11 Funcións exponenciais e logarítmicas

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Coñecer as características da función de proporcionalidade inversa e os fenómenos que describen.
- Determinar as asíntotas dunha hipérbole.
- Recoñecer e representar funcións exponenciais.
- Aplicar as funcións exponenciais ao interese composto e outras situacións.
- Calcular o logaritmo dun número.
- Interpretar as gráficas das funcións logarítmicas.

1.Funcións racionais .... páx. 4
Función de proporcionalidade inversa
As asíntotas
Outras funcións racionais

2.Funcións exponenciais .... páx. 7
Características
Crecemento exponencial
Aplicacións

3.Funcións logarítmicas .... páx. 10
Función inversa da exponencial
Función logarítmica
Logaritmos

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumo

Auto-avaliación

Antes de empezar

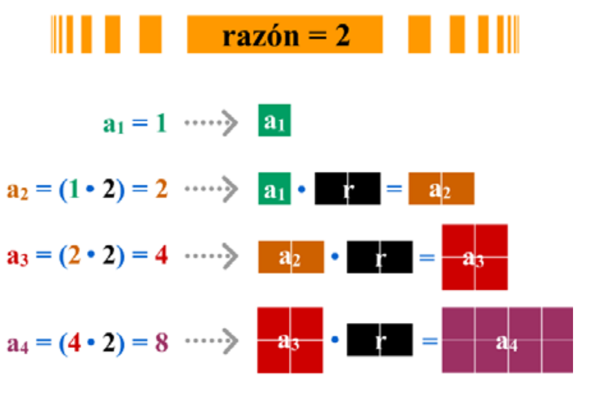
Lembra

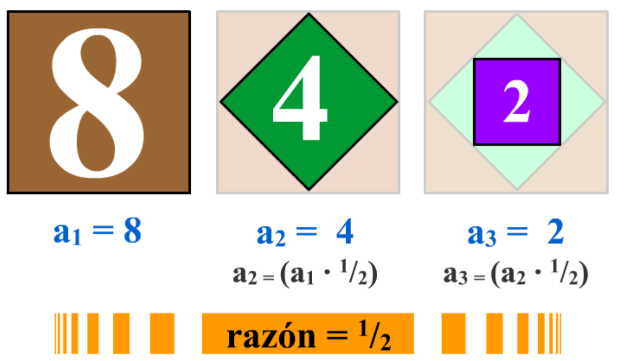
O curso pasado estudaches as progresións tanto aritméticas como xeométricas, no cadro podes repasar estas últimas, virache ben para comprender mellor a función exponencial.

Progresións xeométricas

Unha progresión xeométrica está constituída por unha secuencia de elementos na que cada un se obtén do anterior multiplicándoo por unha constante denominada razón da progresión.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...$	3, 12, 48, 192...
razón: d	razón: 4
a_1	$a_1 = 3$
$a_2 = a_1 \cdot d$	$a_2 = 3 \cdot 4 = 12$
$a_3 = a_2 \cdot d$	$a_3 = 12 \cdot 4 = 48$
$a_4 = a_3 \cdot d$	$a_4 = 48 \cdot 4 = 192$
...	...
$a_n = a_{n-1} \cdot d$	





Investiga

Benjamin Franklin, famoso científico e estadista, deixou un legado de 1000 libras para as cidades de Boston e Filadelfia co fin de que se prestasen a mozos aprendices ao 5% anual. Segundo Franklin ao cabo de 100 anos converteríanse convertido en 131000 libras, das cales 100000 serían para obras públicas e as 31000 restantes volverían a utilizarse como préstamos outros 100 anos. Calculou ben?

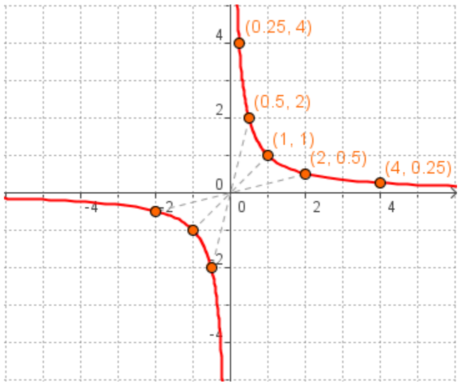
1. Funcións racionais

Función de proporcionalidade inversa

A función de proporcionalidade inversa relaciona dúas magnitudes inversamente proporcionais.

A súa expresión alxébrica é: $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}$

A súa gráfica é unha **hipérbole**. Na figura pódese ver o trazado de f(x)=1/x.

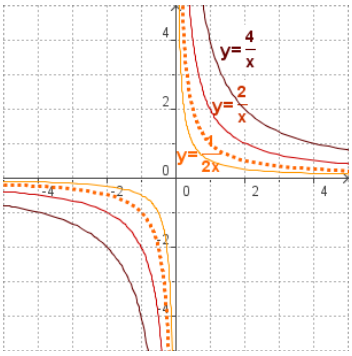


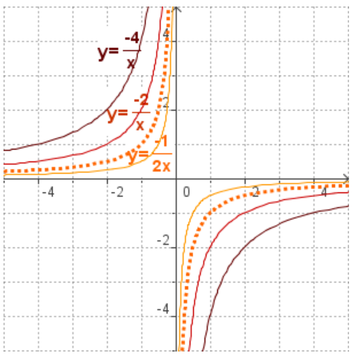
Facendo unha táboa de valores:

x	1	2	0,5	4	0.25	-1	-2	-0.5
f(x)	1	0,5	2	0,25	4	-1	-0,5	-2

- O **dominio** e o **percorrido** son todos os reais excepto o 0.
- É unha función **impar**: f(-x)=k/(-x)=-f(x).
- Se **k>0** a función é **decrecente** e a súa gráfica aparece nos cuadrantes 1º e 3º.
- Se **k<0** a función é **crecente** e a súa gráfica está no 2º e 4º cuadrante.

A partir desta observa como cambia a gráfica ao variar o valor da constante k:





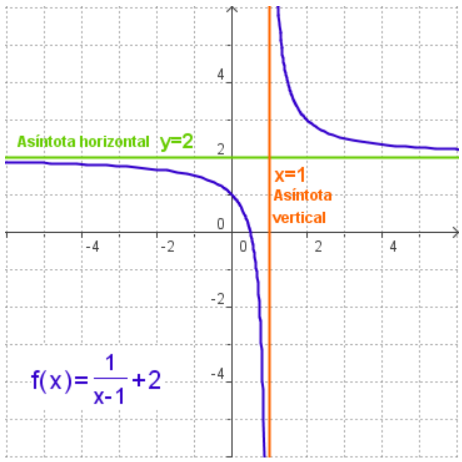
As asíntotas

Na gráfica da función f(x)=k/x pódese observar como as ramas da hipérbole se aproximan aos eixes de coordenadas, son as asíntotas.

