11 Funcións racionais, exponenciais e logarítmicas

Contidos

1. Funcións racionais
   Función de proporcionalidade inversa
   As asíntotas
   Outras funcións racionais

2. Funcións exponenciais
   Características
   Crecemento exponencial
   Aplicacións

3. Funcións logarítmicas
   Función inversa da exponencial
   Función logarítmica
   Logaritmos

Obxectivos

- Coñecer as características da función de proporcionalidade inversa e os fenómenos que describen.
- Achar as asíntotas dunha hipérbole.
- Recoñecer e representar funcións exponenciais.
- Aplicar as funcións exponenciais ao xuro composto e outras situacións.
- Calcular o logaritmo dun número.
- Interpretar as gráficas das funcións logarítmicas.

Autor: Xosé Eixo Blanco

Antes de empezar

Investiga

Benjamin Franklin, famoso científico e estadista, deixou un legado de 1000 libras ás cidades de Boston e Filadelfia para que se prestasen a novos aprendices ao 5% anual.

Segundo Franklin ao cabo de 100 anos converteríanse en 131000 libras, das cales 100000 serían para obras públicas e as 31000 restantes volverían utilizarse como empréstitos outros 100 anos. Calculou ben?

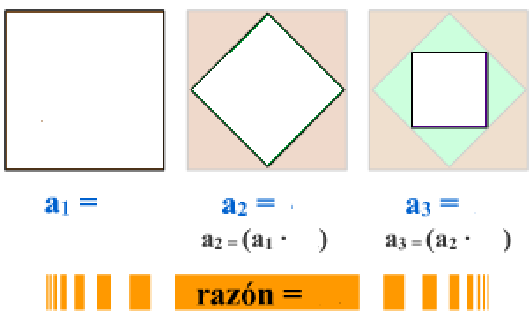
Na escena podes ver a definición de Progresión Xeométrica e varios exemplos.

Pulsa o botón para deter a explicación
Pulsa o botón para continuar a explicación
Pulsa os botóns para retroceder / avanzar máis rapidamente

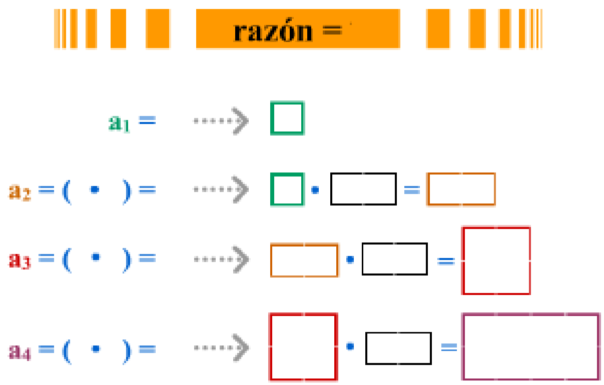
EXERCICIO 1: Completa o que falta nos seguintes recadros:

Unha **progresión xeométrica** está constituída por unha __________________________ na que cada un deles se obtén ________________________ o anterior por unha constante denominada __________________________________.

Exemplo 1



Exemplo 2



Pulsa para ir á páxina seguinte.

1. Funcións racionais

1.a. Función de proporcionalidade inversa

Le na pantalla a explicación teórica deste apartado.

EXERCICIO 1: Completa.

A **función de proporcionalidade inversa** relaciona ________________________________ ___________________. A súa expresión alxébrica é:

$$y = \frac{\quad}{\quad}$$

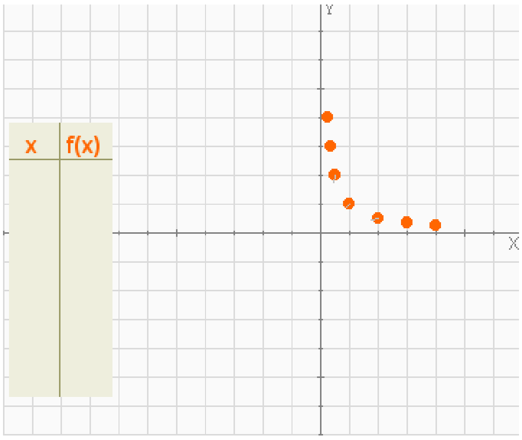
A súa gráfica é unha ____________________.

EXERCICIO 2: Completa.

- O **dominio** e o **percorrido** son ____.
- É unha función _______: ________________________
- Se **k>0** a función é _____________ e a súa gráfica aparece nos cuadrantes_________.
- Se **k<0** a función é _____________ e a súa gráfica está no _________ cuadrante.

Na escena podes ver en primeiro lugar unha animación na que se constrúe a gráfica da función $f(x)=\frac{k}{x}$ para k =1.

Completa a táboa de valores e o debuxo neste sistema de coordenadas cartesianas:

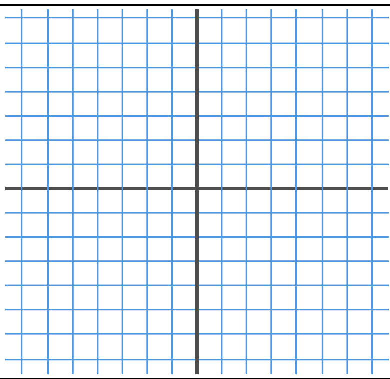


Ao finalizar podes variar o valor de k e observar as gráficas correspondentes.

Representa nos seguintes recadros as gráficas que se indican:

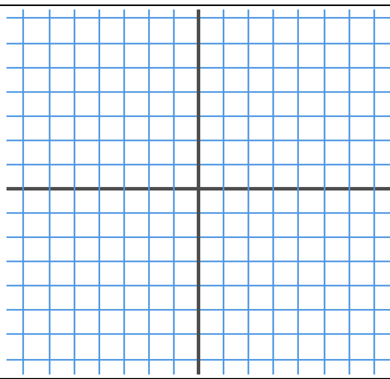
$$f(x)=\frac{2}{x}$$

x	f(x)



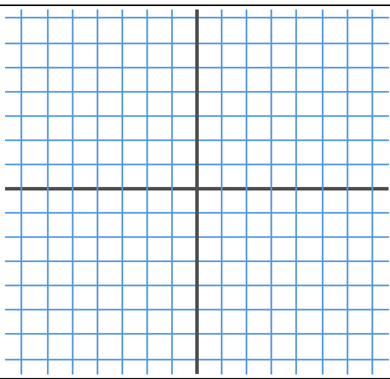
$$f(x)=-\frac{1}{x}$$

x	f(x)



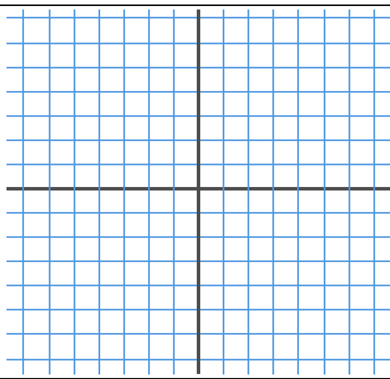
$$f(x)=\frac{4}{x}$$

x	f(x)



$$f(x)=-\frac{4}{x}$$

x	f(x)



Pulsa o botón para facer uns exercicios. Aparece unha escena na que se repasa o concepto de magnitudes inversamente proporcionais.

Contesta:

Cando dúas magnitudes son inversamente proporcionais, se tomamos dúas cantidades correspondentes, que é o que se mantén constante? : ____________________________

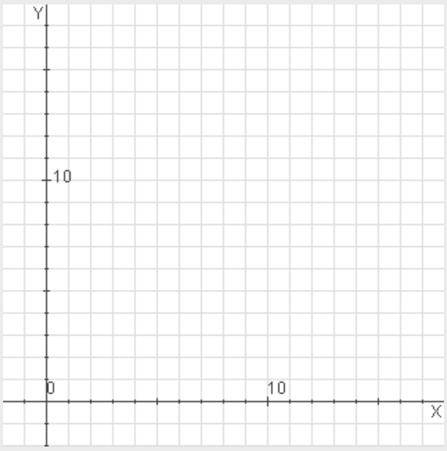
Pulsando nos botóns que aparecen nese cadro podes acceder a tres exercicios diferentes. Resólveos nos seguintes recadros e despois pulsa o botón "Comprobar".

EXERCICIOS

1. Observa a gráfica da figura. Arrastra o punto laranxa para ver como aparecen distintos rectángulos.
(Debúxaa nos eixes da dereita fixándote ben na ecuación e nos puntos polos que pasa).

