9 Funcións e gráficas

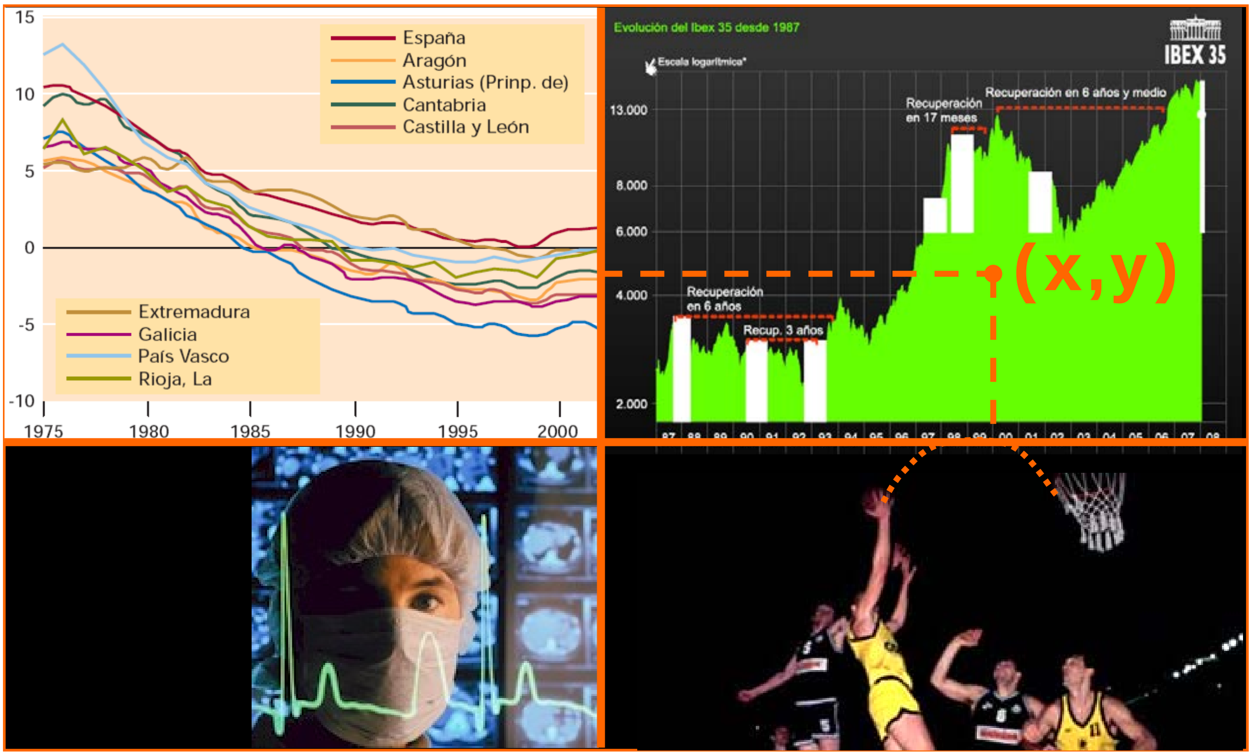
Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Coñecer e interpretar as funcións e as distintas formas de presentalas.
- Recoñecer o dominio e o percorrido dunha función.
- Determinar se unha función é continua ou descontinua.
- Calcular a taxa de variación e a taxa de variación media dunha función nun intervalo.
- Determinar o crecemento ou decrecemento dunha función e calcular os seus máximos e mínimos.
- Recoñecer os puntos de inflexión.
- Comprobar a simetría dalgunhas funcións respecto á orixe e ao eixe OY.
- Recoñecer se unha función é periódica.

Antes de empezar

A linguaxe das gráficas



Das distintas formas en que se pode presentar unha función, mediante un enunciado, unha táboa, unha expresión alxébrica ou unha gráfica, esta última é a que nos permite ver dunha soa ollada o seu comportamento global, de aí a súa importancia. Neste tema aprenderás a recoñecer e interpretar as súas características principais.

Investiga

Imaxina que montas nunha noria cuxo raio mide 30 m e para subir hai que ascender 5 m desde o chan. A noria comeza a xirar, como é a gráfica da función que dá a altura á que te encontras segundo o ángulo de xiro? Ti vas na cabina laranxa e uns amigos na verde, como será a súa gráfica?

1. Funcións reais

Concepto de función

Unha función é unha **correspondencia** entre dous conxuntos numéricos, de tal forma que a cada elemento do conxunto inicial lle corresponde un elemento e só un do conxunto final.

Relaciónanse así dúas variables numéricas que adoitan designarse con x e y.

f: x → y=f(x)

- ✓ x é a variable independente
- ✓ y é a variable dependente

km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

O gráfico describe o percorrido da 9ª Etapa da Volta Ciclista 2007, indicando os km totais e a altitude nos puntos principais do traxecto.
Á esquerda aparece a gráfica anterior trazada sobre uns eixes cartesianos, para simplificala uníronse os puntos principais mediante segmentos. Trátase dunha función que dá a altitude segundo os km percorridos, observa a táboa de valores.

Gráfica dunha función

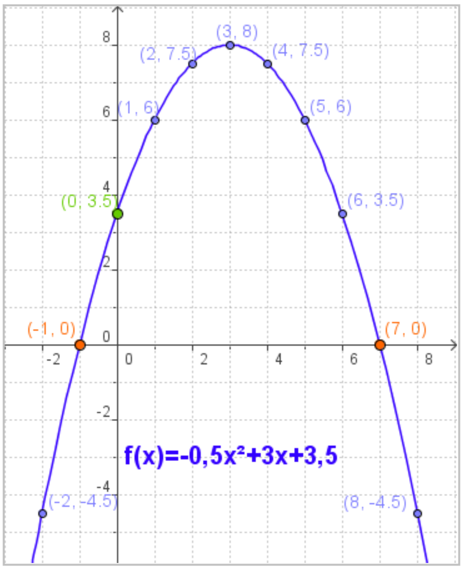
Para ver o comportamento dunha función, **f: x → y**, recorremos á súa **representación gráfica** sobre os eixes cartesianos, no eixe de abscisas (OX) a variable independente e no de ordenadas (OY) a independente; sendo as coordenadas de cada punto da gráfica: **(x, f(x))**.

