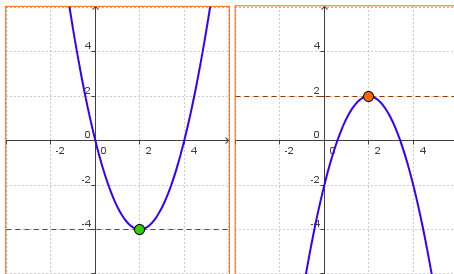
Todas as funcións non crecen ou decrecen, da mesma maneira. $f(x)=x^2$ é a que crece máis rápido, $g(x)=x$ ten un crecemento lineal, $h(x)=\sqrt{x}$ crece máis amodo.

Máximos e mínimos



Dada unha función continua nun punto $x=a$, dise que presenta un **máximo relativo**, se á esquerda de dito punto a función é crecente e á dereita a función é decrecente.

Se, polo contrario, a función é decrecente á esquerda e crecente á dereita hai un **mínimo relativo**.



Se se verifica que $f(a) > f(x)$ para calquera valor x do dominio, e non só para os valores de "ao redor", fálase de **máximo absoluto** en $x=a$.

E do mesmo xeito dise que en a hai un **mínimo absoluto** se $f(a) < f(x)$ para calquera x do dominio.

EXERCICIOS resoltos

8. Calcula a taxa de variación media das funcións seguintes entre os puntos indicados. Comproba na figura que nas funcións cuxo gráfico é unha recta a TVM é constante.

a) $y=2x+3$

$$TVM[1,3] = \frac{9-5}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$TVM[-5,-2] = \frac{-1+7}{-2+5} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $y=0,5x+3$

$$TVM[1,3] = \frac{4,5-3,5}{2} = 0,5$$

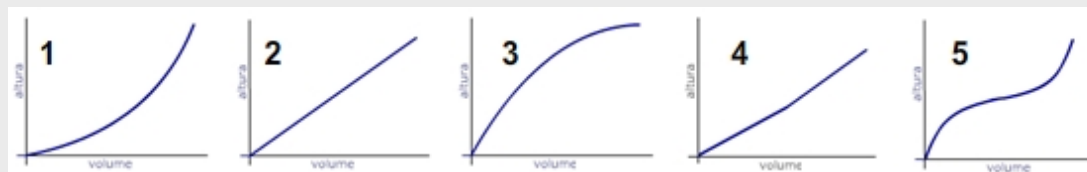
$$TVM[-3,0] = \frac{3-1,5}{3} = 0,5$$



Funcións e gráficas

EXERCICIOS resoltos

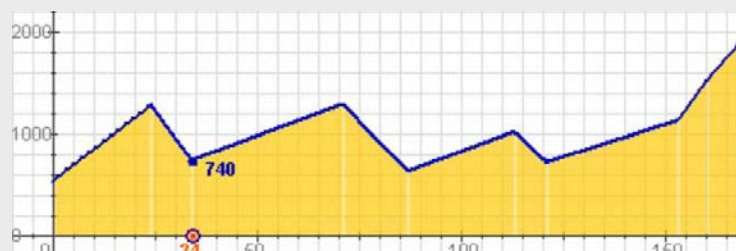
9. As gráficas representan o enchido dos distintos recipientes, que gráfica corresponde a cada un?



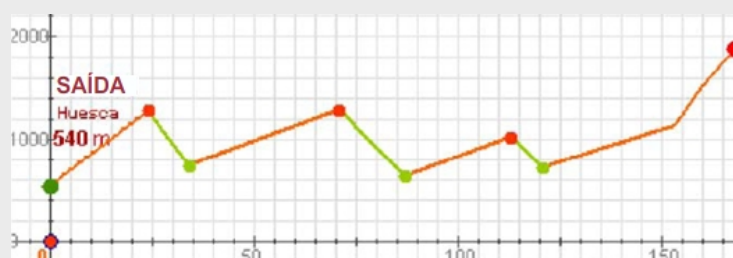
- a → 2
b → 4
c → 5
d → 3
e → 1

10. Lembra a función que daba o “perfil” dunha etapa da Volta, que viches no primeiro capítulo.

- Escrebe os intervalos de crecemento ou decrecemento.
- En que punto quilométrico se alcanzan os máximos relativos? Que valor toman? E os mínimos?
- Hai máximo ou mínimo absoluto?