Como é a área de todos eses rectángulos?
____

Canto mide? ____________



2. A táboa corresponde a cantidades inversamente proporcionais, complétaa e escribe a expresión alxébrica da función y = f(x).

y =

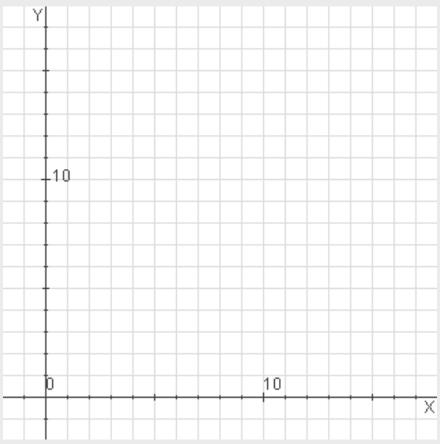
x	f(x)

3. Segundo a Ley de Boyle-Mariotte, a presión que exerce un gas e o volume que ocupa son inversamente proporcionais. A 25º determinada cantidade de gas exerce unha presión de ____ atmósferas e ocupa un volume de ____ litros.

a) Que volume ocupará cando a presión exercida sexa de 1 atmósfera?

b) Que presión exercerá cando o volume sea _____ litros?

Escribe a función que relaciona:
presión → volume
Debuxa a súa gráfica →



Pulsa ▶ para ir á páxina seguinte.

1.b. As asíntotas

Observa a escena da dereita e le na pantalla a explicación teórica deste apartado.

EXERCICIO 1: Na escena da dereita observa a animación na que se ve como se comportan os valores de x e y na gráfica da función f(x) =1/x.

Contesta:	RESPOSTAS
Que acontece cos valores de y = f(x) a medida que os valores de x se van aproximando 0 pola dereita ($x\to 0^+$)?	
Que acontece cos valores de y = f(x) a medida que os valores de x se van aproximando a 0 pola esquerda ($x\to 0^-$)?	
Que acontece cos valores de y = f(x) a medida que os valores de x van sendo cada vez máis grandes, é dicir, cando tenden a "máis infinito" ($x\to +\infty$)?	
Que acontece cos valores de y = f(x) a medida que os valores de x tenden a "menos infinito" ($x\to -\infty$)?	

EXERCICIO 2: Contesta.	RESPOSTA
Cando dicimos que unha recta é asíntota dunha función?	

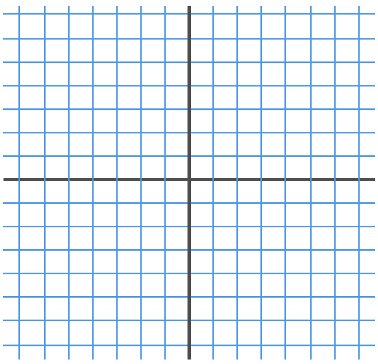
EXERCICIO 3: Completa.

- **Asíntotas verticais.**
  A recta **x=a** é unha asíntota vertical da función y = f(x) se se verifica que ______
  ____.
- **Asíntotas horizontais.**
  A recta **y=b** é unha asíntota horizontal da función y = f(x) se se verifica que _____
  ____.

Representa nos seguintes recadros as gráficas que se indican:

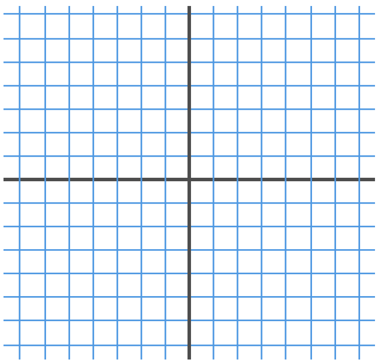
$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

x	f(x)
3	
2,5	
2,1	
1	
1,5	
1,9	



$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$ ¡ Observa que x-(-3)=x+3 !

x	f(x)
-4	
-3.5	
-3.1	
-2	
-2.5	
-2.9	



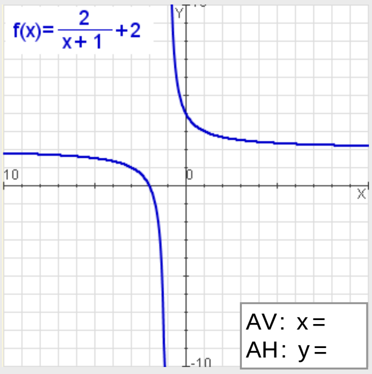
Pulsa o botón para facer uns exercicios. Na escena aparece unha función para calcular as súas asíntotas. Podes axudarte das rectas verde e laranxa para localizalas.

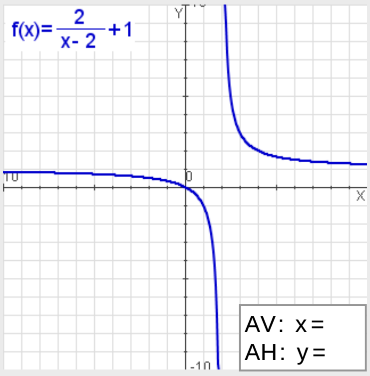
Completa a táboa seguinte con 4 das funcións e as súas correspondentes asíntotas:

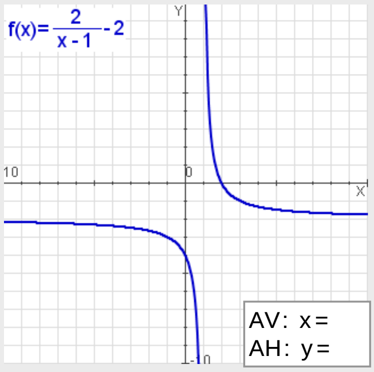
Función	A.V.	A.H.	Función	A.V.	A.H.
$f(x)=\frac{\quad}{\quad}$			$f(x)=\frac{\quad}{\quad}$		
$f(x)=\frac{\quad}{\quad}$			$f(x)=\frac{\quad}{\quad}$		

EXERCICIOS

4. Nas seguintes funcións, debuxa as asíntotas e escribe a súa ecuación.







Pulsa para ir á páxina seguinte.

1.c. Outras funcións racionais

Observa a escena da dereita e le na pantalla a explicación teórica deste apartado.

EXERCICIO 1: Completa.

As **funcións racionais** son aquelas que a súa expresión alxébrica é ____________________
____

$$f(x)=\frac{\quad}{\quad}$$

EXERCICIO 2: Completa.

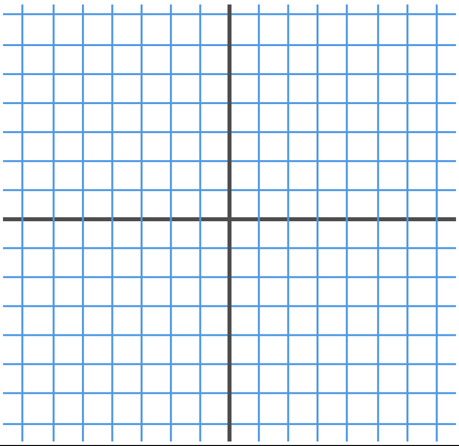
- O seu **dominio** son _______________________ agás ____________________________.
- Para calcular o punto de corte co eixe OY ___________.
- Para calcular os puntos de corte co eixe OX _________________________________.

Na escena podes ver como se calculan as asíntotas e os puntos de corte en varios exemplos con funcións que son cociente de dous polinomios de grao 1.

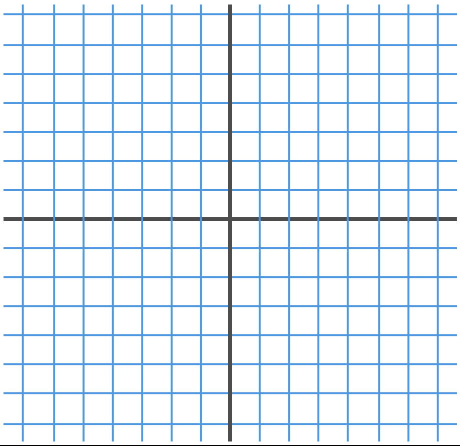
Completa nos seguintes recadros dous dos exemplos que aparecen na escena.