Na figura está representada a función:

$$f(x)= 0,5x^2+3x+3,5$$

Facendo unha táboa de valores, represéntanse os puntos obtidos, x no eixe de abscisas (OX), f(x) no de ordenadas (OY).

x	-2	**-1**	**0**	1	2	3	4	5	6	**7**	8
f(x)	-4,5	**0**	**3,5**	6	7,5	8	7,5	6	3,5	**0**	-4,5



Hai uns puntos que teñen especial interese, os que a gráfica corta aos eixes coordenados. Para calculalos:

- ✓ Corte co eixe OY:
  Os puntos do eixe de ordenadas teñen abscisa 0, abonda con facer **x=0** na fórmula da función.
- ✓ Cortes co eixe OX:
  Os puntos do eixe de abscisas teñen y=0. Resólvese a ecuación **f(x)=0**

Cortes cos eixes

EIXE OY: f(0)=3,5   Punto (0, 3,5)

EIXE OX: Resolvendo a ecuación:

$$0,5x^2+3x+3,5=0$$

Resulta:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+7}}{-2\cdot 0,5}=3\pm 4=\begin{matrix}7\\-1\end{matrix}$$

Puntos (7, 0) (-1, 0)

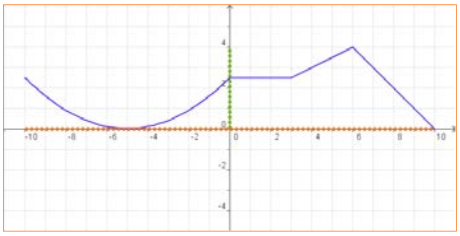
Dominio e percorrido

Dada unha función y=f(x)

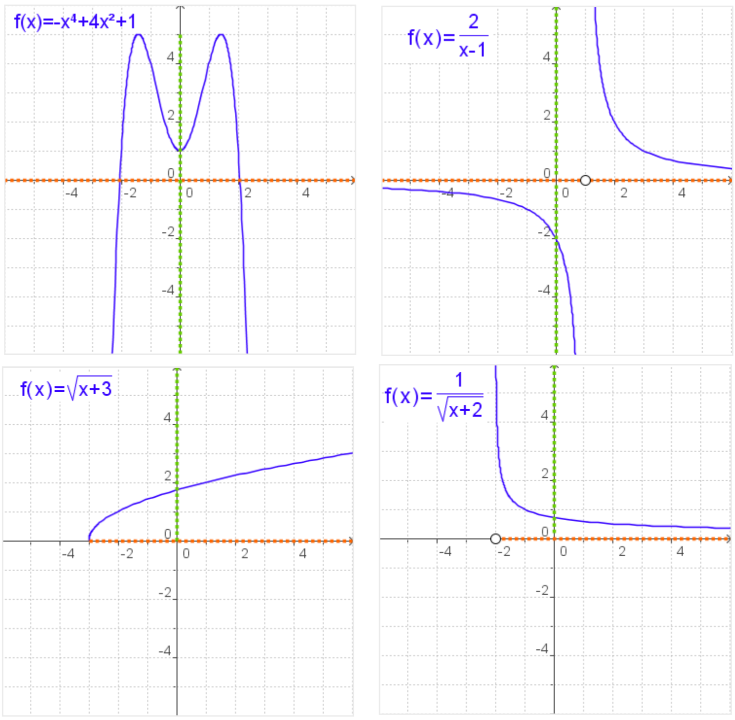
- ✓ Chámase **dominio** de f ao conxunto de valores que toma a variable independente, **x**. Indícase como **Dom f**.

  O dominio está formado, por tanto, polos valores de x para os que existe a función, é dicir, para os que hai un f(x).

- ✓ O **percorrido** é o conxunto de valores que pode tomar a variable dependente, **y**, isto é o conxunto das imaxes. Represéntase como **Im f**.



Dom f=[-10, 10]



Calcular Dominios

- Se a expresión analítica da función é un polinomio, o dominio son todos os números reais.

  $f(x)=-x^4+4x^2+1$

  Dom f = $\mathbb{R}$
  Im f = $(-\infty, 5]$

- Se a expresión analítica da función é un cociente, o dominio son todos os reais excepto os que anulan o denominador.

  $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

  Dom f = $\mathbb{R} - \{1\}$
  Im f = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- Se a expresión analítica da función é unha raíz cadrada, o dominio está formado polos números reais para os que o radicando é positivo ou cero.

  $f(x) = \sqrt{x+3}$

  Dom f = $[-3, +\infty)$
  Im f = $[0, +\infty)$

  $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

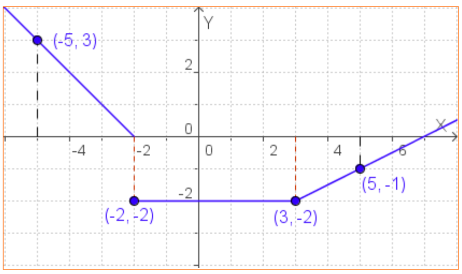
  Dom f = $(-2, +\infty)$
  Im f = $(0, +\infty)$

Funcións definidas a anacos

Hai un tipo de funcións que veñen definidas con distintas expresións alxébricas segundo os valores de x, dise que están **definidas a anacos**.

Para describir analiticamente unha función formada por anacos doutras funcións, danse as expresións dos distintos tramos, por orde de esquerda a dereita, indicando en cada tramo os valores de x para os que a función está definida.

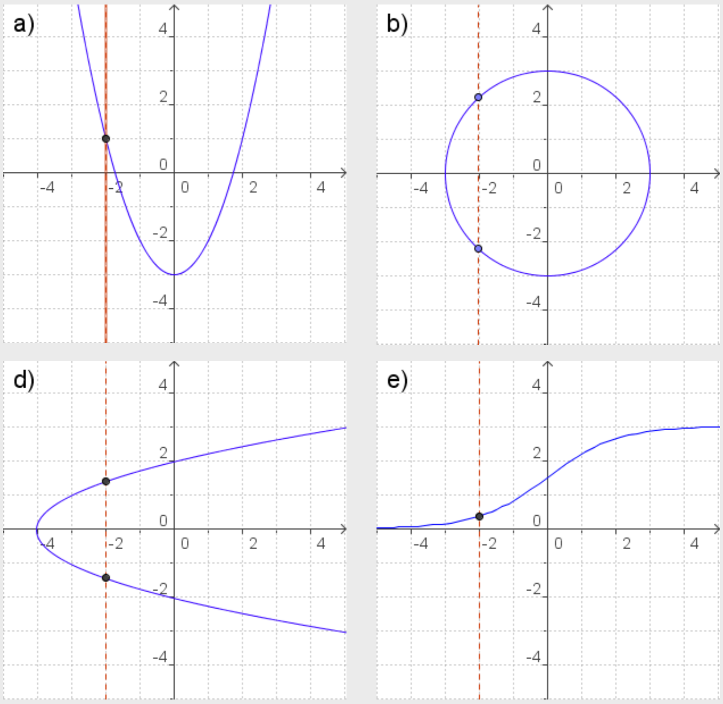
Na figura podes ver un exemplo deste tipo de funcións e a súa representación gráfica.



$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{-x-2} & \mathbf{x < -2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2 \le x \le 3} \\ \mathbf{0{,}5x - 3{,}5} & \mathbf{x > 3} \end{cases}$$

EXERCICIOS resoltos

5. Das seguintes gráficas indica as que corresponden a unha función e as que non.

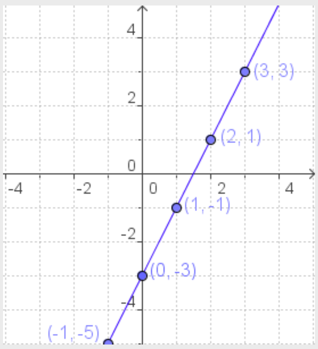


- Son gráficas dunha función a), c) e e), xa que a cada x do dominio correspóndelle un único valor de y.
- Non son gráficas dunha función b) e d).