Cando a gráfica dunha función se achega cada vez máis a unha recta, confundíndose con ela, dise que a recta é unha **asíntota**.

Aínda que estas rectas poden levar calquera dirección no plano aquí limitarémonos ás:

- ✓ **Asíntotas verticais.** A recta **x=a** é unha asíntota vertical da función se se verifica que cando o valor x tende ao valor a, o valor de f(x) tende a valores cada vez máis grandes, f(x)→+∞, ao máis pequenos, f(x)→-∞.
- ✓ **Asíntotas horizontais**. A recta **y=b** é unha asíntota horizontal da función se se verifica que cando x→+∞ ou x→-∞, o valor de f(x)→b.



O Asíntota vertical **x=1**

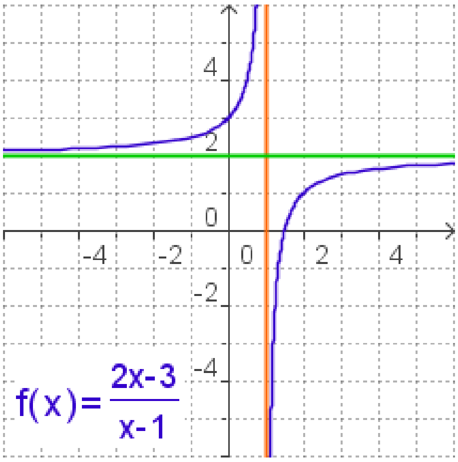
$x \to 1^+$ (pola dereita) $f(x) \to +\infty$

$x \to 1^-$ (pola esquerda) $f(x) \to -\infty$

O Asíntota horizontal **y=1**

$x \to +\infty$ $\quad f(x) \to 2$

$x \to -\infty$ $\quad f(x) \to 2$



Calcular as asíntotas

- O denominador é 0 se x=1, **AV: x=1**
- Ao dividir numerador por denominador

$$\begin{array}{r|l} 2x-3 & x-1 \\ \hline \underline{-2x+2} & 2 \quad \text{Cociente} \\ \text{Resto:}\quad -1 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x-3}{x-1}=\frac{-1}{x-1}+2 \quad \textbf{AH: y=2}$$

E o resto indica a forma da hipérbole, como y=-1/x

Outras funcións racionales

As funcións racionais son aquelas cuxa expresión alxébrica é un cociente de polinomios.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

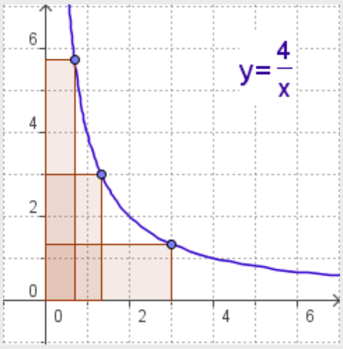
- O seu **dominio** son todos os reais excepto os que anulan o denominador. Neses puntos hai unha asíntota vertical.
- Se o grao do numerador e do denominador coinciden hai asíntota horizontal.
- Para calcular o punto de corte co eixe OY calcúlase f(0), e para calcular os cortes co eixe OX resólvese a ecuación P(x)=0.

A máis sinxela de todas é a función de proporcionalidade inversa coa que se inicia este capítulo.

Calcular e debuxar as asíntotas, cando teñen, permite saber como é a gráfica da función con bastante facilidade. Para isto faise o cociente entre numerador e denominador como se indica no exemplo da esquerda.

EXERCICIOS resoltos

1. Cal é a área dos rectángulos da figura?



Área = base x altura

En todos os rectángulos así debuxados

Área =x·y=4

2. A seguinte táboa corresponde a cantidades inversamente proporcionais, complétaa e escribe a expresión alxébrica da función y=f(x).

x	f(x)
	-3
0.5	-12
	-1,2
-2	3
-3	
-1	

O produto de dúas cantidades inversamente proporcionais é constante.

Neste caso 0,5·(-12)=(-2)·3=**-6**

A función é $f(x)=\frac{-6}{x}$

x	f(x)
2	-3
0.5	-12
5	-1,2
-2	3
-3	**2**
-1	**6**

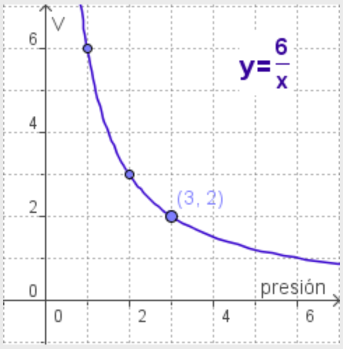
EXERCICIOS resoltos

3. Segundo a Lei de Boyle-Mariotte, a presión que exerce un gas e o volume que ocupa son inversamente proporcionais. A 25º determinada cantidade de gas ocupa un volume de 2 litros e exerce unha presión de 3 atmosferas.

a) Que volume ocupará cando a presión exercida sexa de 1 atmosfera?

b) Que presión exercerá cando o volume sexa 3 litros?

c) Escribe a función presión → volume e debuxa a súa gráfica



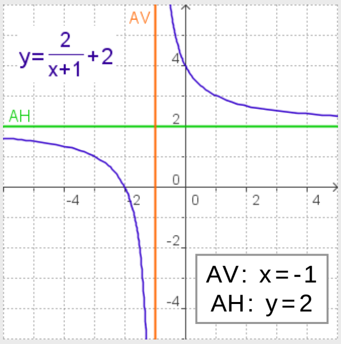
P·V=cte. neste caso P·V=6

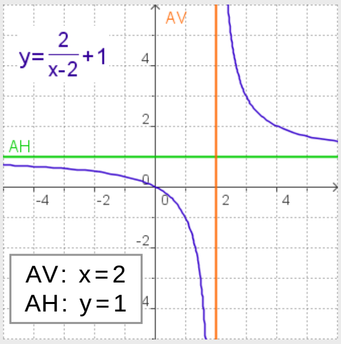
a) P=1 atm. V=6 litros

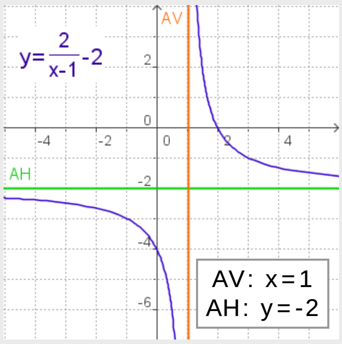
b) V=3 litros P=2 atm.