<table>
<tr><td>f(x) = ——</td><td>f(x) = ——</td></tr>
<tr><td>Asíntota vertical:
Operación para calcular a asíntota horizontal:

Asíntota horizontal:

<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table>
</td>
<td>Asíntota vertical:
Operación para calcular a asíntota horizontal:

Asíntota horizontal:

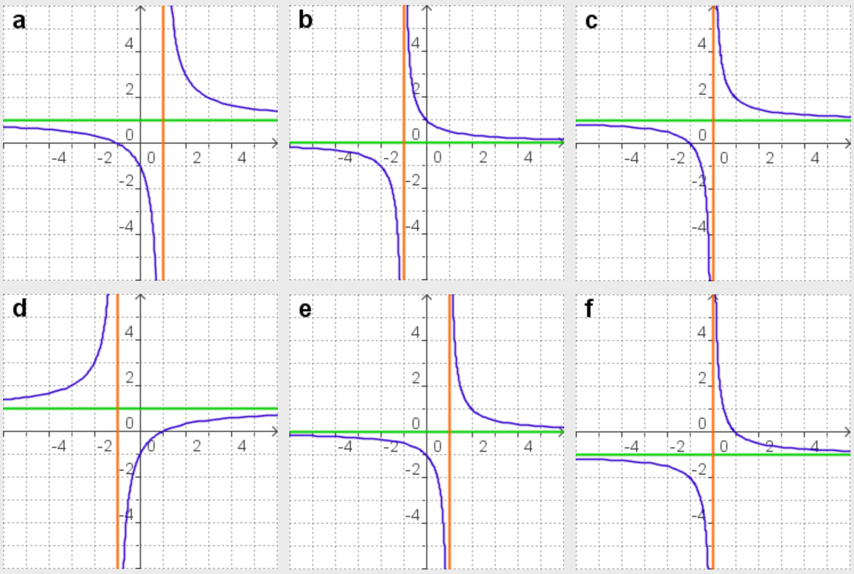
<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table>
</td></tr>
</table>

Pulsa o botón para facer uns exercicios.

Na escena aparecen cinco funcións e cinco gráficas. Arrastra cada ecuación ao lugar no que está a gráfica correspondente e pulsa **Comprobar** para ver se o fixeches ben.
Repite o exercicio un mínimo de dúas veces sen fallos.

EXERCICIOS

5. Decide que gráfica corresponde a cada función:



1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ →

2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ →

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ →

4) $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ →

5) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ →

6) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ →

Pulsa para ir á páxina seguinte.

2. Funcións exponenciais

2.a. Características da función exponencial

Le na pantalla a explicación teórica deste apartado e na escena varía o valor de "a" e pulsa "**animar**" para observar como se van obtendo os puntos da función e a súa correspondente representación gráfica.

EXERCICIO 1: Completa.

A **función exponencial** é da forma f(x) = con **a** un número real positivo.

EXERCICIO 2: Completa.

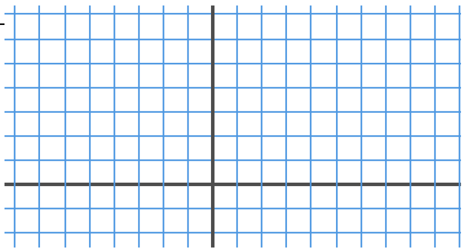
- O **dominio** son _________________ e o **percorrido** son ______________________.
- É **continua** en _______________________.
- Se **a>1** a función é __________________________________.
- Se **0 < a <1** a función é _____________________.
- Corta ao eixe OY no punto **(,).**
- O eixe OX é ______________________.

A función é **inxectiva**, é dicir, se $a^n = a^m$ entón **n=m**

Representa nos seguintes recadros as gráficas que se indican:

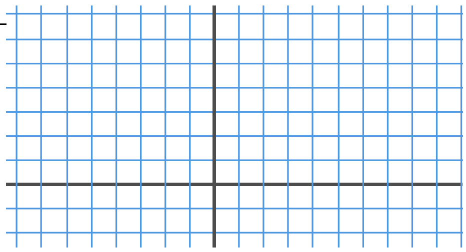
f(x) = 2^x

x	f(x)



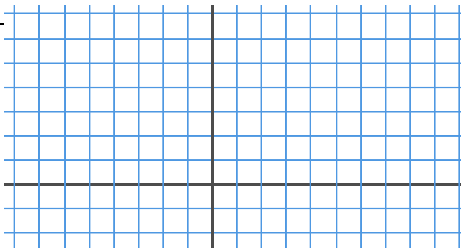
f(x) = 3^x

x	f(x)



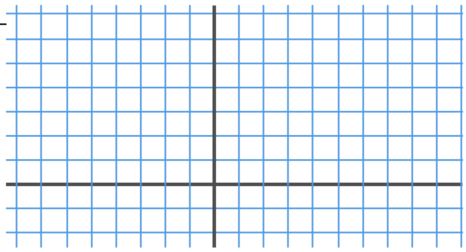
f(x) = $(0,5)^x$

x	f(x)



f(x) = $(0,25)^x$

x	f(x)



Pulsa o botón para facer uns exercicios.

Aparece unha escena na que verás outras funcións exponenciais.
Por exemplo, o caso no que multiplicamos por un número "**k**" e o caso no que sumamos unha constante "**b**". É dicir, veremos as funcións exponenciais do tipo: $\mathbf{f(x) = k \cdot a^x + b}$

Pulsando nos botóns que aparecen nese cadro podes acceder a tres exercicios diferentes. Resólveos nos seguintes recadros e despois pulsa o botón "Comprobar".

1 Funcións exponenciais da forma:

$$\mathbf{f(x) = k \cdot a^x}$$

Exemplos:

Con base maior que 1: $\mathbf{f(x)} = \quad \cdot \quad ^{x}$

Con base positiva menor que 1: $\mathbf{f(x)} = \quad \cdot \quad ^{x}$

Punto de corte con OY: (,)

2 Funcións exponenciais da forma:

$$\mathbf{f(x) = a^x + p}$$

Exemplos:
Con base maior que 1

Con p >0: $\mathbf{f(x)} = \quad ^{x} +$

Con p <0: $\mathbf{f(x)} = \quad ^{x} -$

Punto de corte con OY: (,)

Con base positiva menor que 1

Con p >0: $\mathbf{f(x)} = \quad ^{x} +$

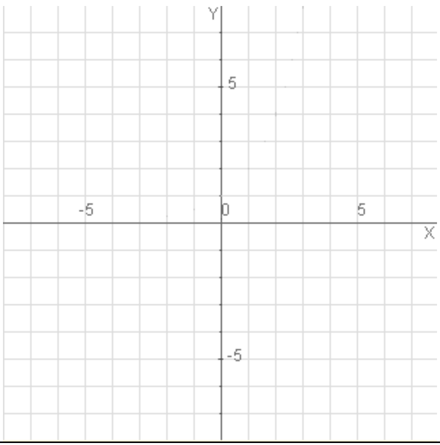
Con p <0: $\mathbf{f(x)} = \quad ^{x} -$

Asíntota horizontal: y =

3 Representa dúas das funcións que aparecen neste apartado, completando tamén a táboa de valores:

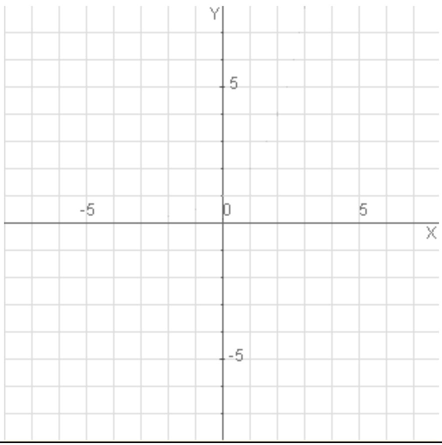
f(x) =

x	f(x)



f(x) =

x	f(x)



Pulsa para ir á páxina seguinte.

2.b. Crecemento exponencial

Le na pantalla a explicación teórica deste apartado.

A función exponencial preséntase en multitude de fenómenos de crecemento animal, vexetal, económico, etc. En todos eles a variable é o tempo. $\mathbf{y=a^t}$

EXERCICIO 1: Completa.

No crecemento exponencial, cada valor de **y** obtense ______________________________
____.

y =

Onde:

k é ____________________________

t é ____________________________

a é ____.

Se **0 < a <1** trátase dun _________________________________

Na escena aparece o enunciado dun problema. Observa que o crecemento do cultivo bacteriano (número de bacterias por unidade de tempo) segue un crecemento ou decrecemento exponencial.

EXERCICIO 2:

Varía o valor inicial "**k**" e o factor polo que se multiplica "**a**" e observa as diferentes gráficas que se obteñen. **Contesta**:

	RESPOSTA
Para que valores de "**a**" se ten un crecemento exponencial?	
Para que valores de "**a**" se ten un decrecemento exponencial?	
Como é a función para a =1?	
Cal é o punto de corte co eixe OY?	

Pulsa o botón para facer uns exercicios.