6. Fai unha táboa de valores, debuxa os puntos obtidos e representa a función.

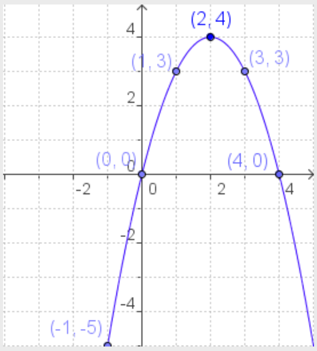
a) $f(x)=2x-3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



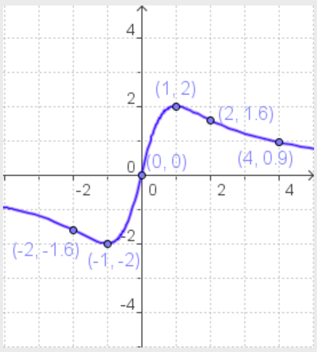
b) $f(x)=-x^2+4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



- LEMBRA

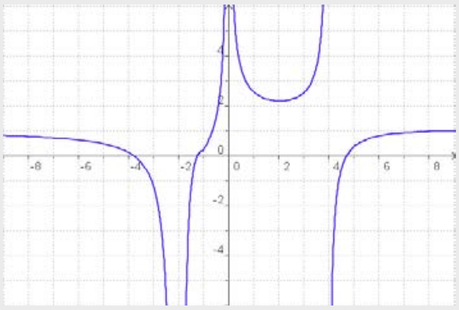
  Para facer unha táboa de valores, a partir da expresión dunha función, substitúe na fórmula o x polos valores que desexes, opera e calcula os correspondentes de y=f(x). En xeral procura alternar valores positivos e negativos.

  Debuxa os puntos (x,y) así obtidos, e úneos.

EXERCICIOS resoltos

3. Calcula o dominio das seguintes funcións.

a)



Dom f = IR– {-2, 0, 4}

b)

Dom f = IR – {-1, 1, 5}

Nos puntos indicados, en ambos os casos, non se pode encontrar f(x) na gráfica.

c) $f(x)= x^3-2x^2+5x$

Dom f = IR   xa que é un polinomio

d) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$

Dom f = IR – {2}

e) $f(x)=\sqrt{x-5}$

x-5≥0, x≥5 ⇒ Dom f = [5, +∞)

f) $f(x)=\sqrt{5-x}$

5-x≥0, 5≥x ⇒ Dom f = (-∞ , 5]

g) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x+4}}$

x+4>0, x>-4 ⇒ Dom f = (-4, +∞)

h) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

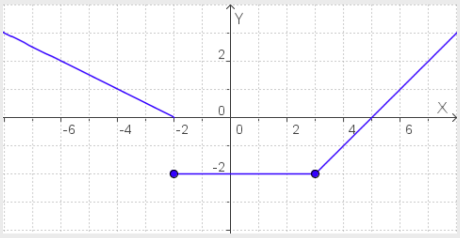
2-x>0, 2>x ⇒ Dom f = (-∞ , 2)

(Nestes casos -4 e 2, respectivamente, non son do dominio xa que anulan o denominador)

4. Nas seguintes funcións, definidas a anacos, calcula as imaxes dos valores de x indicados.

a) $f(x)=\begin{cases} -0{,}5x-1 & se \quad x<-2 \\ -2 & se \quad -2\le x\le 3 \\ x-5 & se \quad x>3 \end{cases}$

x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



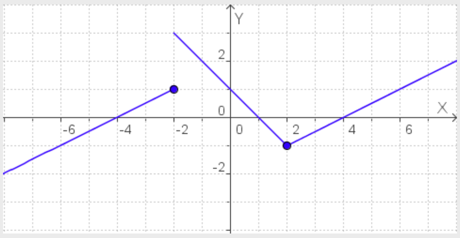
x=-4 substitúese arriba (-4<-2)

x=-2, x=1 e x=3 substitúense na do medio, xa que están en [-2,3].

x=6 substitúense abaixo pois 6>3.

c) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+2 & se \quad x\le -2 \\ -x+1 & se \quad -2<x<2 \\ 0{,}5x-2 & se \quad x\ge 2 \end{cases}$

x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



x=-6, x=-2 substitúese arriba.

x=0 substitúese na do medio, xa que están en -2<0<2.

x=2, x=4 substitúese abaixo.

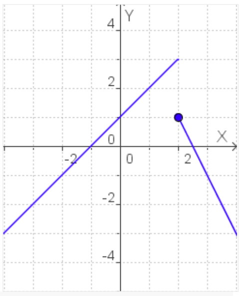
2. Propiedades das funcións

Continuidade

A primeira idea de función **continua** é a que pode ser representada dun só trazo, sen levantar o lapis do papel.

Cando unha función non é continua nun punto dise que presenta unha **descontinuidade**.

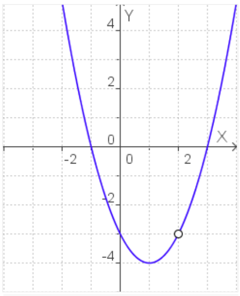
As tres funcións debuxadas debaixo son descontinuas en x=2, pero teñen distintos tipos de descontinuidade.



$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<2 \\ -2x+5 & x \geq 2 \end{cases}$

f(2)=1

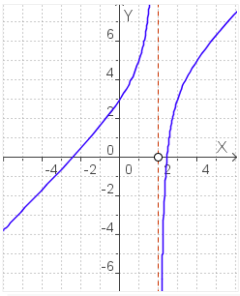
A gráfica presenta un salto.



$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 6}{x-2}$

x=2 non pertence ao dominio.

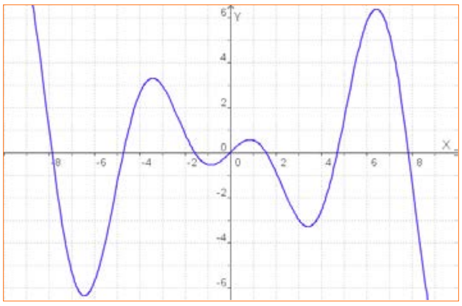
A descontinuidade dise "evitable".



$f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x-2}$

x=2 non pertence ao dominio.

A gráfica presenta un salto infinito.



Unha función y=f(x) é continua en x=a se:

- A función está definida en **x=a**, existe **f(a)=b**.
- As imaxes dos valores próximos a **a** tenden a **b**.

Hai varias razóns polas que unha función non é continua nun punto:

- Presenta un salto.
- A función non está definida nese punto, ou se o está queda separado, hai un "burato" na gráfica.
- A función non está definida e o seu valor crece (ou decrece) indefinidamente cando nos achegamos ao punto.

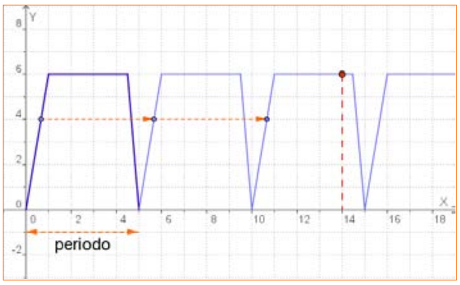
Funcións periódicas

Na natureza e no teu contorno habitual hai fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como o caso das mareas, os péndulos e resortes, sono...