k m	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

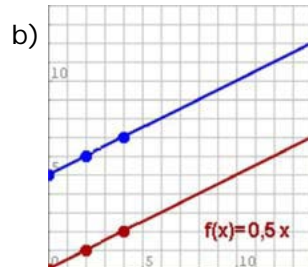
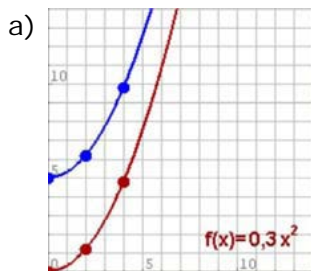


- Crecente: $(0,24) \cup (34,71) \cup (87,113) \cup (121,168)$
 Decrecente: $(24,34) \cup (71,87) \cup (113,121)$
- MÁX: $x=24, y=1280$; $x=71, y=1290$; $x=113, y=1020$;
 MÍN: $x=34, y=740$; $x=87, y=630$; $x=121, y=720$
- Neste caso a función ten máximo e mínimo absolutos, que se alcanzan ambos nos extremos do dominio, mín en $x=0$ de valor 540 m, máx en $x=168$ de valor 1882 m.



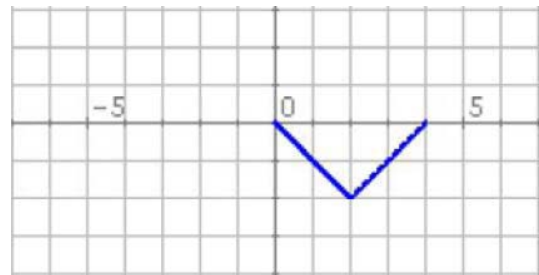
Para practicar

1. Considera a función que a cada n° lle asigna o seu cadrado menos 1. Escribe a súa expresión analítica e calcula a imaxe de -1, 1 e 2. Calcula tamén os cortes cos eixes.
2. Considera a función que a cada n° lle asigna a súa metade máis 3. Escribe a súa expresión analítica e calcula a imaxe de -1, 1 e 3. Calcula tamén os cortes cos eixes.
3. Considera a función que a cada n° lle asigna o seu dobre menos 5. Escribe a súa expresión analítica e calcula a imaxe de -2, -1 e 1. Calcula tamén os cortes cos eixes.
4. Calcula o dominio das seguintes funcións:
 - a) $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$
 - b) $f(x) = \frac{2x}{2x - 4}$
 - c) $f(x) = \sqrt{x + 5}$
5. Calcula as TVM das funcións das gráficas seguintes nos intervalos $[0, 4]$ e $[2, 4]$:

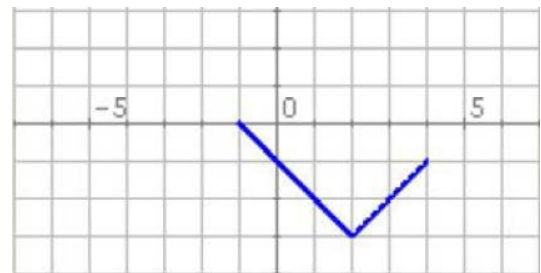


6. En cada caso a gráfica representa un tramo ou período dunha función periódica, representa outros tramos, indica o período e calcula a imaxe do punto de abscisa que se indica:

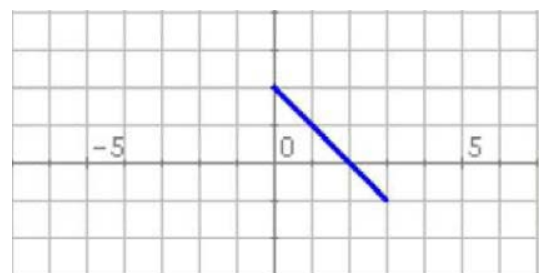
a) $f(-2)$



b) $f(-3)$

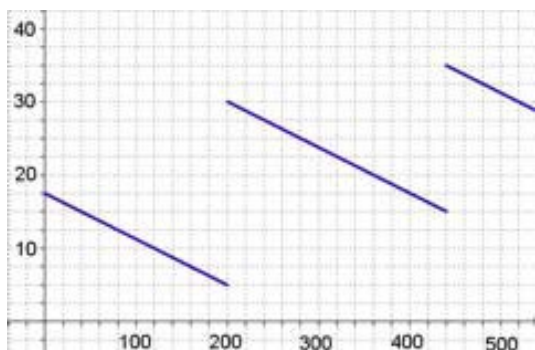


c) $f(-1)$

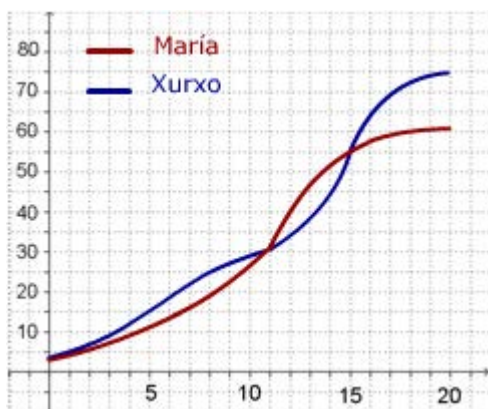


Funcións e gráficas

7. O gráfico amosa como varía a gasolina que hai no meu auto durante unha viaxe de 520 km por unha autovía.

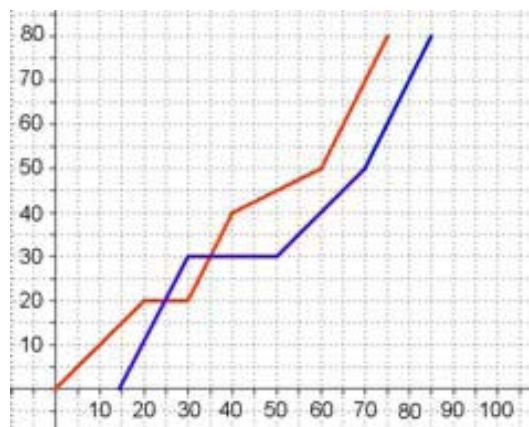


- Canta gasolina había ao cabo de 240 km?. No depósito caben 40 litros, cando estaba cheo máis de medio depósito?
 - En cantas gasoleiras parei?, en que gasoleira botei máis gasolina?. Se non tivera parado, onde me tería quedado sen gasolina?
 - Canta gasolina usei nos primeiros 200 km?. Canta en toda a viaxe?. Canta gasolina gasta o auto cada 100 km nesta autovía?
8. María e Xurxo son dúas persoas máis ou menos típicas. Na gráfica podes comparar como variou o seu peso nos seus primeiros 20 anos



- Canto pesaba Xurxo aos 8 anos?, e María aos 12?. Cando superou Xurxo os 45 kg?
- A que idade pesaban os dous igual? Cando pesaba Xurxo máis que María?, e María máis que Xurxo?
- Cal foi o promedio en kg/ano de aumento de peso de ambos entre os 11 e os 15 anos?. En que período creceu cada un máis rapidamente?