Aparece un resumo no que podes ver as respostas ás preguntas anteriores.
Pulsando nos botóns que aparecen nese cadro podes acceder a tres exercicios diferentes.
Resólveos nos seguintes recadros e despois pulsa o botón "Comprobar".

1 Escribe a táboa dunha función exponencial se para x=___ a función vale ___ e a constante de crecemento é ___.
Cal é a expresión alxébrica?

x	y

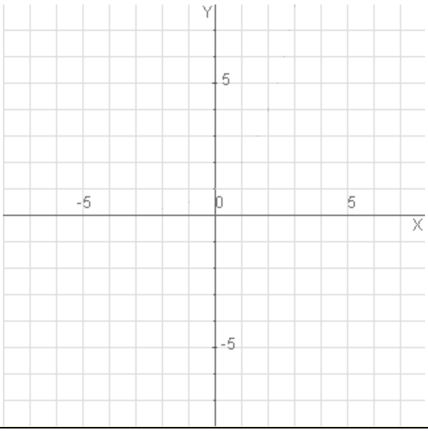
2 A táboa seguinte corresponde a valores dunha función exponencial. Complétaa e escribe a expresión alxébrica da función y=f(x)?

x	f(x)

3 Representa dúas das funcións que aparecen neste apartado, completando tamén a táboa de valores:

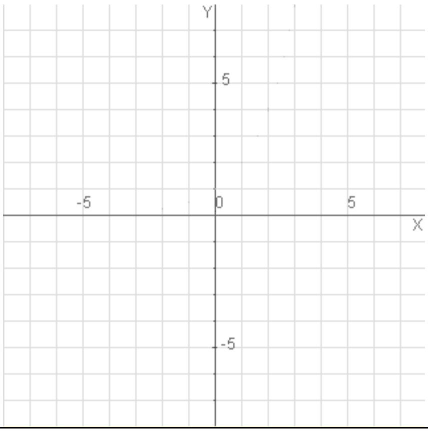
f(x) =

x	f(x)



f(x) =

x	f(x)



Pulsa para ir á páxina seguinte.

2.c. Aplicacións

Le na pantalla a explicación teórica deste apartado.

EXERCICIO 1: Contesta.

Para que serve a **función exponencial**?

EXERCICIO 2:

Agora podes resolver o problema do legado de Franklin, formulado ao comezo do tema. Pulsa sobre a imaxe.

Na escena da dereita podes ver tres aplicacións: Xuro composto. Crecemento de poboacións. Desintegración radioactiva.

Pulsa sobre **Xuro composto**

Le a explicación da escena e completa o que falta no seguinte texto:

Xuro composto

No xuro composto os xuros producidos por un capital C_0 _______________________ a este, de tempo en tempo, para producir novos xuros.
Os intervalos de tempo, ao cabo dos cales os xuros se acumulan ao capital, chámanse ____.

O Capital Final obtido C_f por un capital inicial C_0 ao cabo de t anos a xuro composto do r % anual, determínase pola fórmula:

Se a capitalización non é anual cámbiase t por ___ e r por ____ onde n é o número de períodos que hai nun ano.

Crecemento Continuo

Cando os períodos de tempo se fan cada vez máis pequenos, de maneira que os xuros se acumulan ao capital en cada instante, obtense a fórmula do xuro continuo:

EXEMPLO Se colocamos un capital de ____ € ao ______ anual, a xuro composto con abonos cada ___ meses. a) Fai unha táboa do capital acumulado nos primeiros anos. b) Escribe a expresión alxébrica do capital acumulado, en función dos anos transcorridos. c) Canto diñeiro teremos ao cabo de ___ anos? d) Cantos anos teñen que pasar para ter _____ €?	x	y	O rédito por período é: Cada € convértese por período en: Cada € convértese por ano en: b) y = c) y( ) = d) Continuamos coa táboa Teñen que pasar:

Pulsa "**< volver**" para volver ao menú.

Pulsa sobre **Crecemento de poboacións**

Le a explicación da escena e completa o que falta no seguinte texto:

Crecemento de poboacións

O crecemento vexetativo dunha poboación ven dado por ______________________________ ____.
Se inicialmente partimos dunha poboación $\mathbf{P_0}$ que ten un índice de crecemento anual **i** (expresado en tanto por un), a poboación despois dun ano será:

E ao cabo e t anos será

Crecemento Continuo

Se se considera o crecemento continuo:

EXEMPLO Un pobo ten ____ habitantes. Sábese que a súa poboación crece a un ritmo do ____ anual. a) Fai unha táboa de valores que relacione tempo e poboación. b) Escribe a expresión alxébrica da función tempo poboación. c) Cantos habitantes terá dentro de ____ anos? d) Cantos anos teñen que pasar para que a poboación sexa de aproximadamente ____ habitantes?	x | y b) y = c) y( ) = d) Continuamos coa táboa Teñen que pasar:

Pulsa "**< volver**" para volver ao menú.

Pulsa sobre **Desintegración Roadioactiva**

Le a explicación da escena e completa o que falta no seguinte texto:

Desintegración Radioactiva

As substancias radioactivas desintégranse ____________________. A cantidade dunha certa substancia radioactiva que vai quedando ao pasar o tempo t, ven dada por [ ]

Onde M_0 é a cantidade de substancia que había no instante que tomemos como inicial e **a** unha constante, 0 < a <1, que depende da substancia en cuestión e da unidade de tempo que tomemos.

A rapidez de desintegración das substancias radioactivas mídese polo _______________ _____________, que é ____.

EXEMPLO Un gramo de estroncio-90 redúcese á metade en 28 anos. Se no ano 2000, tiñamos ___ gramos e tomamos como orixe de tempo o ano 2000. a) Fai unha táboa coa cantidade de estroncio que quedará nos anos 2000, 2028, 2056, 2084. b) Escribe a expresión alxébrica da función anos, masa. c) Canto estroncio quedará no ano ________? d) Cantos anos teñen que pasar para que se reduza a _____ g?	ano | x | y x = anos que pasaron dende o ano 2000 y = cantidade de masa no ano x b) y = c) y( ) = d) Continuamos coa táboa a partir de x = ____ Teñen que pasar:

EXERCICIOS

6. Representa e estuda as funcións

a) $f(x) = 4 \cdot 2^x$

b) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x} + 1$

7. Constrúe unha táboa de valores dunha función exponencial en cada caso e escribe a expresión alxébrica.

a) $f(-2)=2/9$ e constante de crecemento 3

x	f(x)
-2	**2/9**
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $f(0)=3$ e constante de decrecemento ¼

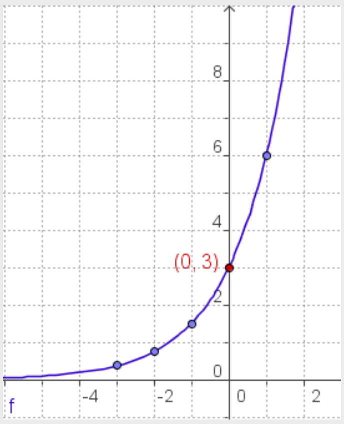
x	f(x)
-2	
-1	
0	**3**
1	
2	
3	

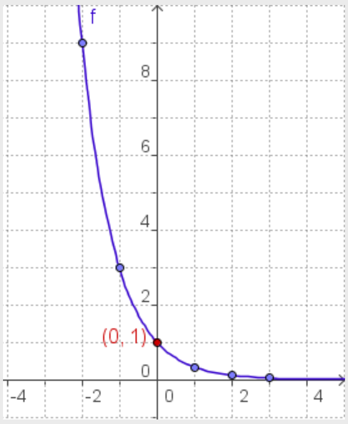
8. A táboa corresponde, en cada caso, a unha función exponencial. Escribe a fórmula.

x	f(x)
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27

x	f(x)
-2	25
-1	5
0	1
1	1/5
2	1/25
3	1/125

9. Indica se o gráfico corresponde a unha función con crecemento exponencial ou con decrecemento. Escribe a función.





Pulsa para ir á páxina seguinte.

3. Funcións logarítmicas

3.a. Función inversa da exponencial

Le na pantalla a explicación teórica deste apartado.

EXERCICIO 1: Completa.

Dada unha función *inxectiva*, y=f(x), chámase ________________ de f a outra función, g, tal que g(y)=x.

Na escena adxunta construímos paso a paso a inversa da función exponencial. Podes variar o valor de "a" e pulsar "animar" para observar como aparecen as gráficas de dúas funcións: A función exponencial y = f(x) = a^x e a súa inversa x = g(y).