As funcións que describen este tipo de fenómenos chámanse **periódicas**

Unha **función** é **periódica** cando o seu valor se repite cada vez que a variable independente percorre un certo intervalo. O valor deste intervalo chámase **período**.

f(x+período)=f(x)



Unha cisterna énchese e baléirase automaticamente expulsando 6 litros de auga cada 5 minutos, seguindo o ritmo da gráfica. Cando o depósito está baleiro comeza o enchido, que custa 1 minuto, permanece cheo 3,5 minutos e baléirase en 0,5 minutos. Este proceso repítese periodicamente.

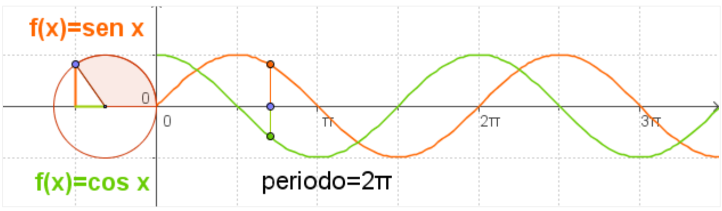
Para coñecer o volume de auga no depósito en cada instante coñecer o que ocorre nestes primeiros 5 minutos. Así aos 14 minutos, a cantidade de auga é: f(14)=f(4+2·5)=f(4)=6

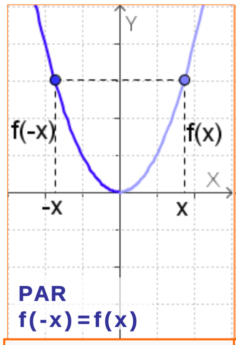
Ao dividir 14:5, cociente=2 resto=5

En xeral, se o período é 5:

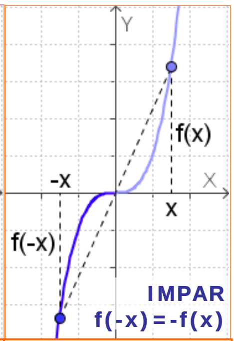
f(x+5·n)=f(x)

Dúas funcións periódicas importantes:





Cando se dobra a gráfica polo eixe de ordenadas as dúas ramas coinciden.



Cando se dobra a gráfica por ambos os eixes as dúas ramas coinciden.

Simetrías

A gráfica dalgunhas funcións pode presentar algún tipo de simetría que se é estudada previamente, facilita o seu debuxo.

- ✓ Unha función é **simétrica** respecto ao **eixe OY**, se **f(-x)=f(x)**.

  Neste caso a función dise **PAR**.

- ✓ Unha función é **simétrica** respecto á **orixe de coordenadas** cando **f(-x)=-f(x)**.

  Neste caso a función dise **IMPAR**.

Observa os gráficos para recoñecelas.

EXERCICIOS resoltos

5. Calcula o valor de k para que as seguintes funcións sexan continuas no punto en que cambiar a gráfica:

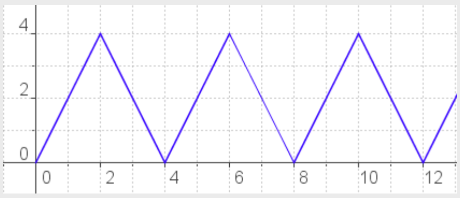
a) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+k & x\le 4 \\ x-3 & x>4 \end{cases}$

f(4)=0,5·4+k=2+k
Se se definise no outro tramo sería:
f(4)=4-3=1
como ambos os tramos deben coincidir:
2+k=1 ⇒ k=1-2=-1

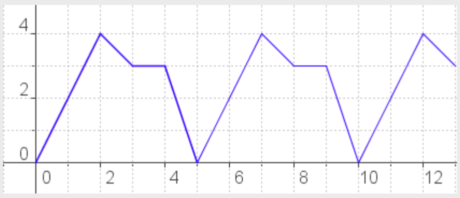
b) $f(x)=\begin{cases} k & x\le 1 \\ -x+1 & x>1 \end{cases}$

f(1)=k
Se estivese definida no outro tramo sería:
f(1)=-1+1=0
como ambos os tramos deben coincidir:
k=0

6. Cal é o período das funcións seguintes?. En cada caso calcula f(45).

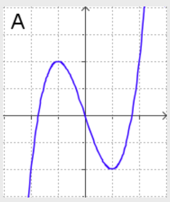
a) 

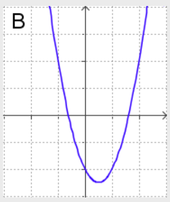
Período = 4
45=4·11+1   f(45)=f(1)=2

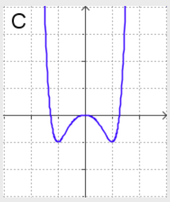
b) 

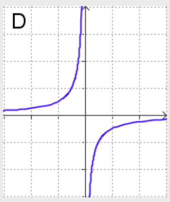
Período = 5
45=5·9   f(45)=f(0)=0

7. De entre as seguintes gráficas selecciona as que corresponden a funcións pares e a funcións impares.









Par: C
Impares: A e D
B non é par nin impar

8. As funcións seguintes (corresponden ás de ex7) son pares ou impares?

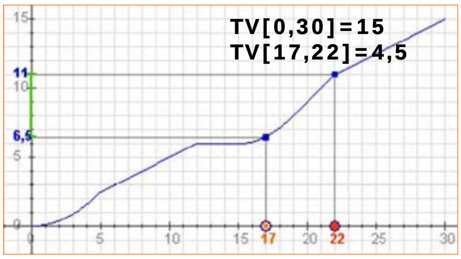
a) $f(x)=x^3-3x$	$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-f(x)$	IMPAR
b) $f(x)=2x^2-2x-2$	$f(-x)=2(-x)^2-2(-x)-2=2x^2+2x-2$	Nin PAR nin IMPAR
c) $f(x)=x^6-x^4-x^2$	$f(-x)=(-x)^6-(-x)^4-(-x)^2=2x^6-x^4-x^2=f(x)$	PAR
d) $f(x)=-1/x$	$f(-x)=-1/(-x)=1/x=-f(x)$	IMPAR

3. Taxa de variación e crecemento

Taxa de variación dunha función

A **taxa de variación** ou **incremento** dunha función é o aumento ou diminución que experimenta unha función ao pasar a variable independente dun valor a outro.

$$\mathbf{TV[x_1,x_2]=f(x_1)\text{-}f(x_2)}$$



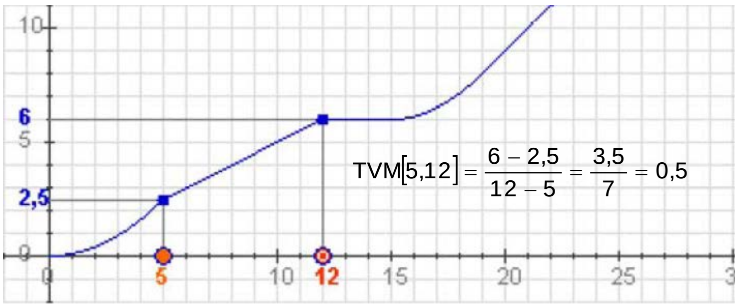
A gráfica representa a distancia en km percorrida dun ciclista en función do tempo, en minutos, empregado.