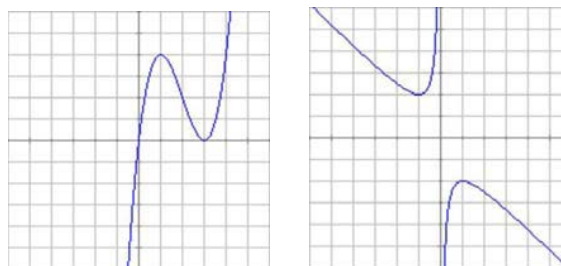
9. O gráfico da o espazo percorrido por dous autos que realizan un mesmo traxecto.



- Cal é a distancia percorrida? Se o primeiro auto saíu ás 10:00, a que hora saíu o 2º?. Canto lle levou a cada un facer o percorrido?
- Canto tempo e onde estivo parado cada auto?. En que km adiantou o 2º ao 1º?, e o 1º ao 2º?
- Que velocidade media levaron no traxecto total?, en que tramo a velocidade de cada auto foi maior?.

10. As gráficas seguintes corresponden as funcións I e II.

I) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ II) $f(x) = -\frac{x^2 + 1}{x}$



Calcula en cada unha:

- O dominio.
- Os puntos de corte cos eixes.
- Os valores de x para os que a función é positiva e negativa.
- Os intervalos de crecemento e decrecemento.
- Os máximos e mínimos.
- Presentan algunha tendencia especial?

Para saber máis



A primeira función

O primeiro en construír unha función foi **Galileo** (1564-1642). Desde o alto da torre inclinada de Pisa tirou dúas bolas, unha de ferro e outra de madeira e comprobou que a pesar da diferenza de peso, ambas chegaban ao chan á vez, tiña descuberto a lei de caída dos corpos.

Continuando o seu estudo e empregando un curioso aparello, comprobou que o espazo percorrido depende do cadrado do tempo, escribindo a primeira función da historia. A primeira definición formal de función débese a **Euler**, que no libro *Introductio in analysis infinitorum*, publicado en 1748, di:

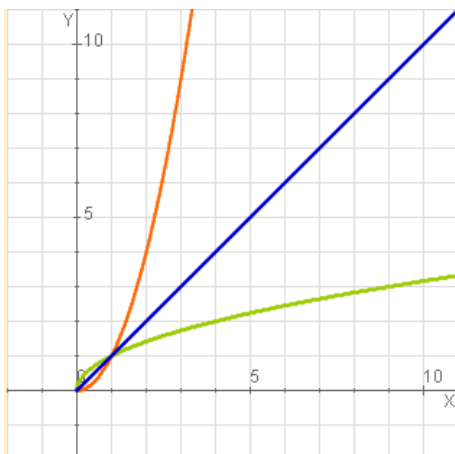
“Unha función dunha cantidade variable é unha expresión analítica composta de calquera maneira a partir da cantidade variable e de números ou cantidades constantes”.

En 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, volve sobre o tema acercándose máis á que hoxe utilizamos.

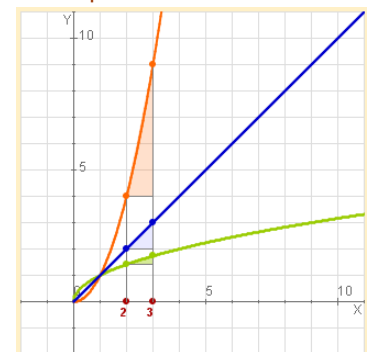
TVM e crecemento

Como viches a TVM das funcións cuxa gráfica é unha recta é constante, entón o seu crecemento será sempre o mesmo, dicimos que é lineal.