c) $f(x)=\frac{6}{x}$

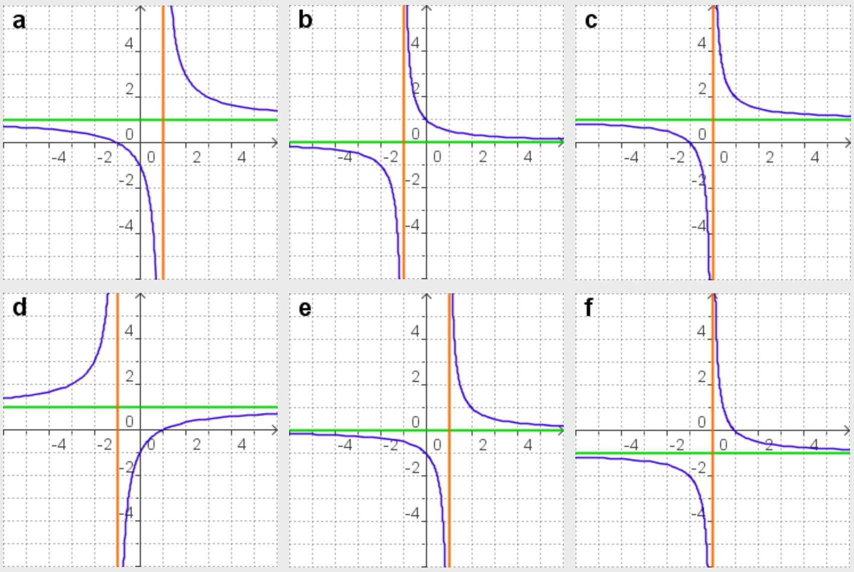
10. Nas seguintes funcións, debuxa as asíntotas e escribe a súa ecuación.







11. Decide que gráfica corresponde a cada función:



1) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ → **e**

2) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ → **b**

3) $f(x)=\frac{x+1}{x}$ → **c**

4) $f(x)=\frac{1-x}{x}$ → **f**

5) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ → **a**

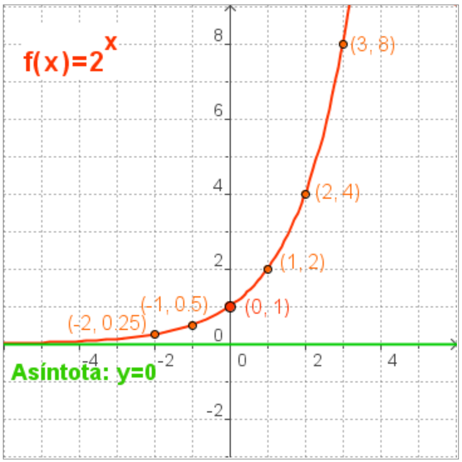
6) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ → **d**

2. Funcións exponenciais

A función exponencial

A función exponencial é da forma $\mathbf{y=a^x}$, sendo **a** un número real positivo.

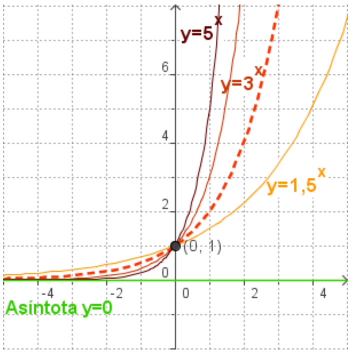
Na figura vese o trazado da gráfica de $y=2^x$.

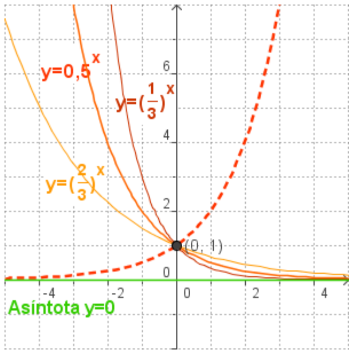


x	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	-0.5
y	0,125	0,25	0,5	**1**	2	4	8	-2

- O **dominio** son todos os reais e o **percorrido** son os reais positivos.
- É **continua**.
- Se **a>1** a función é **crecente** e se **0<a<1** é **decrecente**.
- Corta ao eixe OY en (0,1).
- O eixe OX é **asíntota**.
- A función é **inxectiva**, isto é se $\mathbf{a^m=a^n}$ entón **m=n**.

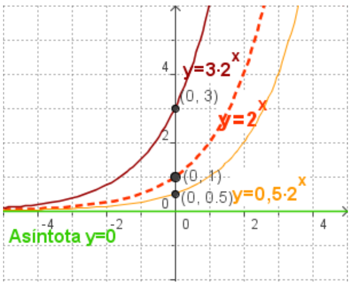
Nos gráficos inferiores pódese ver como cambia a gráfica ao variar a. Observa que as gráficas de $\mathbf{y=a^x}$ e de $\mathbf{y=(1/a)^x=a^{-x}}$ son simétricas respecto do eixe OY.

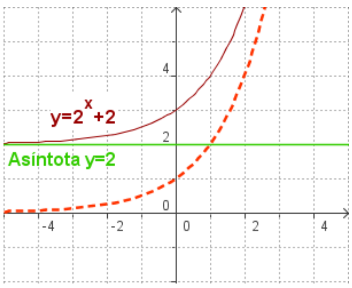




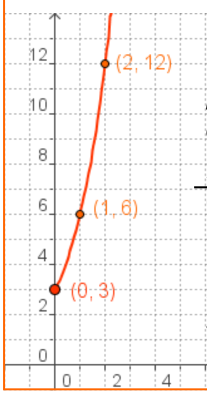
Nas gráficas da dereita pódese ver como ao multiplicar por unha constante $\mathbf{y=k\cdot a^x}$ o punto de corte co eixe OY é **(0,k)**.

Ao sumar (ou restar) unha constante b a gráfica desprázase cara arriba (ou cara abaixo) b unidades e a asíntota horizontal pasa a ser **y=b**.





Nun laboratorio teñen un cultivo bacteriano, se o seu peso se multiplica por 2 cada día, cal é o seu crecemento se o peso inicial é 3 gr?



$f(x)=3\cdot 2^x$

Peso inicial: **3 gr**

Crecemento: **por 2**

x	f(x)
0	3·1=3
1	3·2=6
2	3·4=12
3	3·8=24
4	3·16=32

Crecemento exponencial

A función exponencial preséntase en multitude de fenómenos de crecemento animal, vexetal, económico, etc. En todos eles a variable é o tempo.

No crecemento exponencial, cada valor de **y** obtense multiplicando o valor anterior por unha cantidade constante **a**.

Onde **k** é o valor inicial (para t=0), **t** é o tempo transcorrido e **a** é o factor polo que se multiplica en cada unidade de tempo.

Se **0<a<1** se trata dun decrecemento exponencial.

Aplicacións

A función exponencial serve para describir calquera proceso que evolucione de modo que o aumento (ou diminución) nun pequeno intervalo de tempo sexa proporcional ao que había ao comezo do mesmo.

A continuación vense tres aplicacións:

- Crecemento de poboacións.
- Interese do diñeiro acumulado.
- Desintegración radioactiva.