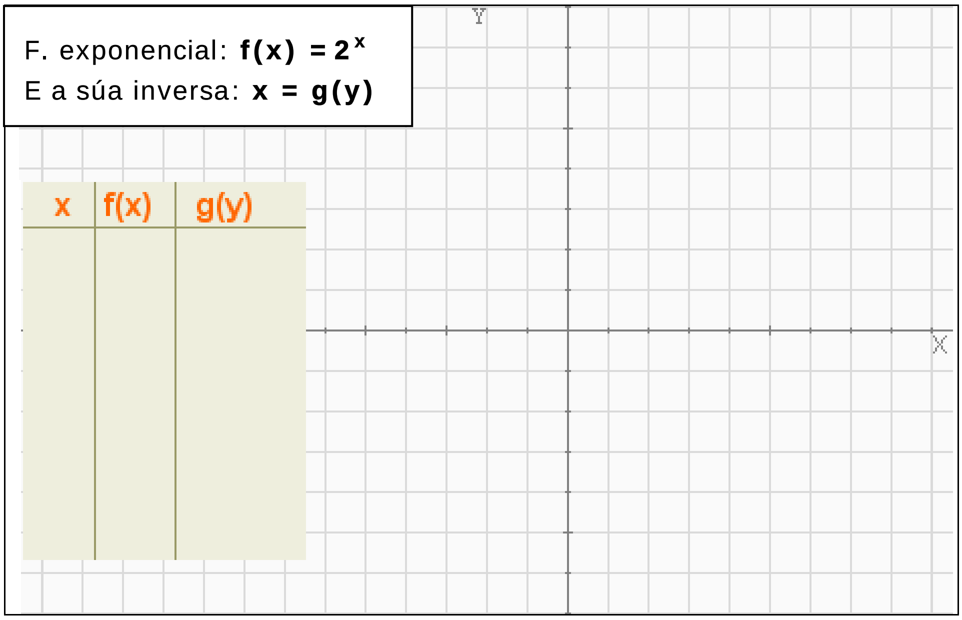
EXERCICIO 2: Completa.

Esta función inversa chámase _______________ e, como podes observar, é ___________ da ________________________ con respecto a _______________________________.

Representa a continuación as gráficas das funcións que se indican, escribindo en primeiro lugar a táboa de valores:

F. exponencial: **f(x) = 2^x**
E a súa inversa: **x = g(y)**

x	f(x)	g(y)



Pulsa para ir á páxina seguinte.

3.b. A función logarítmica

Le na pantalla a explicación teórica deste apartado.

EXERCICIO 1: Completa.

A **función logarítmica** é ____ e denótase:

y = , con a>0 e a≠ 1.

Observa na escena da dereita como construímos a súa gráfica de forma similar a como o fixemos coa exponencial. As súas propiedades son "*simétricas*".

EXERCICIO 2: Completa.

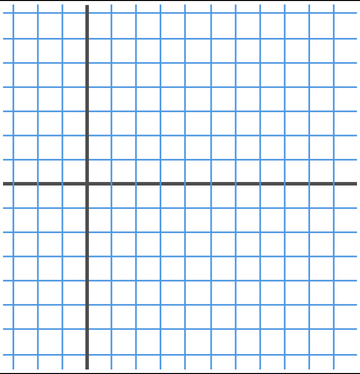
- O **dominio** é _______ e o **percorrido** é _____.
- É **continua** en _______________________.
- Se **a>1** a función é __________________________________.
- Se **0 < a <1** a función é _____________________.
- Corta ao eixe OX no punto **(,).**
- O eixe OY é ______________________.

A función é inxectiva: se $\log_a x = \log_a y$ entón $x=y$

Representa nos seguintes recadros as gráficas que se indican:

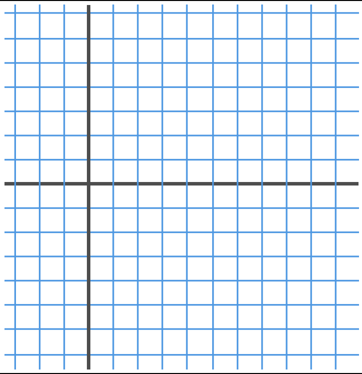
$f(x) = \log_2 x$

x	f(x)



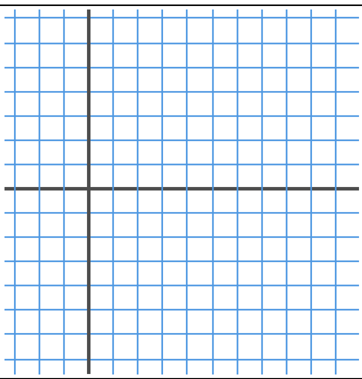
$f(x) = \log_{0,5} x$

x	f(x)



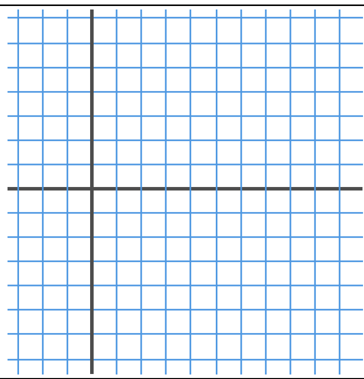
$f(x) = \log_{10} x$

x	f(x)



$f(x) = \log_{0,1} x$

x	f(x)



Pulsa o botón para facer uns exercicios.

Aparece unha escena na que verás outras funcións logarítmicas. Por exemplo o caso no que multiplicamos por un número "**k**" e o caso no que sumamos unha constante "**p**". É dicir, veremos as funcións exponenciais do tipo: $f(x) = k \cdot \log_a x$; $f(x) = \log_a x + p$

Pulsando nos botóns que aparecen nese cadro podes acceder a tres escenas diferentes. Resólveos nos seguintes recadros e despois pulsa o botón "Comprobar".

1 Funcións logarítmicas da forma: $\mathbf{f(x) = k \cdot \log_a x}$

Varía os valores de "a" e de "k" e indica se a función é crecente ou decrecente.

Con base $\mathbf{a > 1}$
Se $\mathbf{k>0}$ ____________________ Se $\mathbf{k<0}$ ________________________

Con base $\mathbf{0 < a < 1}$ (Ten en conta que $\mathbf{\log_{1/a} x = -\log_a x}$)
Se $\mathbf{k>0}$ ____________________ Se $\mathbf{k<0}$ ________________________

2 Funcións logarítmicas da forma: $\mathbf{f(x) = \log_a x + p}$

Varía os valores de "a" e de "k" e indica se a función é crecente ou decrecente.

Con base $\mathbf{a > 1}$
Se $\mathbf{p>0}$ ____________________ Se $\mathbf{p<0}$ ________________________

Con base $\mathbf{0 < a < 1}$
Se $\mathbf{p>0}$ ____________________ Se $\mathbf{p<0}$ ________________________

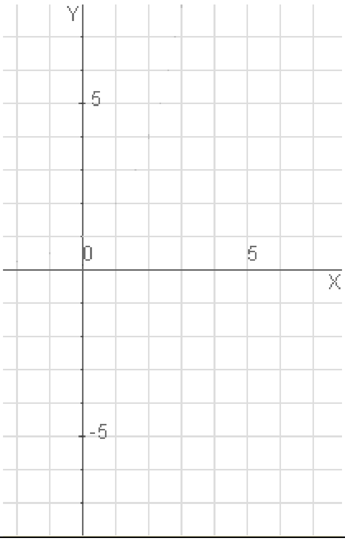
Observamos que:
Ao variar p, a función trasládase sobre o eixe OY.
Se $\mathbf{p>0}$ Cara ________ e se $\mathbf{p<0}$ Cara _______

Cal é o punto de corte da función $\mathbf{f(x) = \log_a x + p}$ co eixe OX? (,)

3 Representa dúas das funcións que aparecen neste apartado, completando tamén a táboa de valores:

f(x) =

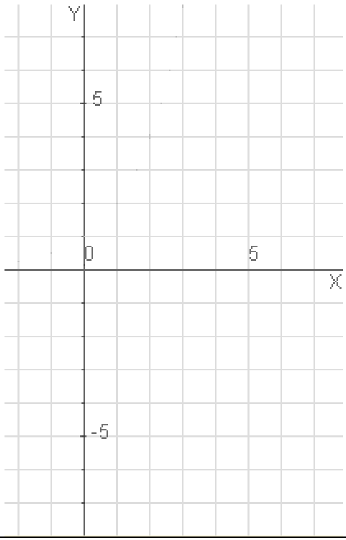
x	f(x)



Dominio:
Percorrido:
Asíntota:
Corte OX:

f(x) =

x	f(x)



Dominio:
Percorrido:
Asíntota:
Corte OX:

Pulsa ▶ para ir á páxina seguinte.