Se observas as tres funcións da esquerda, son crecentes. Comparemos o crecemento das tres:

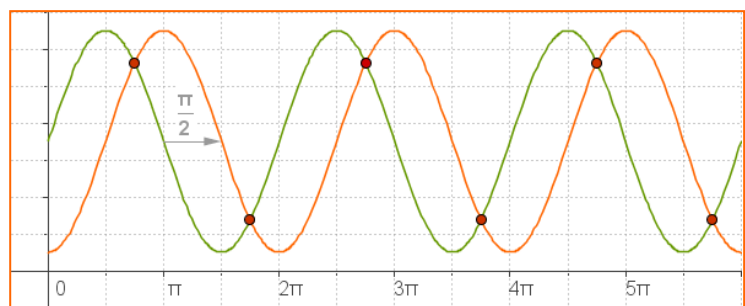
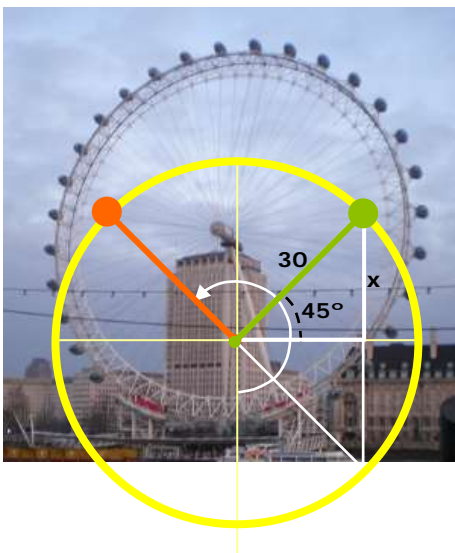


$h(x)=\sqrt{x}$	$TVM[2,3]= 0,32$	cada vez menor
$g(x)=x$	$TVM[2,3]= 1$	mantense constante
$f(x)=x^2$	$TVM[2,3]= 5$	cada vez maior



$f(x)$ crece “axiña”,

$g(x)$ ten un crecemento lineal, $h(x)$ crece “amodo”.



Observa as dúas gráficas, ambas funcións son periódicas de período 2π , a gráfica verde está desfasada $\pi/2$ respecto á laranxa; fíxate onde alcanzan os máximos e os mínimos.

Cando coinciden as dúas gráficas, a que altura están?,
 $x=r \cdot \text{sen } 45^\circ=21,21 \text{ m}$; 1) $35-21,21=13,79$ 2) $35+21,21=56,21$



Lembra o máis importante

- Unha **función** é unha relación entre dúas variables x e y , de modo que a cada valor da variable independente, x , lle asocia un único valor da variable y , a dependente.
- O **dominio** dunha función é o conxunto de todos os posibles valores que pode tomar x .
- A **gráfica** dunha función é o conxunto de puntos $(x, f(x))$ representados no plano.
- Unha función é **continua** se pode representarse con un só trazo. É **descontinua** nun punto se presenta un "salto" ou non está definida nese punto.
- Unha función é **periódica** de período t , se a súa gráfica se repite cada t unidades, $f(x+t)=f(x)$.
- Unha función é **simétrica** respecto ao eixe OY, función par, se $f(x)=f(-x)$; e é simétrica respecto ao orixe, función impar, se $f(-x)=-f(x)$.
- A **taxa de variación** dunha función entre dous puntos é a diferenza: $TV[x_1, x_2]=f(x_2)-f(x_1)$.
A **taxa de variación media** é:

$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

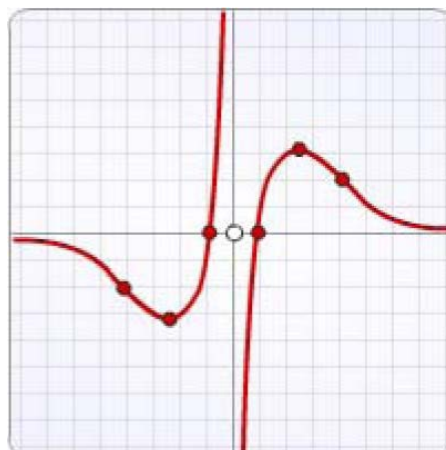
- Unha función é **crecente** nun intervalo, cando dados dous puntos calquera do mesmo

$$\text{Se } x_1 < x_2 \text{ entón } f(x_1) < f(x_2)$$

- E é **decrecente**

$$\text{Se } x_1 < x_2 \text{ entón } f(x_1) > f(x_2)$$

- Unha función continua nun punto $x=a$, presenta un **máximo** relativo, se á esquerda de dito punto é crecente e a dereita é decrecente. Se, polo contrario, é decrecente antes e crecente despois hai un **mínimo** relativo.