✓ Interese composto

No interese composto os intereses producidos por un capital, C_0 vanse acumulando a este, de tempo en tempo, para producir novos intereses.

Os intervalos de tempo, ao cabo dos cales os intereses se acumulan ao capital, chámanse períodos de capitalización ou de acumulación. Se son t anos, r é o rédito anual (interese anual en %) o capital final obtido vén dado pola fórmula:

$$C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Se se consideran n períodos de tempo, (n=12 se meses, n=4 se trimestres, n=365 se días,...) a fórmula anterior queda:

$$C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n \cdot 100}\right)^{nt}$$

Colócanse 5000 € ao 6% anual. En canto se converterán ao cabo de 5 anos?

- *Se os intereses se acumulan anualmente*

$$C_F = 5000 \cdot 1.06^5 = 6691{,}13 \text{ €}$$

- *Se os intereses se acumulan mensualmente*

$$C_F = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12 \cdot 5} =$$
$$= 5000 \cdot 1{,}005^{60} = 6744{,}25 \text{ €}$$

- *Se os intereses se acumulan trimestralmente*

$$C_F = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{4 \cdot 5} =$$
$$= 5000 \cdot 1{,}015^{20} = 6734{,}27 \text{ €}$$

✓ Crecemento de poboacións

O crecemento vexetativo dunha poboación vén dado pola diferenza entre nacementos e defuncións.

Se inicialmente partimos dunha poboación P_0, que ten un índice de crecemento i (considerado en tanto por 1), ao cabo de t anos converterase en

$$\mathbf{P = P_0 \cdot (1+i)^t}$$

Unha vila ten 600 habitantes e a súa poboación crece anualmente un 3%.

- *Cantos habitantes haberá ao cabo de 8 anos?*

$$P = 600 \cdot 1.03^8 \approx 760$$

✓ Desintegración radioactiva

As substancias radioactivas desintégranse co paso do tempo. A cantidade dunha certa substancia que vai quedando ao longo do tempo vén dada por:

$$\mathbf{M = M_0 \cdot a^t}$$

$\mathbf{M_0}$ é a masa inicial,
$\mathbf{0<a<1}$ é unha constante que depende da substancia e da unidade de tempo que tomemos.

A rapidez de desintegración das substancias radioactivas mídese polo "*período de desintegración*" que é o tempo que tarda en reducirse á metade.

Un gramo de estroncio-90 redúcese á metade en 28 anos, se no ano 2000 tiñamos 20 gr e tomamos como orixe de tempo o ano 2000.

- *A función é:*

$$M(x) = 20 \cdot 0{,}5^{\frac{x}{28}} = 20 \cdot 0{,}9755^x$$

- *No ano 2053 quedará:*

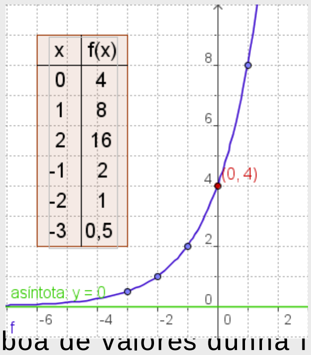
$$M = 20 \cdot 0{,}9755^{53} = 5{,}38 \text{ gr}$$

EXERCICIOS resoltos

6. Representa e estuda as funcións

a) $f(x)=4\cdot 2^x$

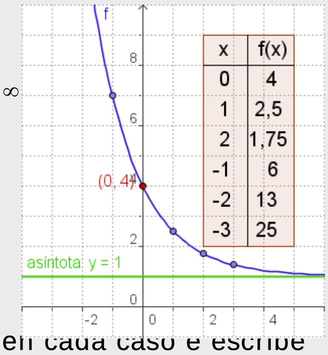
Dominio= IR
Recorrido=$(0,+\infty)$
Asíntota: y=0
Corte OY: (0,4)
Creciente



x	f(x)
0	4
1	8
2	16
-1	2
-2	1
-3	0,5

b) $f(x)=2\cdot 3^{-x}+1$

Dominio= IR
Percorrido=$(1,+\infty)$
Asíntota: y=1
Corte OY: (0,4)
Decrecente



x	f(x)
0	4
1	2,5
2	1,75
-1	6
-2	13
-3	25

7. Constrúe unha táboa de valores dunha función exponencial en cada caso e escribe a expresión alxébrica.

a) f(-2)=2/9
e constante de crecemento 3

x	f(x)
-2	**2 / 9**
-1	2/3
0	2
1	6
2	18
3	54

f(-2)=2/9
f(-1)=3·2/9=2/3
f(0)=3·2/3=2
f(1)=3·2=6
e así sucesivamente

$f(x)=2\cdot 3^x$

b) f(0)=3
e constante de decrecemento 1/4

x	f(x)
-2	48
-1	12
0	**3**
1	3/4
2	3/16
3	3/64

f(0)=3

$f(1)=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$f(2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

e así sucesivamente

$f(x)=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x=3\cdot 4^{-x}$

8. A táboa corresponde, en cada caso, a unha función exponencial. Escribe a fórmula.

a) $y=3^x$

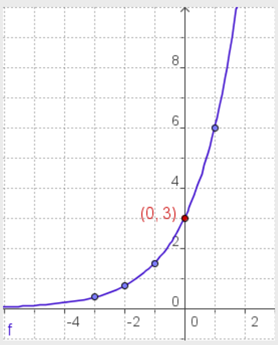
x	f(x)
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27

b) $f(x)=(1/5)^x=5^{-x}$

x	f(x)
-2	25
-1	5
0	1
1	1/5
2	1/25
3	1/125

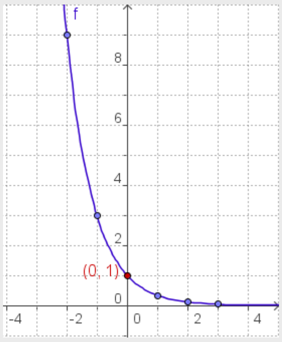
9. Indica se o gráfico corresponde a unha función con crecemento exponencial ou con decrecemento. Escribe a función.

a)



Observa a gráfica
f(0)=3
f(1)=6=3·2
f(-1)=1,5=3/2
A función é:
$f(x)=3\cdot 2^x$
e é crecente

b)



Observa a gráfica
f(0)=1
f(-1)=3
$f(-2)=9=3^2$
A función é:
$f(x)=(1/3)^x=3^{-x}$
e é decrecente

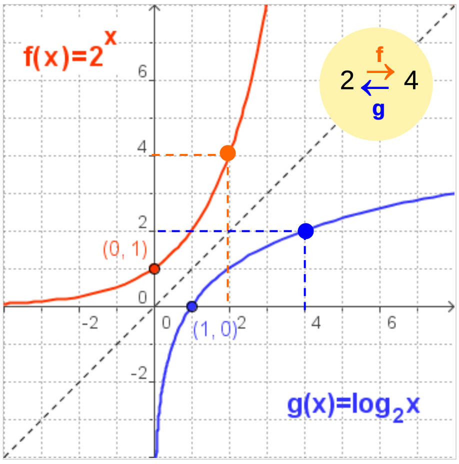
3. Funcións logarítmicas

A función inversa da exponencial

Dada unha función *inxectiva*, y=f(x), chámase **función inversa** de f a outra función, g, tal que g(y)=x. Na figura adxunta pódese ver a inversa da función exponencial.