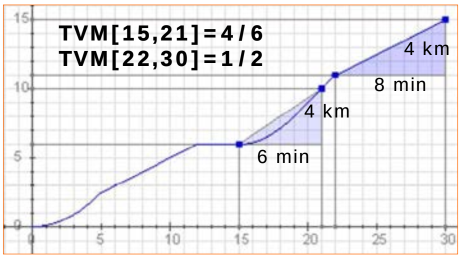
A TV corresponde á distancia percorrida nun intervalo de tempo.

A TVM é a velocidade media nun intervalo de tempo determinado.

De máis utilidade resulta calcular a chamada **taxa de variación media**, que nos indica a variación relativa da función respecto á variable independente:

$$\mathbf{TVM[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$





Crecemento e decrecemento

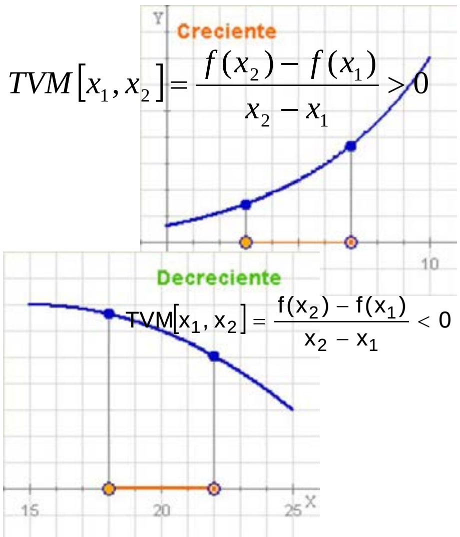
Unha característica das funcións que se pode visualizar facilmente nas gráficas é a monotonía. Cando ao aumentar o valor de x aumenta o valor de y=f(x), a gráfica "ascende" e dise que a función é **crecente**. Se pola contra ao aumentar x diminúe e, a gráfica "descende", e a función **decrece**. Precisando un pouco máis:

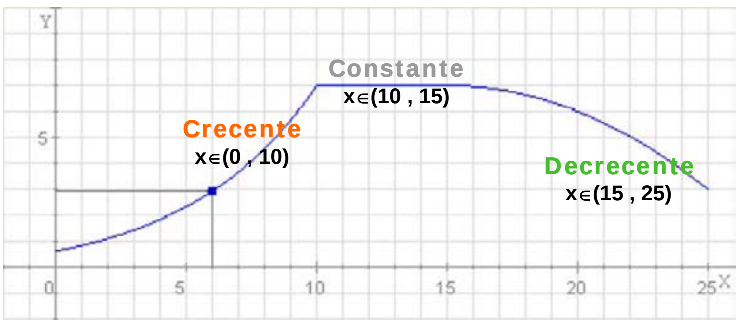
Unha **función** é **crecente** nun intervalo, cando dados dos puntos calquera do mesmo

- Se $\mathbf{x_1<x_2}$ entón $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$

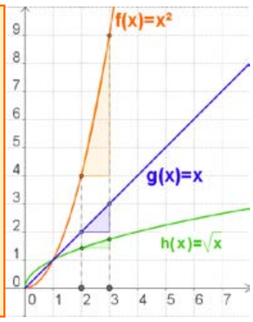
E será **decrecente**:

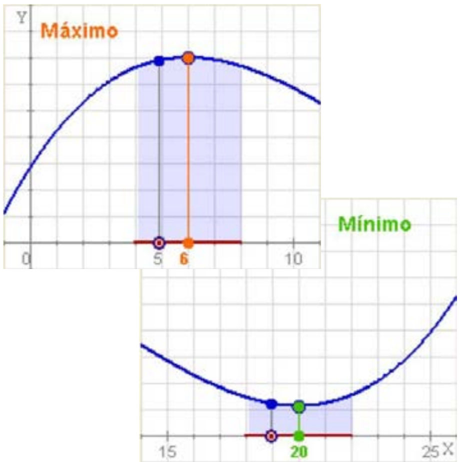
- Se $\mathbf{x_1<x_2}$ entón $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$

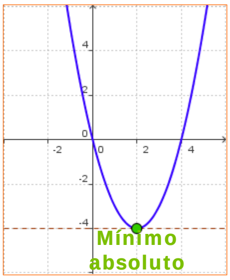


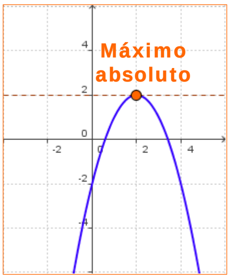


Todas as funcións non crecen ou decrecen, da mesma maneira.
$f(x)=x^2$ é a que crece máis á présa,
$g(x)=x$ ten un crecemento lineal,
$h(x)=\sqrt{x}$ crece máis lentamente.









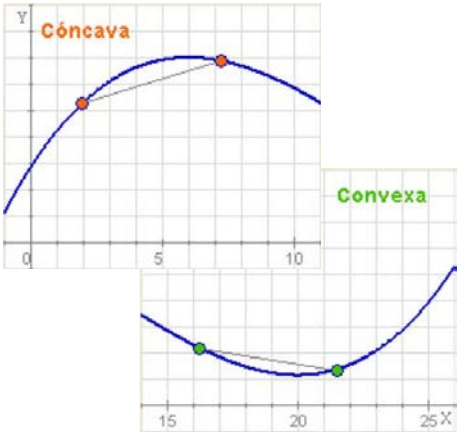
Máximos e mínimos

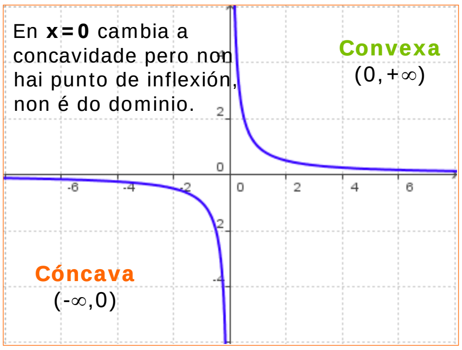
Dada unha función continua nun punto x=a, dise que presenta un **máximo relativo**, se á esquerda do dito punto a función é crecente e á dereita a función é decrecente.

Se, polo contrario, a función é decrecente á esquerda e crecente á dereita hai un **mínimo relativo**.

Se se verifica que f(a)>f(x) para calquera valor x do dominio, e non só para os valores de "arredor", fálase de **máximo absoluto** en x=a.

E analogamente dise que en a hai un **mínimo absoluto** se f(a)<(f(x) para calquera x do dominio.





Concavidade, convexidade e puntos de inflexión

Outra característica de interese nas gráficas das funcións é a concavidade, estudar os intervalos nos que a gráfica se curva cara abaixo ou cara arriba.

- ✓ Unha función é **cóncava** nun intervalo se o segmento que une dous puntos calquera da curva queda debaixo dela, e **convexa** se queda por riba.

Os puntos do dominio nos que a función pasa de cóncava a convexa ou viceversa, chámanse **puntos de inflexión**.