3.c. Logaritmos

Le na pantalla a explicación teórica deste apartado.

EXERCICIO 1: Completa.

Dados dous números reais positivos, **a** e **b** ($a \neq 1$), chamamos **logaritmo en base a de b** ____.

EXERCICIO 2: Completa.

A definición anterior indica que as dúas igualdades seguintes son equivalentes:

	Equivale a	

Cando **a=10** falamos de ______________________________ e non adoita escribirse a base.

log100=	porque	

Nesta escena da dereita podes ver exemplos e a partir deles podes comprender mellor o concepto de logaritmo. A continuación poderás ver as propiedades dos logaritmos e as súas correspondentes demostracións.
Anota os exemplos e as propiedades nos espazos seguintes:

Logaritmos de base maior que 1

Exemplo 1:		porque	
Exemplo 2:		porque	

Logaritmos de base positiva menor que 1

Exemplo 1:		porque	
Exemplo 2:		porque	

Propiedades dos logaritmos

1) Logaritmo dun produto

Se **b** e **c** son dous números reais positivos, cúmprese en calquera base **a** que:

Demostración

Se chamamos **z** ao primeiro logaritmo, **x** ao segundo e **y** ao terceiro, temos:

Polo tanto:

2) Logaritmo dun cociente

Se **b** e **c** son dous números reais positivos, cúmprese en calquera base **a** que:

Demostración

Se chamamos **z** ao primeiro logaritmo, **x** ao segundo e **y** ao terceiro, temos:

Polo tanto:

3) Logaritmo dunha potencia

Se **b** é un número real positivo e **c** calquera número, cúmprese en calquera base **a** que:

Demostración

Se chamamos **z** ao primeiro logaritmo e **x** ao segundo, temos:

Polo tanto:

4) Logaritmo da unidade e logaritmo da base

O logaritmo de 1 en calquera base é ___.
O logaritmo de a en base a é ___.

	porque	
	porque	

Logaritmos decimais

(I) Son os máis usados e por ese motivo non adoita escribirse a base. É dicir, $\log 3 = \log_{10} 3$

Exemplo 1:	
Exemplo 2:	
Exemplo 3:	
Exemplo 4:	

(II) Para calcular o logaritmo decimal dun número que non sexa potencia de 10 temos que usar a calculadora. Pero podemos facernos unha idea do seu valor aproximado tendo en conta que a función logarítmica de base maior que 1 é crecente.

Exemplo 1:	1 < < 10 →	Entón log =
Exemplo 2:	10 < < 100→	Entón log =
Exemplo 3:	100 < < 1000→	Entón log =

O logaritmo dun número "n" é ____.

O logaritmo infórmanos _________________________________.

(III) Se o número é menor que 1 o logaritmo tamén nos informa do seu tamaño:

Exemplo 1:	1 > > 0,1 →	Entón log =
Exemplo 2:	0,1 > > 0,01→	Entón log =
Exemplo 3:	0,01 > > 0,001→	Entón log =

O logaritmo dun número "n" indica ____.

Logaritmos coa calculadora

As calculadoras normalmente permiten calcular dous tipos de logaritmos: Decimais (base =10) e neperianos ou naturais (base = número e).
Se queremos usar a calculadora para obter logaritmos en calquera outra base teremos que recorrer á **fórmula de cambio de base**:

Pulsa o botón para facer uns exercicios.

Pulsando nos botóns que aparecen nese cadro podes acceder a tres exercicios diferentes. Resólveos nos seguintes recadros e despois pulsa o botón "Comprobar".

1 Escribe un mínimo de 5 enunciados e resólveos á man antes de pulsar "Comprobar"

Exercicio 1:	
Exercicio 2:	
Exercicio 3:	
Exercicio 4:	
Exercicio 5:	

2 Sabendo que o log 2 =0,301030, calcula á man o valor de:

log 1,6 =

log 0,125 =

log 40 =

3 Escribe un mínimo de 5 enunciados e resólveos coa calculadora:	
Exercicio 1:	
Exercicio 2:	
Exercicio 3:	
Exercicio 4:	
Exercicio 5:	

EXERCICIOS

10. Representa e estuda as funcións

a) $f(x) = 2\cdot\log_3 x$

b) $f(x) = \log_3 x+1$

11. Calcula x en cada caso aplicando a definición de logaritmo:

a) $\log_6 (1/6) = x$

b) $\log_4 2 = x$

c) $\log_5 125 = x$

d) $\log_{1/8} 1 = x$

e) $\log_3 81 = x$

f) $\log_{1/5} 25 = x$

g) $\log_3 (1/9) = x$

h) $\log_{1/2} (1/16) = x$

12. Sabendo que log2=0,301030 calcula sen axuda da calculadora:

a) log40

b) log1,6

c) log 0,125

13. Coa calculadora acha os seguintes logaritmos:

a) $\log_2 23{,}721$

b) $\log_3 25678{,}34561$

c) $\log_5 0{,}37906$

d) $\log_7 0{,}37906$

Pulsa ▶ para ir á páxina seguinte.

Lembra o máis importante - RESUMO

(*Completa o que falta na descrición das diferentes funcións*)

Funcións racionais

Son as que a súa expresión alxébrica é o cociente entre dous polinomios.

- Unha **función de proporcionalidade inversa**, **y=k/x**, relaciona dúas variables ___________________________ _________________________.
  - o A súa gráfica é unha _______________
  - o É descontinua en ___________
  - o Decrecente se _________
  - o Crecente se _______.
- Cando a gráfica dunha función se achega cada vez máis a unha recta, confundíndose con ela, dise que a recta é unha _____________.

Que función se obtén se se traslada o centro da hipérbole $y = \frac{3}{x}$ ao punto (-3,-2)?

$y = \frac{3}{x\_\_\_\_\_}\quad = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Funcións exponenciais

Son da forma $\mathbf{y=a^x}$, con a>0.

- O seu dominio é ______.
- É ________________.
- É crecente se ________________
- É decrecente se ________________
- Corta ao eixe OY en (,) e pasa por (,)
- O eixe OX é ___________________________.

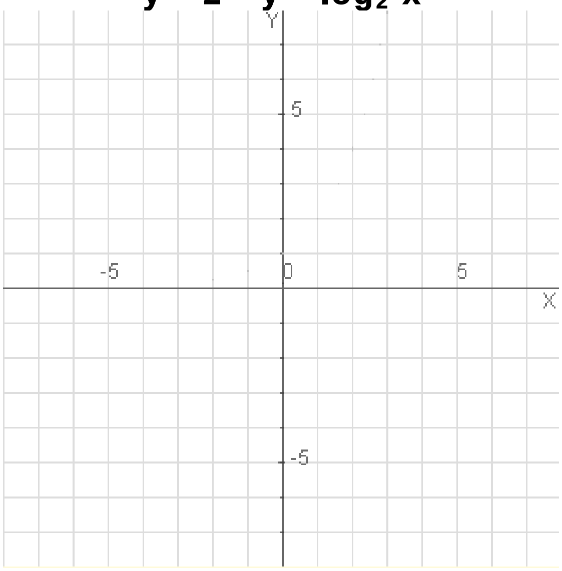
Funcións logarítmicas

Son as que asocian a cada número x o seu logaritmo en certa base, a>0, $\mathbf{y=\log_a x}$.

- O seu dominio son ________________________
- É ________________
- É crecente se _________
- É decrecente se ____________.
- Corta ao eixe OX en (,) e pasa por (,)
- O eixe OY é _________________________.

Fai a gráfica das funcións:

$y = 2^x \quad y = \log_2 x$



LOGARITMOS

O **logaritmo** en base **a>0** dun número **b>0** é o expoñente **x**, ao que hai que elevar a para obter b.

$\mathbf{\log_a b = x}$ é equivalente a ________

PROPIEDADES

1. $\log_a(b\cdot c) =$ ________________
2. $\log_a(b/c) =$ ________________
3. $\log_a b^n =$ ________________

Pulsa para ir á páxina seguinte.