Para cada x se obtén a^x. Ao valor obtido chamámolo y ou f(x). A función inversa da exponencial é a que cumpre que **g(y)=x**.

Esta función chámase **función logarítmica** e, como podes observar, é simétrica da función exponencial con respecto á bisectriz do primeiro e terceiro cuadrantes.

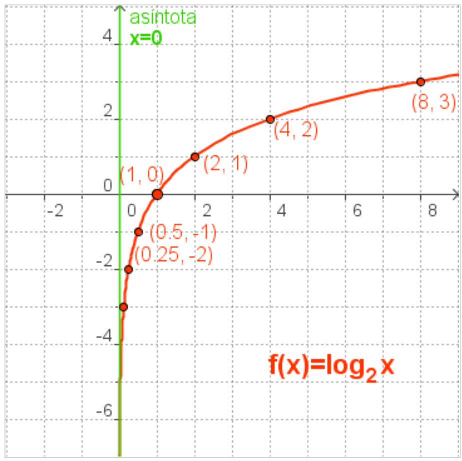


A función logarítmica

É a función inversa da función exponencial e denótase da seguinte maneira:

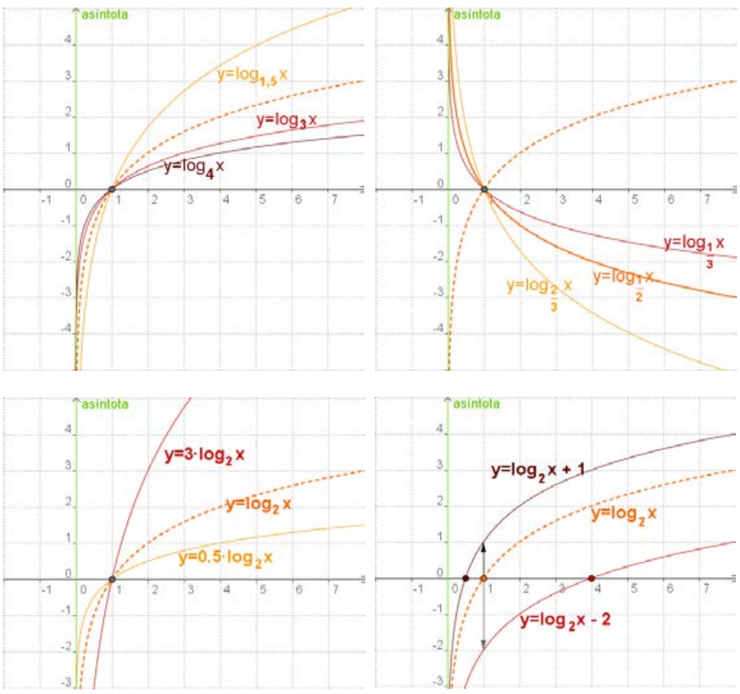
y = $\log_a$x, con a>0 e distinto de 1.

Na figura represéntase a gráfica de y=$\log_2$x de forma similar a como se fixo coa exponencial. As súas propiedades son "*simétricas*".



x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3

Nos gráficos inferiores pódese ver como cambia a gráfica ao variar a.



- O **dominio** son os reais positivos e o **percorrido** son todos os reais.
- É **continua**.
- Se **a>1** a función é **crecente** e se **0<a<1** é **decrecente**.
- Corta o eixe OX en (1,0).
- O eixe OY é **asíntota**.
- A función é **inxectiva**, isto é se $\mathbf{a^m=a^n}$ entón **m=n**.

Nas gráficas da dereita pódese ver como ao multiplicar por unha constante **y=k·$\log_a$x** cambia a rapidez con que a función crece ou decrece (k<0).

Ao sumar (ou restar) unha constante b a gráfica desprázase cara arriba (ou cara abaixo) b unidades, cambiando o punto de corte co eixe de abscisas.

$\log_2 128 = 7 \longleftrightarrow 2^7 = 128$

$\log_3 \frac{1}{243} = -4 \longleftrightarrow 3^{-4} = \frac{1}{243}$

$\log_{1/2} 8 = -3 \longleftrightarrow (1/2)^{-3} = 8$

$\log_{1/3} \frac{1}{9} = 2 \longleftrightarrow (1/3)^2 = \frac{1}{9}$

O logaritmos

Dados dous números reais positivos, **a** e **b** (**a≠1**), chamamos **logaritmo en base a de b** ao número ao que hai que elevar **a** para obter **b**.

A definición anterior indica que:

$$\log_a b = c \quad \text{equivale a} \quad a^c = b$$

Fíxate nos exemplos da esquerda.

Sexan: $x = \log_a b$ $\quad a^x = b$

$y = \log_a c$ $\quad a^y = c$

$z = \log_a (b \cdot c)$ $\quad a^z = b \cdot c$

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y} = a^z \Rightarrow z = x + y$
- $a^x / a^y = a^{x-y} = a^z \Rightarrow z = x - y$
- $(a^x)^m = a^{x \cdot m} = a^z \Rightarrow z = x \cdot m$

Propiedades dos logaritmos

- Logaritmo do produto: $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- Logaritmo do cociente: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- Logaritmo dunha potencia: $\log_a(b^m) = m \cdot \log_a b$
- En calquera base: $\log_a 1 = 0$ xa que $a^0 = 1$
  $\log_a a = 1$ xa que $a^1 = a$

Coa calculadora

Para calcular logaritmos

- log 9,043
  Teclea 9 . 043 log
  Aparecerá: 0.9563125

Compróbao coa tecla 10^x

Teclea INV 10^x

Aparecerá: 9.043

Se introduces:

- log 904,3
  Teclea 904 . 3 log
  Aparecerá: 2.9563125

Observa: $904{,}3 = 9{,}043 \cdot 100$

$\log 904{,}3 = \log 9{,}043 + 2$

Cambio de base:

- $\log_3 9043$
  Teclea 9043 log
  Aparecerá: 3.9563125
  Teclea ÷ 3 log
  Aparecerá: 0.4771212
  Teclea = e sae o resultado:
  8,2920484

Logaritmos decimais

Son os de base **10**, son os máis usados e por este motivo non se adoita escribir a base cando se utilizan.