Dominio

Todos os reais excepto o 0

Continuidade

Non é continua, en 0 presenta unha descontinuidade de salto infinito.

Simetría

É simétrica respecto a orixe de coordenadas, función impar.

Cortes cos eixes

Ao eixe de abscisas en $(-1,0)$ e $(1,0)$; non corta ao eixe de ordenadas.

Crecedemento e decrecemento

É crecente en $(-\infty, -2.5) \cup (2.5, +\infty)$
É decrecente en $(-2.5, 0) \cup (0, 2.5)$

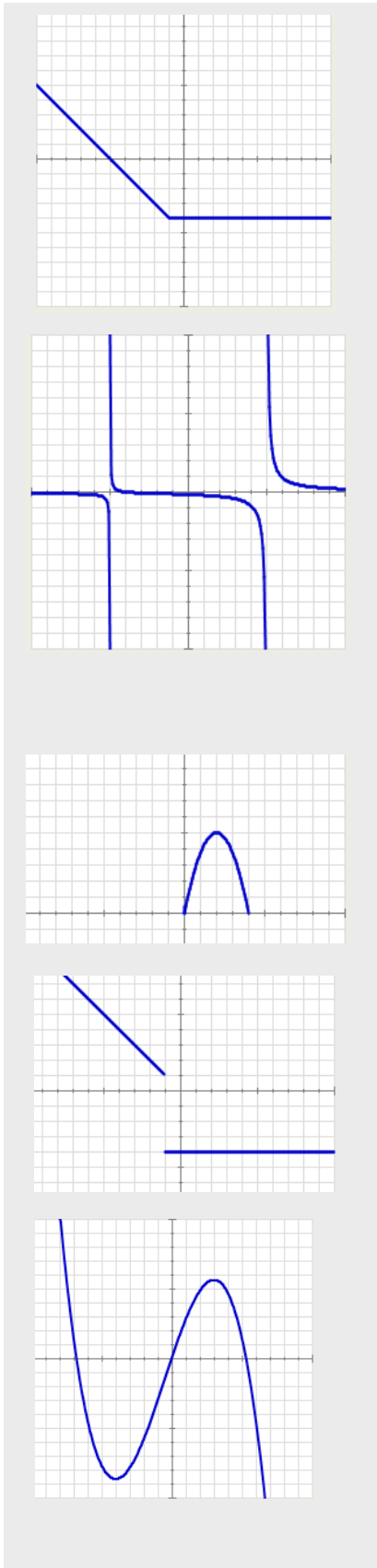
Máximos e mínimos

Máximo en $(2.5, 3)$;
Mínimo en $(-2.5, 3)$

Tendencia

Ten unha asíntota horizontal

Auto-avaliación



1. Calcula a imaxe do cero na función da primeira gráfica adxunta.
2. Calcula o dominio da función correspondente á segunda gráfica da esquerda.
3. Cal dos puntos seguintes: $A(-3,14)$; $B(1,3)$; $C(0,8)$, non pertence á gráfica da función

$$f(x) = -x^2 - 5x + 8$$
4. Calcula os puntos de corte cos eixes de coordenadas da recta de ecuación $y = -x + 5$
5. Se $y=f(x)$ é unha función IMPAR e $f(-1)=-8$, canto vale $f(1)$?
6. A terceira gráfica amosa o primeiro tramo dunha función periódica de período 4 e expresión $f(x)=-1,25x^2+5x$ se x está entre 0 e 4. Calcula $f(17)$.
7. En que punto debe comezar o tramo horizontal da cuarta gráfica adxunta para que a función á que representa sexa continua?
8. Calcula a TVM no intervalo $[-2,-1]$ da función $f(x) = -x^2 - x + 4$.
9. Determina o intervalo no que a función da última gráfica adxunta é crecente.
10. Un ciclista sae dun punto, A, cara outro, B, distante 70 km a unha velocidade constante de 35 km/h. Á vez, sae outro de B cara A a 40 km/h. A cantos km do punto A se cruzan na estrada?