Para practicar

Agora vas practicar resolvendo distintos EXERCICIOS. Nas seguintes páxinas atoparás EXERCICIOS de:

Funcións racionais
Funcións exponenciais
Funcións logarítmicas

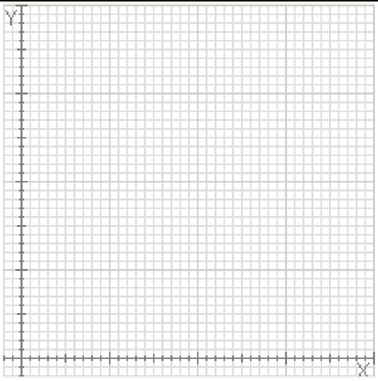
Completa o enunciado cos datos cos que che aparece cada EXERCICIO na pantalla e despois resólveo. É importante que primeiro o resolvas ti e despois comprobes no ordenador se o fixeches ben.

Funcións racionais.

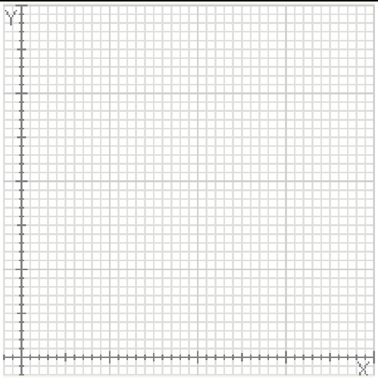
Proporcionalidade inversa (hai tres exercicios diferentes)

1. Envasamos ___ litros de auga mineral en botellas iguais.

Escribe a función que relaciona o número de botellas e a súa capacidade. Debuxa a gráfica.

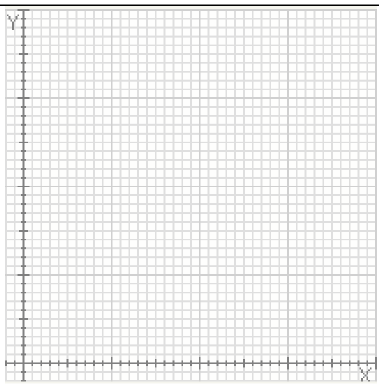


2. Un móbil percorre unha distancia de ______ con velocidade constante. Escribe a función velocidade→tempo, calcula o tempo invertido a unha velocidade de ____ km/h, e a velocidade se o tempo foi ___ horas.



3. Unha billa cun caudal de ___ litros/min. tarda _____ minutos en encher un depósito. Canto tardaría se o caudal fose de ___ litros/min.?

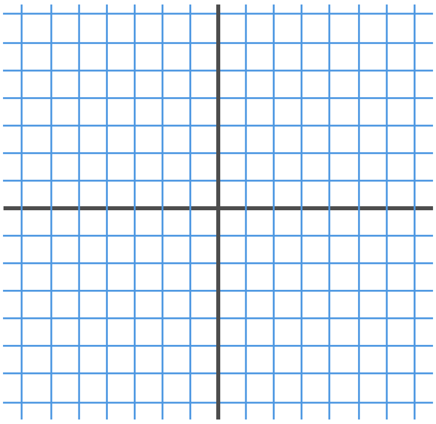
Escribe a función caudal→tempo.

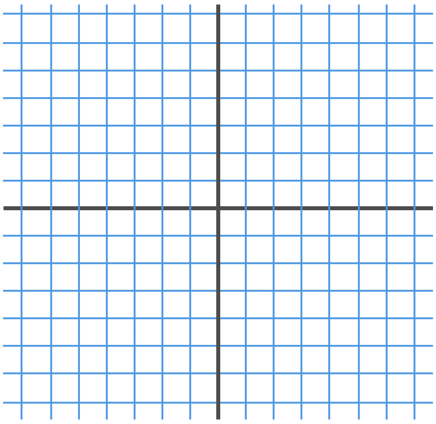


Debuxa a gráfica

4. Calcula as asíntotas e debuxa a gráfica das funcións:

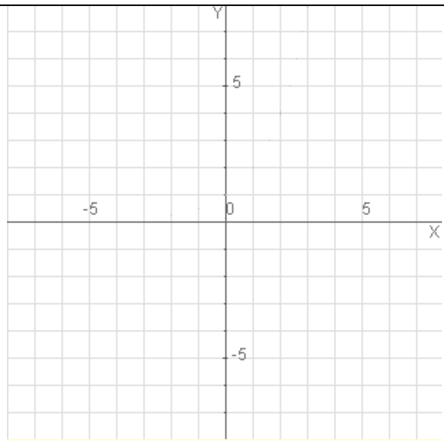
a) f(x) = ———— b) f(x) = ————





Escribe a ecuación

5. Escribe a ecuación da función que ten por gráfica unha hipérbole como a da figura co centro de simetría desprazado ao punto (,)



Custo por unidade

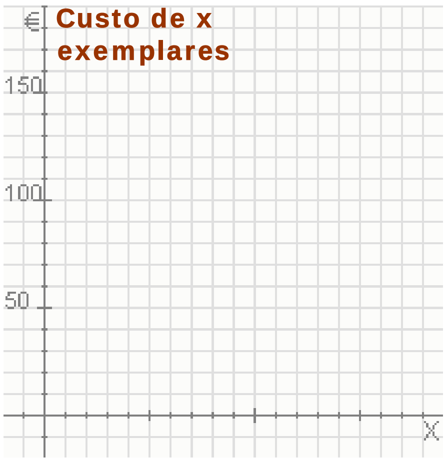
6. Os custos de edición, en euros, de x exemplares dun libro veñen dados por y=________ (x>0).

Canto custa editar ___ exemplares?,

e ____ exemplares?

Escribe a función que dá o custo por exemplar.

Por moitos exemplares que se publiquen, cal é o custo unitario como mínimo?



Pulsa para ir á páxina seguinte.

Funcións exponenciais.

Xuro composto (hai cinco exercicios diferentes)

7. En que se converte ao cabo de ___ anos un capital de __________ ao ______ anual?

8. Un capital colocado a xuro composto do ___ anual, converteuse en __ anos en ______. Cal era o capital inicial?

9. Un capital de __________ colocado a xuro composto converteuse ao cabo de __ anos en ___________. Cal é o rédito (xuro anual) a que estivo colocado?

10. Un capital de _________, colocado a xuro composto do ____ anual, converteuse ao cabo duns anos en ________. Cantos anos transcorreron?

11. Cantos anos ha de estar colocado certo capital, ao ____ anual, para que se duplique?

Decaemento Radioactivo (hai tres exercicios diferentes)

12. O período de desintegración do Carbono 14 é 5370 anos. En que cantidade se converten ___ ao cabo de _____ anos?

13. Cantos anos han de pasar para que unha mostra de ____ de C14 se converta en ____?

(Período de desintegración do C14: 5370 anos).

14. Unha mostra de _____ dunha substancia radioactiva convértese en ______ en __ anos.

Cal é o período de desintegración?

Crecemento de poboacións (hai dous exercicios diferentes)

15. O tamaño de certo cultivo de bacterias multiplícase por __ cada __ minutos. Se supoñemos que o cultivo ten inicialmente __ millóns de bacterias, dentro de cantas horas terá ___ millóns de bacterias?

16. O tamaño de certo cultivo de bacterias multiplícase por __ cada ___ minutos, se ao cabo de __ horas o cultivo ten ____ millóns de bacterias, cantas había no instante inicial?

Ecuacións exponenciais

Cando a x está no expoñente

Exemplo 1	**Exemplo 2**
Resolve a ecuación: $25^{2x-3}=125$	Calcula x en $3^x=14$
$25=5^2$ e $125=5^3$, entón $5^{2(2x-3)}=5^3$ igualando os expoñentes $2(2x-3)=3 \Rightarrow x=9/4$	Tomando logaritmos: $\log 3^x = \log 14$ $x \log 3=\log 14$ Entón $x=\dfrac{\log 14}{\log 3}=2{,}40$

17. Resolve ecuacións exponenciais (escribe 3 enunciados diferentes que aparecen no teu ordenador e resólveos antes de comprobar a solución):

a)

b)

c)

Pulsa ▶ para ir á páxina seguinte.

Funcións logarítmicas.

Definición de logaritmo (hai tres exercicios diferentes)

18. Calcula o número cuxo logaritmo en base ___ é ___.

19. En que base o logaritmo de 0,001 é -3?

20. Calcula mentalmente o logaritmo en base 2 de 32.

Logaritmos decimais

21. Sabendo que o $\log 2=0{,}3010$ e o $\log 3=0{,}4771$, calcula: (fai polo menos 3 diferentes)

a)

b)

c)

Logaritmos con calculadora

22. Utiliza a calculadora para descubrir o valor de: (fai polo menos 3 diferentes)

a) Logaritmo en base __ de __________

b) Logaritmo en base __ de __________

c) Logaritmo en base __ de __________

Ecuacións con logaritmos

Exemplo

Resolve a ecuación: $4 \cdot \log x = 2 \cdot \log x + \log 4 + 2$

$4 \cdot \log x - 2 \cdot \log x = \log 4 + \log 100$ $2 \cdot \log x = \log 400$	$\log x^2 = \log 400$ $x^2 = 400 \; x \Rightarrow \pm = 20$

23. Aplicando as propiedades dos logaritmos resolve as ecuacións (escribe 4 enunciados diferentes que aparecen no teu ordenador, dous de ecuacións cunha incógnita e outros dous de sistemas de dúas ecuacións):

a)

b)

c)

d)

Pulsa para ir á páxina seguinte.