EXERCICIOS resoltos

9. Calcula a taxa de variación media das funcións seguintes entre os puntos indicados. Comproba na figura que nas funcións cuxo gráfico é unha recta a TVM é constante. ***Triángulos semellantes*

a) y=2x+3

$$TVM[1,3]=\frac{9-5}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

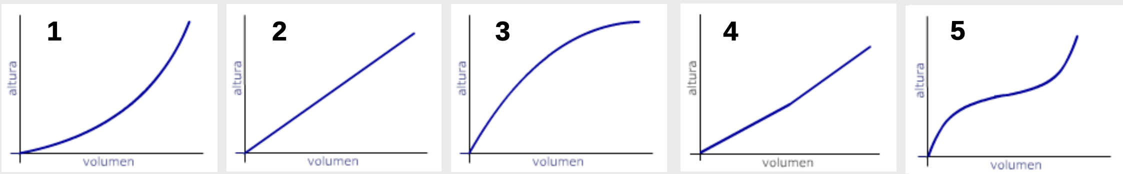
$$TVM[-5,-2]=\frac{-1+7}{-2+5}=\frac{6}{3}=2$$

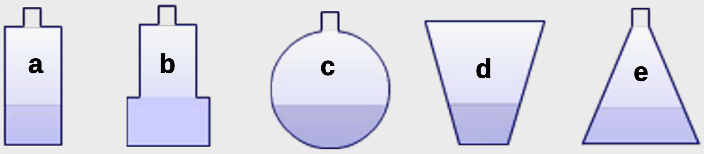
b) y=0,5x+3

$$TVM[1,3]==\frac{4{,}5-3{,}5}{2}=0{,}5$$

$$TVM[-3,0]=\frac{3-1{,}5}{3}=0{,}5$$

10. As gráficas representan como enchen dos distintos recipientes, que gráfica corresponde a cada un? ***Volume*

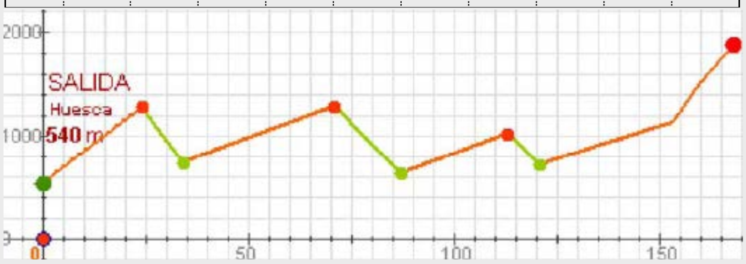




a → 2
b → 4
c → 5
d → 3
e → 1

11. Lembra a función que daba o "perfil" dunha etapa da Volta, que viches no primeiro capítulo, a) escribe os intervalos de crecemento ou decrecemento; b) En que punto quilométrico se alcanzan os máximos relativos?, que valor toman?, e os mínimos?; c) Hai máximo ou mínimo absoluto? ***Saída*

km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882



a)
Crecente:
(0,24)U(34,71)U(87,113)U(121,168)
Decrecente:
(24,34)U(71,87)U(113,121)

b)
MÁX: x=24, y=1280
x=71, y=1290
x=113, y=1020
MÍN: x=34, y=740
x=87, y=630
x=121, y=720

c)
Neste caso a función ten máximo e mínimo absolutos, que se alcanzan nos extremos do dominio, mín en x=0 de valor 540 m, máx en x=168 de valor 1882 m.

Para practicar

1. Considera a función que a cada nº lle asigna o seu cadrado menos 1. Escribe a súa expresión analítica e calcula a imaxe de -1, 1 e 2. Calcula tamén os cortes cos eixes.

2. Considera a función que a cada nº lle asigna á súa metade máis 3. Escribe a súa expresión analítica e calcula a imaxe de -1, 1 e 3. Calcula tamén os cortes cos eixes.

3. Considera a función que a cada nº lle asigna o seu dobre menos 5. Escribe a súa expresión analítica e calcula a imaxe de -2, -1 e 1. Calcula tamén os cortes cos eixes.

4. Calcula o dominio das seguintes funcións:

a) $f(x)=-2x^2+5x-6$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{2x-4}$

c) $f(x)=\sqrt{-4x^2+12}$

d) $f(x)=\sqrt{4x^2+20}$

e) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-4}}$

5. Estuda a continuidade das seguintes funcións:

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{-x}{x+3}$

6. Estuda a continuidade das seguintes funcións nos puntos que se indica:

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$ en $x=1$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & x\le 0 \\ x+2 & x>0 \end{cases}$ en $x=0$

c) $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\le -1 \\ 4 & x>-1 \end{cases}$ en $x=-1$

d) $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\le -1 \\ 4 & x>-1 \end{cases}$ en $x=-1$

7. Estuda a simetría das funcións:

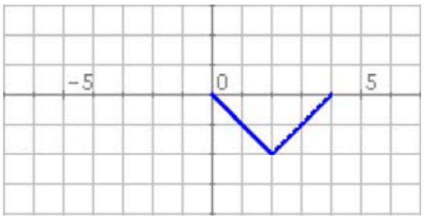
a) $f(x)=x^3+2x$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{5x^2}$

c) $f(x)=2\sqrt{x^2+1}$ d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

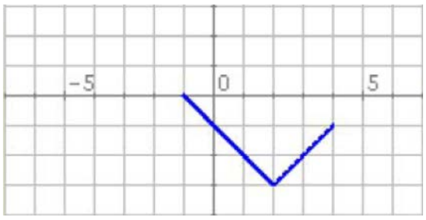
e) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{2x}$ f) $f(x)=x^4-3x^2-3$

8. En cada caso a gráfica representa un tramo ou período dunha función periódica, representa outros tramos, indica o período e calcula a imaxe do punto de abscisa que se indica:

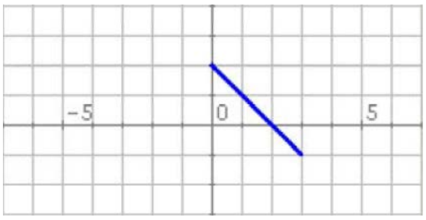
a) f(-2)



b) f(-3)

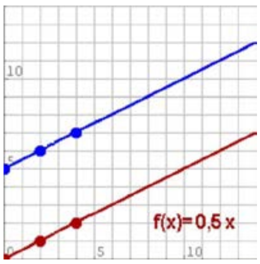


c) f(-1)

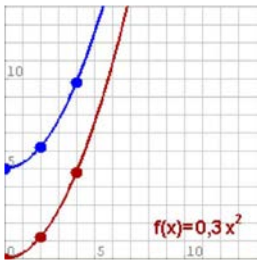


9. Calcula as TVM das funcións da gráfica nos intervalos [0,4] e [2,4].

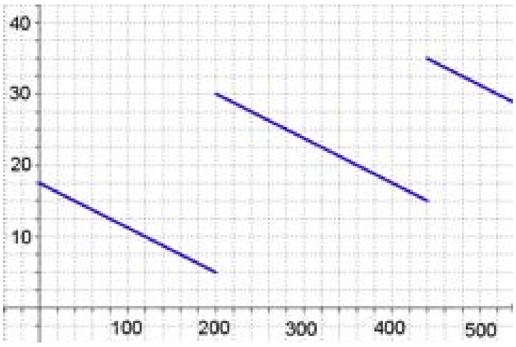
a)



b)