Funcións e gráficas

Solucións dos exercicios para practicar

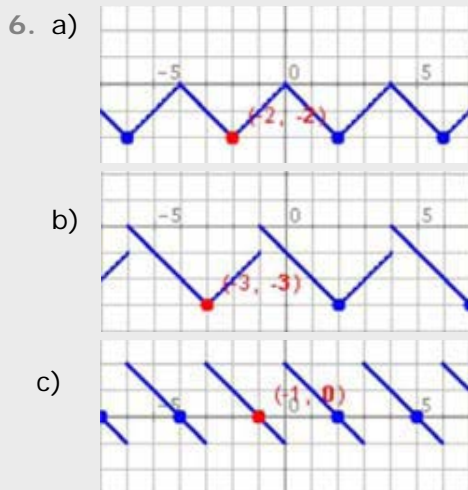
1. $f(x)=x^2-1$
 $f(-1)=0, f(2)=3, f(1)=0$
Corte OY: -1 Corte OX: 1 e -1

2. $y = \frac{x}{2} + 3$
 $f(-1)=2,5 f(1)=3,5 f(3)=4,5$
Corte OY: 3 Corte OX: -6

3. $f(x)=2x-5$
 $f(-2)=-9, f(-1)=-7, f(1)=-5$
Corte OY: -5 Corte OX: 2.5

4. a) R
b) $\mathbb{R}-\{2\}$
c) $\{x \geq -5\}$

5. a) $TVM[0,4]=TVM[2,4]=0.5$
b) $TVM[0,4]=1,2; TVM[2,4]=1.8$



7. a) 27,5 litros; entre o km 200 e o 360 e do 440 ata o 520.
b) En dúas, unha no km 200 e outra no 440; botei máis na 1ª; aos 280 km
c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km

8. a) J. 25 kg, M. 35 kg ; aos 14 anos
b) Aos 11 (30 kg) e aos 15 (55 kg)
X máis que M: ata os 11 e desde os 15;
M máis que X: dos 11 a 15
c) 25kg; 6,25 kg/ano;
M entre os 11 e 12 (10 kg/ano);
X entre os 12-14 (10 kg/ano)

9. a) 80 km; ás 10:15; 75 e 70 min
b) 10 min en km 20, 20 min en km 30;
no km 20 e en 30 respectivamente.
c) 64 km/h e 68,6 km/h; 1º: min 60-75
2º: min 15-30 e min 70-85

10. I)
- a) \mathbb{R}
 - b) $(0,0)(3,0)$
 - c) $y > 0 (0, +\infty); y < 0 (-\infty, 0);$
 - d) $\text{crec: } (-\infty, 1) \cup (3, +\infty),$
 $\text{decrec: } (1, 3);$
 - e) $\text{máx } x=1, \text{ mín } x=3;$
 - f) Non
- II)
- a) $\mathbb{R}-\{0\}$
 - b) Non corta
 - c) $y < 0 (0, +\infty); y > 0 (-\infty, 0)$
 - d) $\text{decrec: } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 $\text{crec: } (-1, 0) \cup (0, 1);$
 - e) $\text{máx } x=1, \text{ mín } x=-1;$
 - f) lineal.

Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1. $f(0) = -4$
2. $\mathbb{R} - \{5, -5\}$
3. $(1, 3)$
4. $(0, 5) (5, 0)$
5. $f(1) = 8$
6. $f(17) = f(1) = 3,75$
7. $(-1, 1)$
8. $TVM[-2, -1] = 2$
9. $(-4, 3)$
10. A 32,7 km de A.