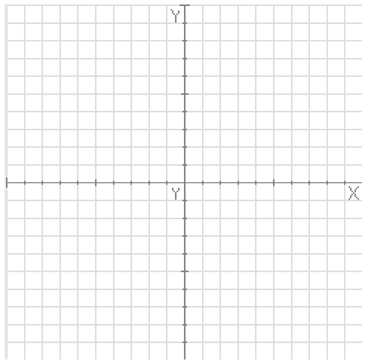
Autoavaliación

Completa aquí cada un dos enunciados que van aparecendo no ordenador e resólveo, despois introduce o resultado para comprobar se a solución é correcta.

1. Cal é a función de proporcionalidade inversa que a x = ____ lle fai corresponder y = ___?

$f(x)=\frac{\square}{x}$

2. Escribe a expresión alxébrica da función da gráfica.



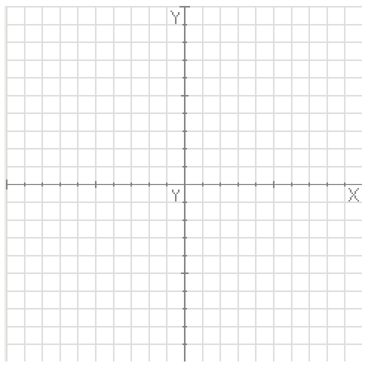
$f(x)=\frac{\square}{x}$

3. Calcula as asíntotas da función f(x) = ——— .

vertical: x = $\square$

horizontal: y = $\square$

4. Escribe a expresión alxébrica da función exponencial da gráfica.

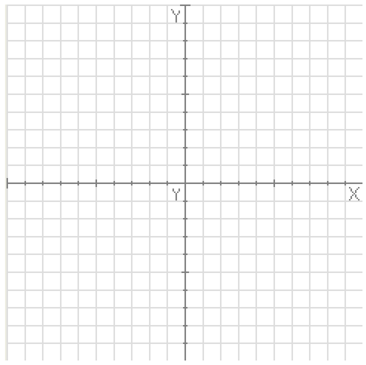


$y=\square^{x}$

5. Calcula en canto se converte un capital de ______ € colocado ao ___ anual durante __ anos.

6 A poboación dunha especie en extinción redúcese á metade cada ano. Se ao cabo de __ anos quedan ____ exemplares, cal era a poboación inicial?

7 Escribe a expresión da función logarítmica que é a inversa da exponencial da gráfica.



f(x)=log__ x

8 Calcula log

9 Sabendo que log __ = _______ e sen usar a calculadora, calcula log ________

10 Coa calculadora acha o valor de x en

____

Redondea o resultado a centésimas.

Para practicar máis

1. Envasamos 276 litros de auga en botellas iguais. Escribe a función que relaciona o número de botellas e a súa capacidade.

2. Un móbil percorre unha distancia de 130 km con velocidade constante. Escribe a función velocidade→tempo, calcula o tempo invertido a unha velocidade de 50 km/h, e a velocidade se o tempo foi 5 horas.

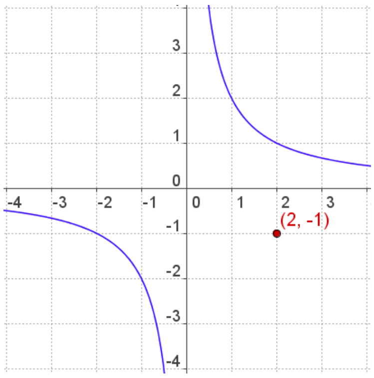
3. Unha billa cun caudal de 8 litros/min tarda 42 minutos en encher un depósito. Canto tardaría se o caudal fose de 24 litros/min?. Escribe a función caudal→tempo.

4. Calcula as asíntotas das funcións seguintes:

a) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$

c) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ d) $f(x)=\dfrac{-x}{x+2}$

5. Escribe a ecuación da función que ten por gráfica unha hipérbole como a da figura co centro de simetría desprazado ao punto (2,-1).



6. Os custos de edición, en euros, de x exemplares dun libro veñen dados por y=21x+24 (x>0). Canto custa editar 8 exemplares?, e 80 exemplares?. Escribe a función que dá o custo por exemplar. Por moitos exemplares que se publiquen, cal é o custo unitario como mínimo?

7. En que se converte ao cabo de 15 anos un capital de 23000 € ao 5,5% anual?

8. Un capital colocado a xuro composto ao 2% anual, converteuse en 3 anos en 9550,87 €. Cal era o capital inicial?

9. Un capital de 29000€ colocado a xuro composto converteuse ao cabo de 4 anos en 31390,53 €. Cal é o rédito (xuro anual) a que estivo colocado?

10. Un capital de 7000€ colocado a xuro composto do 2% anual, converteuse ao cabo duns anos en 8201,61 €. Cantos anos transcorreron?

11. Cantos anos ha de estar colocado certo capital, ao 3% anual, para que se duplique.

12. O período de desintegración do Carbono 14 é 5370 anos. En que cantidade se converten 10 gr ao cabo de 1000 anos?

13. Cantos anos han de pasar para que unha mostra de 30 gr de C14 se converta en 20,86 gr.? *(Período de desintegración do C14 5370 anos).*

14. Unha mostra de 60 gr. dunha substancia radioactiva convértese en 35,67 gr en 30 anos. Cal é o período de desintegración?.

15. O tamaño de certo cultivo de bacterias multiplícase por 2 cada 30 minutos. Se supoñemos que o cultivo ten inicialmente 5 millóns de bacterias, dentro de cantas horas terá 320 millóns de bacterias?.

16. O tamaño de certo cultivo de bacterias multiplícase por 2 cada 20 minutos, se ao cabo de 3 horas o cultivo ten 576 millóns de bacterias, cantas había no instante inicial?

17. Calcula o número:

a) o logaritmo do cal en base 6 é 3.

b) o logaritmo do cal en base 4 é -3.

c) o logaritmo do cal en base 10 é 2.

d) o logaritmo do cal en base 1/2 é -3.

e) o logaritmo do cal en base 1/5 é 2.

18. En que base?

a) o logaritmo de 0,001 é -3.

b) o logaritmo de 243 é 3.

c) o logaritmo de 8 é 1.

d) o logaritmo de 1/81 é -4.

e) o logaritmo de 49 é 2.

19. Calcula mentalmente:

a) o logaritmo en base 2 de 32.

b) o logaritmo en base 5 de 125.

c) o logaritmo en base 3 de 1/9.

d) o logaritmo en base 7 de 1.

e) o logaritmo en base 6 de 216.

20. Sabendo que o log2=0,3010 e o log3=0,4771, calcula:

a) log 16

b) log 512

c) log(16/81)

d) log 24

e) log 72

21. Utiliza a calculadora para descubrir o valor de:

a) $\log_7 12456{,}789$

b) $\log_5 5123{,}4345$

c) $\log_9 47658{,}897$

d) $\log_3 23{,}146$

e) $\log_6 1235{,}098$

22. Resolve as ecuacións exponenciais:

a) $32^{-9x+9} = 16$

b) $27^{2x+3} = 9^3$

c) $4^{-3x+8} = 8$

d) $9^{8x-7} = 1$

e) $25^{-5x-5} = 1$

23. Calcula o valor de x:

a) $7^x = 5$

b) $5^x = 7$

c) $2{,}13^x = 4{,}5$

24. Aplicando as propiedades dos logaritmos resolve as ecuacións:

a) $\log(32+x^2) - 2\cdot\log(4-x) = 0$

b) $2\cdot\log x - \log(x-16) = 2$

c) $\log x^2 - \log\dfrac{10x+11}{10} = -2$

d) $5\cdot\log\dfrac{x}{2} + 2\cdot\log\dfrac{x}{3} = 3\cdot\log x - \log\dfrac{32}{9}$

25. Resolve os sistemas:

a) $\begin{cases} 2\cdot\log x - 3\cdot\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$