$\log 10 = \log 10^1 = 1$

$\log 100 = \log 10^2 = 2$

$\log 1000 = \log 10^3 = 3$

$\log 10000 = \log 10^4 = 4$, ...etc

Observa que daquela o log dun número de 2 cifras, comprendido entre 10 e 100, é 1,... ; o log dos números de 3 cifras será 2,... ; etc.

Por outra parte:

$\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$

$\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2$

$\log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3$, ...etc

Entón o log dun número comprendido entre 0,01 e 0,1 será -1,...; o de un comprendido entre 0,001 e 0,01 será -2,..., etc.

Cambio de base

As calculadoras permiten calcular dous tipos de logaritmos: decimais (base=10) e neperianos ou naturais (base=e), que se estudan en cursos posteriores. Cando queremos calcular logaritmos en calquera outra base temos que recorrer á fórmula do cambio de base:

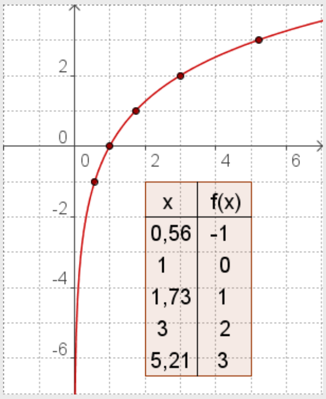
$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

EXERCICIOS resoltos

12. Representa e estuda as funcións

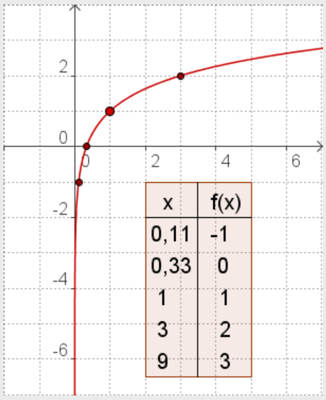
a) $f(x)=2\cdot\log_3 x$

Dominio$=(0,+\infty)$
Percorrido= IR
Asíntota: $x=0$
Corte OX: $(1,0)$
Crecente



b) $f(x)=\log_3 x+1$

Dominio$=(0,+\infty)$
Percorrido= IR
Asíntota: $x=0$
Corte OX: $(1/3,0)$
Crecente



13. Calcula x en cada caso aplicando a definición de logaritmo:

a) $\log_6(1/6)=x$	$x=-1$	$6^{-1}=1/6$
b) $\log_4 2=x$	$x=1/2$	$4^{1/2}=2$
d) $\log_5 125=x$	$x=3$	$5^3=125$
f) $\log_{1/8} 1=x$	$x=0$	$(1/8)^0=1$
c) $\log_3 81=x$	$x=4$	$3^4=81$
g) $\log_{1/5} 25=x$	$x=-2$	$(1/5)^{-2}=25$
d) $\log_3(1/9)=x$	$x=-2$	$3^{-2}=1/9$
h) $\log_{1/2}(1/16)=x$	$x=4$	$(1/2)^4=1/16$

14. Sabendo que $\log 2=0{,}301030$ calcula sen axuda da calculadora:

a) $\log 40$ $= \log(4\cdot 10) = \log(2^2\cdot 10) = \log 2^2+\log 10 = 2\cdot\log 2+\log 10 =$
$= 2\cdot 0{,}301030+1 = 1{,}602060$

b) $\log 1{,}6$ $= \log(16/10) = \log(2^4/10) = \log 2^4-\log 10 = 4\log 2-\log 10 =$
$= 4\cdot 0{,}301030-1 = 0{,}204120$

c) $\log 0{,}125$ $= \log(125/1000) = \log 53/1000) = 3(\log 5 – \log 1000 = 3\log(10/2) – 3 =$
$= 3(\log 10-\log 2)-3 = 3-3\log 2-3 = -3\cdot 0{,}301030 = -0{,}903090$

15. Coa calculadora define os seguintes logaritmos:

a) $\log_2 23{,}721 = \dfrac{\log 23{,}721}{\log 2} = 4{,}5681$

b) $\log_3 25678{,}34561 = \dfrac{\log 2{,}3456}{\log 3} = 0{,}7760$

c) $\log_5 0{,}37906 = \dfrac{\log 0{,}37906}{\log 5} = -0{,}6027$

d) $\log_7 0{,}37906 = \dfrac{\log 0{,}37906}{\log 7} = -0{,}4985$

LEMBRA:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

Para practicar

1. Envasamos 276 litros de auga en botellas iguais. Escribe a función que relaciona o número de botellas e a súa capacidade.

2. Un móbil percorre unha distancia de 130 km con velocidade constante. Escribe a función velocidade→tempo, calcula o tempo investido a unha velocidade de 50 km/h, e a velocidade se o tempo foi 5 horas.

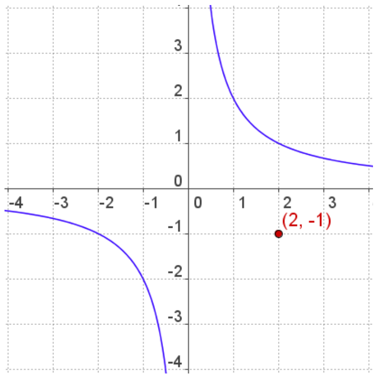
3. Unha billa cun caudal de 8 litros/min tarda 42 minutos en encher un depósito. Canto tardaría se o caudal fose de 24 litros/min? Escribe a función caudal→tempo.

4. Calcula as asíntotas das funcións seguintes:

   a) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$

   c) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ d) $f(x)=\dfrac{-x}{x+2}$

5. Escribe a ecuación da función cuxa gráfica é unha hipérbole como a da figura co centro de simetría desprazado ao punto (2,-1).



6. Os custos de edición, en euros, de x exemplares dun libro veñen dados por y=21x+24 (x>0). Canto custa editar 8 exemplares?, e 80 exemplares? Escribe a función que dá o custo por exemplar. Por moitos exemplares que se publiquen, cal é o custo unitario como mínimo?

7. En que se converte ao cabo de 15 anos un capital de 23000€ ao 5,5% anual?

8. Un capital colocado a interese composto ao 2% anual, converteuse en 3 anos en 9550,87€. Cal era o capital inicial?

9. Un capital de 29000€ colocado a interese composto converteuse ao cabo de 4 anos en 31390,53 €. Cal é o rédito (interese anual) a que estivo colocado?

10. Un capital de 7000€, colocado a interese composto do 2% anual, converteuse ao cabo duns anos en 8201,61€. Cantos anos transcorreron?

11. Cantos anos ha de estar colocado certo capital, ao 3% anual, para que se duplique.

12. O período de desintegración do carbono 14 é 5370 anos. En que cantidade se converten 10 gr ao cabo de 1000 anos?

13. Cantos anos han de pasar para que unha mostra de 30 gr de C14 se converta en 20,86 gr? *(Período de desintegración do C14 5370 anos).*

14. Unha mostra de 60 gr dunha substancia radioactiva convértese en 35,67 gr en 30 anos. Cal é o período de desintegración?