10. O gráfico mostra como varía a gasolina que hai no meu coche durante unha viaxe de 520 km por unha autovía.

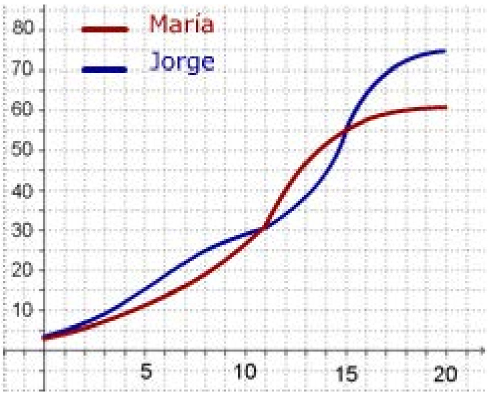


a) Canta gasolina había ao cabo de 240 km? No depósito caben 40 litros, cando estaba cheo máis de medio depósito?

b) En cantas gasolineiras parei?, en que gasolineira botei máis gasolina? Se non parara antes, onde había de quedar sen gasolina?

c) Canta gasolina usei nos primeiros 200 km? Canta en toda a viaxe? Canta gasolina gasta o coche cada 100 km nesta autovía?

11. María e Jorge son dúas persoas máis ou menos típicas. Na gráfica podes comparar como creceu o seu peso nos seus primeiros 20 anos.

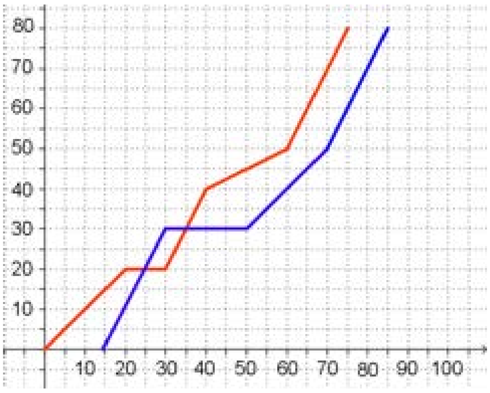


a) Canto pesaba Jorge aos 8 anos?, e María aos 12? Cando superou Jorge os 45 kg?

b) A que idade pesaban os dous igual? Cando pesaba Jorge máis que María?, e María máis que Jorge?

c) Cal foi a media en kg/ano de aumento de peso de ambos os dous entre os 11 e 15 anos? En que período creceu cada un máis rapidamente?

12. O gráfico dá o espazo percorrido por dous coches que realizan un mesmo traxecto.



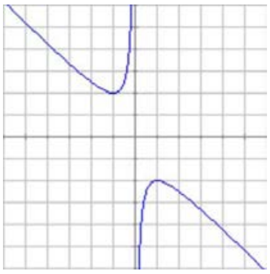
a) Cal é a distancia percorrida? Se o primeiro coche saíu ás 10:00, a que hora saíu o 2º? Canto lle custou a cada un facer o percorrido?

b) Canto tempo e onde estivo parado cada coche? En que km adiantou o 2º ao 1º?, e o 1º ao 2º?

c) Que velocidade media levaron no traxecto total?, en que tramo a velocidade de cada coche foi maior?

13. As gráficas seguintes corresponden ás funcións I e II.

I) $f(x)=x^3-6x^2+9x$ II) $f(x)=-\dfrac{x^2+1}{x}$



Calcula en cada unha:

a) O dominio.

b) Os puntos de corte cos eixes.

c) Os valores de x para os que a función é positiva e negativa.

d) Os intervalos de crecemento e decrecemento.

e) Os máximos e mínimos.

f) Cantos puntos de inflexión teñen?

g) Os intervalos de concavidade e convexidade.

Para saber máis

A primeira función

O primeiro en construír unha función foi **Galileo** (1564-1642). Desde o alto da torre inclinada de Pisa tirou dúas bólas, unha de ferro e outra de madeira e comprobou que a pesar da diferenza de peso, as dúas chegaban ao chan á vez; descubrira a lei de caída dos corpos.

Continuando o seu estudo e empregando un curioso aparello, comprobou que o espazo percorrido depende do cadrado do tempo, escribindo a primeira función da historia. Pulsando aquí podes ler máis sobre o tema.

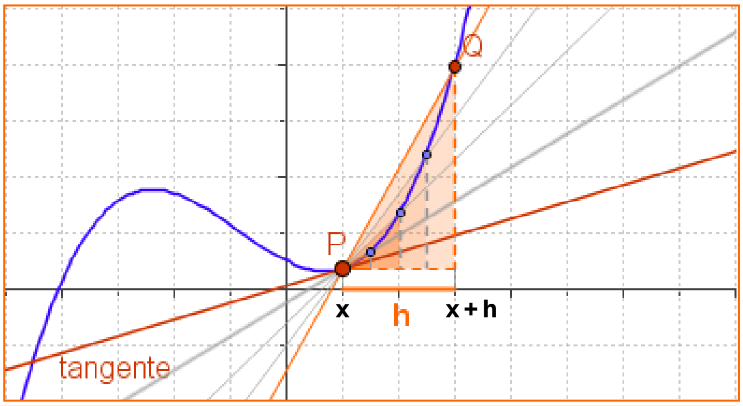
A primeira definición formal de función débese a **Euler**, quen no libro *Introductio in analysis infinitorum*, publicado en 1748, di:
"Unha función dunha cantidade variable é unha expresión analítica composta de calquera maneira a partir da cantidade variable e de números ou cantidades constantes".
En 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, volve sobre o tema achegándose máis á que hoxe utilizamos.

Unha función curiosa

A chamada función de Dirichlet, é a que a cada número real lle asigna o 1 se é racional e o 0 se é irracional. É descontinua en todos os seus puntos.

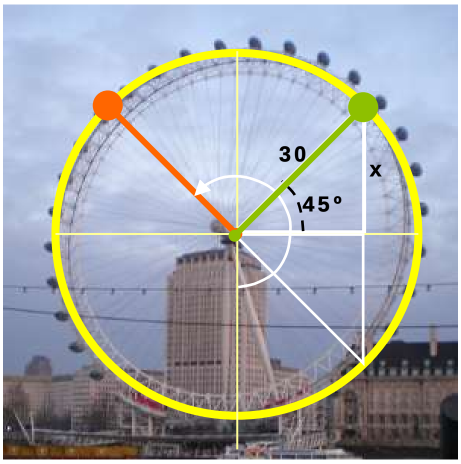
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R - Q \end{cases}$$