15. O tamaño de certo cultivo de bacterias multiplícase por 2 cada 30 minutos. Se supoñemos que o cultivo ten inicialmente 5 millóns de bacterias, dentro de cantas horas terá 320 millóns de bacterias?

16. O tamaño de certo cultivo de bacterias multiplícase por 2 cada 20 minutos, se ao cabo de 3 horas o cultivo ten 576 millóns de bacterias, cantas había no instante inicial?

17. Calcula o número:

a) cuxo logaritmo en base 6 é 3.

b) cuxo logaritmo en base 4 é -3.

c) cuxo logaritmo en base 10 é 2.

d) cuxo logaritmo en base 1/2 é -3.

e) cuxo logaritmo en base 1/5 é 2.

18. En que base?

a) o logaritmo de 0,001 é -3.

b) o logaritmo de 243 é 3.

c) o logaritmo de 8 é 1.

d) o logaritmo de 1/81 é -4.

e) o logaritmo de 49 é 2.

19. Calcula mentalmente:

a) o logaritmo en base 2 de 32.

b) o logaritmo en base 5 de 125.

c) o logaritmo en base 3 de 1/9.

d) o logaritmo en base 7 de 1.

e) o logaritmo en base 6 de 216.

20. Sabendo que o log2=0,3010 e o log3=0,4771, calcula:

a) log 16

b) log 512

c) log(16/81)

d) log 24

e) log 72

21. Utiliza a calculadora para descubrir o valor de:

a) $\log_7 12456{,}789$

b) $\log_5 5123{,}4345$

c) $\log_9 47658{,}897$

d) $\log_3 23{,}146$

e) $\log_6 1235{,}098$

Cando o x está no expoñente

- Resolve a ecuación: $25^{2x-3}=125$
  $25=5^2$ e $125=5^3$, entón $5^{2(2x-3)}=5^3$
  igualando os expoñentes $2(2x-3)=3 \Rightarrow x=9/4$
- Calcula x en $3^x=14$
  Tomando logaritmos: $\log 3^x=\log 14$
  $x\log 3=\log 14$ logo $x=\dfrac{\log 14}{\log 3}=2{,}40$

22. Resolve as ecuacións exponenciais:

a) $32^{-9x+9}=16$

b) $27^{2x+3}=9^3$

c) $4^{-3x+8}=8$

d) $9^{8x-7}=1$

e) $25^{-5x-5}=1$

23. Calcula o valor de x:

a) $7^x=5$

b) $5^x=7$

c) $2{,}13^x=4{,}5$

Ecuacións con logaritmos

Resolve a ecuación: $4\cdot\log x=2\cdot\log x+\log 4+2$
$4\cdot\log x - 2\cdot\log x = \log 4+\log 100$
$2\cdot\log x = \log 400$ $\log x^2=\log 400$
$x^2=400 \Rightarrow x=\pm 20$

24. Aplicando as propiedades dos logaritmos resolve as ecuacións:

a) $\log(32+x^2) - 2\cdot\log(4-x) = 0$

b) $2\cdot\log x - \log(x-16) = 2$

c) $\log x^2 - \log\dfrac{10x+11}{10} = -2$

d) $5\cdot\log\dfrac{x}{2}+2\cdot\log\dfrac{x}{3}=3\cdot\log x-\log\dfrac{32}{9}$

25. Resolve os sistemas:

a) $\begin{cases} 2\cdot\log x - 3\cdot\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

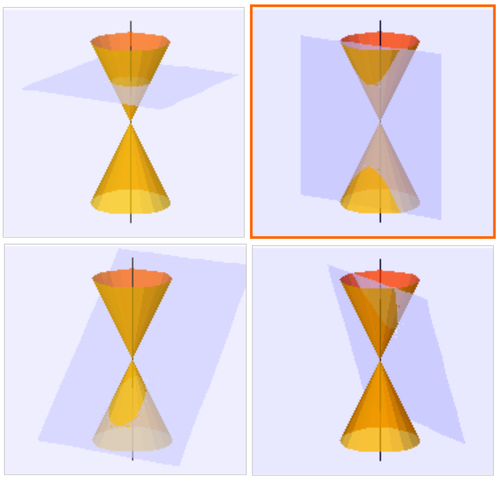
Para saber máis

Os cálculos de Franklin

Agora xa sabes resolver o problema proposto ao principio do tema

1000 libras ao **5%** anual durante **100** anos convértense en
1000·1,05100=131.825,67 libras

31000 libras ao **5%** anual en **100** anos convértense en
31000·1,05100= 4076539 libras



Outras hipérboles

A hipérbole é unha cónica, xunto á circunferencia, a elipse e a parábola, son curvas que se orixinan ao cortar un cono por un plano.

Tamén é o lugar xeométrico dos puntos do plano, cuxa diferenza de distancias a dous fixos, os focos, é constante.

O número

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Esta expresión dá lugar a un dos números máis importantes das matemáticas, o **número e**, trátase dun nº irracional, de valor aproximado 2,7182818284590452...

Base da función exponencial $y=e^x$ e dos logaritmos neperianos ou naturais, aparece en moitas situacións da vida real.

Unha da curvas en cuxa fórmula aparece o **número e** é a catenaria, curva que forma unha cadea cando se colga dos seus extremos. Podes vela nos cables do tendido eléctrico e en numerosos elementos arquitectónicos, arcos, pontes,... aínda que quizais a confundas cunha parábola xa que arredor do vértice os seus valores son moi próximos

Cantas veces é maior a intensidade dun terremoto de magnitude 7,9 na escala Richter que un de magnitude 5?

As medidas da escala Richter son logaritmos decimais: 7,9-5=2,9
$10^{2,9}$=794 veces

Terremotos, música e xampú

Que teñen en común cousas tan dispares? pois precisamente os logaritmos.

Cando se pretende representar medidas que toman valores moi dispares, desde moi pequenos a moi grandes, emprégase a escala logarítmica. Algúns exemplos nos que se utiliza:

- A escala Richter que mide a intensidade dos terremotos.
- A intensidade do son en belios ou decibelios, ou o mesmo pentagrama.
- O ph dunha substancia
- A magnitude das estrelas.

Lembra o máis importante

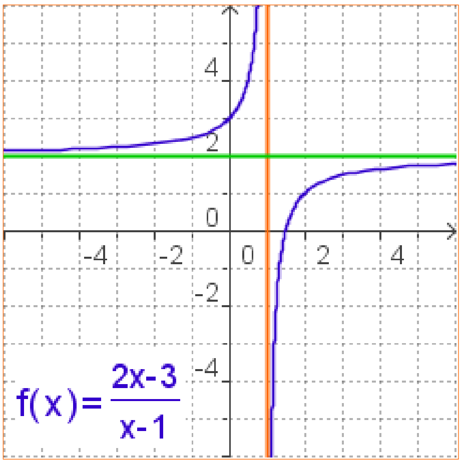
Funcións racionais

Son as que a súa expresión alxébrica é o cociente entre dous polinomios.

✓ Unha **función de proporcionalidade inversa**, **y=k/x**, relaciona dúas variables inversamente proporcionais. A súa gráfica é unha **hipérbole**, é descontinua en x=0, decrecente se k>0 e crecente se k<0.

Cando a gráfica dunha función se achega cada vez máis a unha recta, confundíndose con ela, dise que a recta é unha **asíntota**.

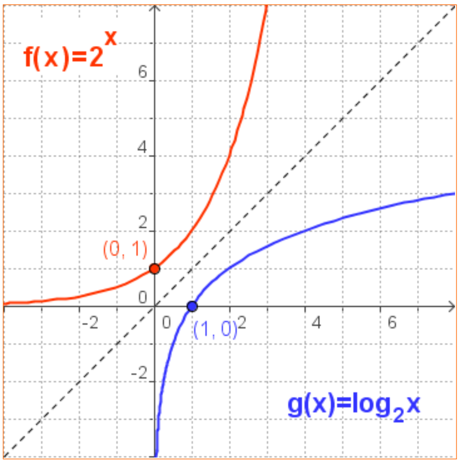
✓ Para calcular as asíntotas dunha función racional na que o numerador e denominador teñen o mesmo grao, faise a división, o cociente é a asíntota horizontal. Hai asíntota vertical nos puntos que anulan o denominador sempre que non anulen tamén o numerador.



Funcións exponenciais

Son da forma $\mathbf{y=a^x}$, con a>0.

- O seu dominio é IR.
- É continua.
- Se a>1 é crecente e decrecente se 0<a<1.
- Corta o eixe OY en (0,1) e pasa por (1,a)
- O eixe OX é **asíntota** horizontal.



Funcións logarítmicas

Son as que asocian a cada número x o seu logaritmo nunha certa base, a, $\mathbf{y=\log_a x}$.

- O seu dominio son os reais positivos e o percorrido é IR
- É continua
- Se a>1 é crecente e decrecente se 0<a<1.
- Corta o eixe OX en (1,0) e pasa por (a,1)
- O eixe OY é **asíntota** vertical.

✓ Dados dous números reais positivos, **a** e **b** (**a≠1**), chamamos **logaritmo en base a de b** ao número ao que hai que elevar **a** para obter **b**.

$\log_a b = c$ equivale a $a^c = b$

Propiedades dos logaritmos

- Logaritmo do produto

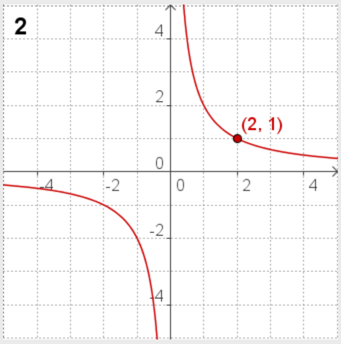
  $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$
- Logaritmo do cociente

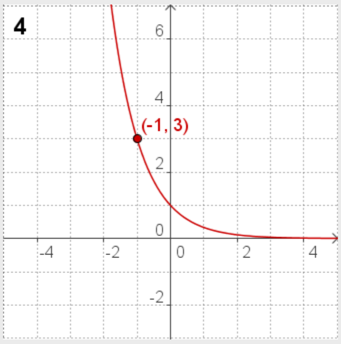
  $\log_a(b/c)=\log_a b-\log_a c$
- Logaritmo dunha potencia

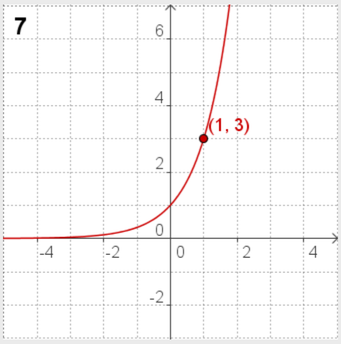
  $\log_a(b^m)=m\cdot\log_a b$
- En calquera base:

  $\log_a 1=0$ y $\log_a a=1$

Auto-avaliación







1. Cal é a función de proporcionalidade inversa que a x=1,25 lle fai corresponder y=4

2. Escribe a expresión alxébrica da función da gráfica.

3. Calcula as asíntotas da función $f(x) = \frac{-2x}{x-1}$.

4. Escribe a expresión alxébrica da función exponencial da gráfica

5. Calcula en canto se converte un capital de 9000 € colocado ao 4,5% anual durante 3 anos.

6. A poboación dunha especie en extinción redúcese á metade cada ano. Se ao cabo de 9 anos quedan 12 exemplares, cal era a poboación inicial?

7. Escribe a expresión da función logarítmica que é a inversa da exponencial da gráfica.

8. Calcula $\log_5 \frac{1}{3125}$

9. Sabendo que log3=0,4771 e sen usar a calculadora, calcula log 8,1

10. Coa calculadora determina o valor de x en $1{,}97^x=215$. Redondea o resultado a centésimas.

Solucións dos exercicios para practicar

1. y=276/x

2. y=130/x ; tempo=2,6 ; v=26

3. 14 min; y=336/x

4. a) x=-3 y=2
b) x=3 y=1
c) x=0 y=2
d) x=-2 y=-1

5. $y=\dfrac{2}{x-2}-1$

6. 8: 184€; 80: 1704€
f(x)=21+24/x; 21€ mínimo

7. 51347 €

8. 9000 €

9. 2%

10. 15 anos

11. 23 anos

12. 8,86 gr

13. 3000 anos

14. 40 anos

15. 3 horas

16. 9 millóns

17. a) 216 b) 1/256
c) 100 d) 8 e) 1/25

18. a) 10 b) 3
c) 8 d) 3 e) 7

19. a) 5 b) 3 c) -2
d) 0 e) 3

20. a) 1,2040 b) 2,7090
c) -0,7044 d) 1,3801 e) 1,8572

21. a) 4,8461 b) 5,3072
c) 4,9025 d) 2,8598
e) 3,9731

22. a) x=49/45 b) -3
c) 13/6 d) 7/8 e) -1

23. a) x=0,827 b) x= 1,209
c) x=1,989

24. a) x=-2 b) No ten solución
c) 80 y 20 d) ±3 (Só vale +3)

25. a) x=100 y=0,1
b) (x=50, y=20) (x=20, y=50)

Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1. f(x)= 5/x

2. f(x)= 2/x

3. x=1 y=-2

4. $f(x)=(1/3)^x = 3^{-x}$

5. 10270,50 €

6. 6144

7. $y=\log_3 x$

8. -5

9. 0,9084

10. 7,92