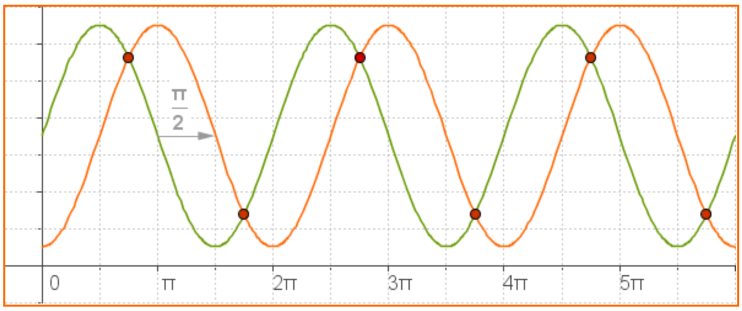
Tanxente, taxa de variación media e derivada



Cando o punto P→Q, a recta secante PQ tende á recta **tanxente** á curva y=f(x) en P. A pendente da secante é a TVM[P,Q] que tende á da tanxente.
É a **derivada** da función que estudarás en cursos posteriores.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

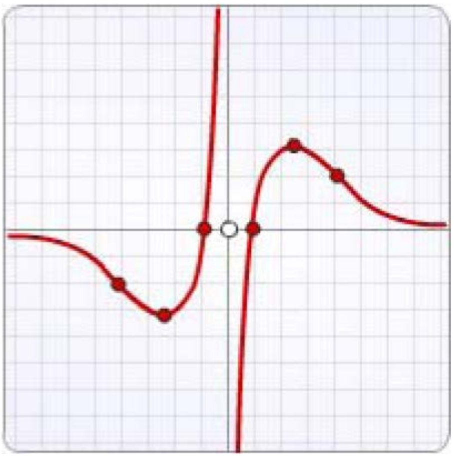




Observa as dúas gráficas, ambas funcións son periódicas de período 2π, a gráfica verde está desfasada π/2 respecto á laranxa; fíxate onde alcanzan os máximos e os mínimos. Cando coinciden as dúas gráficas, a que altura están?,
x=r·sen 45º=21,21 m; 1) 35-21,21=13,79 2)35+21,21=56,21

Lembra o máis importante

- Unha **función** é unha relación entre dúas variables x e y, de modo que a cada valor da variable independente, **x**, asócialle un único valor da variable **e**, a dependente.
- O **dominio** dunha función é o conxunto de todos os posibles valores que pode tomar x.
- A **gráfica** dunha función é o conxunto de puntos **(x,f(x))** representados no plano.



- Unha función é **continua** se pode representarse cun só trazo. É **descontinua** nun punto se presenta un "salto" ou non está definida nese punto.
- Unha función é **periódica** de período t, se a súa gráfica se repite cada t unidades, f(x+t)=f(x).
- Unha función é **simétrica** respecto ao eixe OY, función par, se f(x)=f(-x); e é simétrica respecto da orixe, función impar, se f(-x)=-f(x).

Dominio
Todos os reais excepto o 0

Continuidade
Non é continua, en 0 presenta unha descontinuidade de salto infinito.

Simetría
É simétrica respecto da orixe de coordenadas, función impar.

Cortes cos eixes
Ao eixe de abscisas en (-1,0) e (1,0); non corta o eixe de ordenadas.

Crecemento e decrecemento
É crecente en (-∞, -2,5)U(2,5 ,+∞)
E decrecente en (-2,5 ,0)U(0, 2,5)

Máximos e mínimos
Máximo en (2,5 ,3);
Mínimo en (-2,5 ,3)

Concavidade e convexidade
Puntos de inflexión
É cóncava en (-∞, -3)U(0 , 3)
E convexa en (-3 ,0)U(3, +∞)
(-3,0) e (3,0) son puntos de inflexión.
En x=0 cambia a concavidade pero non hai punto de inflexión xa que non é do dominio.

- A **taxa de variación** dunha función entre dous puntos é a diferenza: $\mathbf{TV[x_1,x_2]=f(x_2)-f(x_1)}$
A **taxa de variación media** é:

$$\mathrm{TVM}[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Unha función é **crecente** nun intervalo, cando dados dous puntos calquera do mesmo
    - Se $x_1<x_2$ entón $f(x_1)<f(x_2)$

  E é **decrecente**
    - Se $x_1<x_2$ entón $f(x_1)>f(x_2)$
- Unha función continua nun punto x=a, presenta un **máximo** relativo, se á esquerda do dito punto é crecente e á dereita é decrecente. Se, polo contrario, é decrecente antes e crecente despois hai un **mínimo** relativo.
- A gráfica dunha función pode ser **cóncava** (cara abaixo) ou **convexa** (cara arriba). Os puntos do dominio nos que cambia a concavidade, chámanse **puntos de inflexión**.

Auto-avaliación

1. Calcula a imaxe de x=0 na función:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ 5 & x>3\end{cases}$$

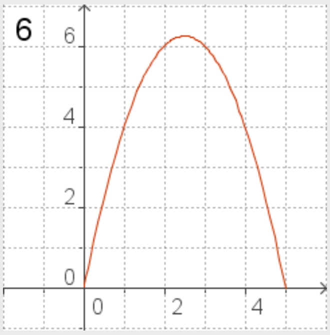
2. Calcula o dominio da función:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$$

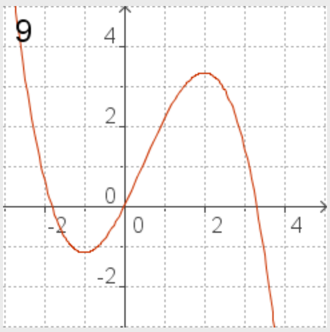
3. Cal dos puntos seguintes: (1,-2) (3,-15) (4,-26) non pertence á gráfica da función $f(x)=-x^2-3x+2$?

4. Calcula os puntos de corte cos eixes coordenados da recta $y=-0,25x-0,75$.

5. Se $y=f(x)$ é unha función impar e $f(3)=-2$, canto vale $f(-3)$?



6. A gráfica mostra o primeiro tramo dunha función periódica de período 5 e expresión $f(x)=-x^2+5x$ $(0\le x<5)$. Calcula f(28).

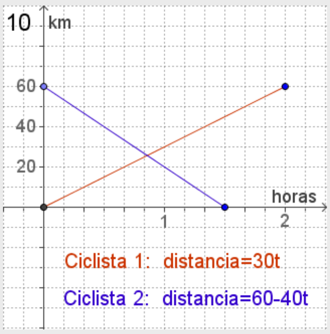


7. Descubre o valor de a para que a función sexa continua en x=3.

$$f(x)=\begin{cases}2x+k & x\le 3\\ 6 & x>3\end{cases}$$

8. Calcula a TVM[-3,0] da función $f(x)=-0,25x^2-3x+1$.

9. Determina o intervalo en que a función da gráfica é crecente.



10. Un ciclista sae dun punto A cara a outro B distante 60 km a unha velocidade constante de 30 km/h. Á vez outro ciclista sae de B en dirección a A, a 40 km/h. Observa a gráfica e calcula a cantos km do punto A se cruzan na estrada.

Solucións dos exercicios para practicar

1. $f(x)=x^2-1$ $f(-1)=0$, $f(2)=3$, $f(1)=0$
Corte OY: -1 Corte OX: 1 e -1

2. $y=\frac{x}{2}+3$
$f(-1)=2,5$ $f(1)=3,5$ $f(3)=4,5$
Corte OY: 3 Corte OX: -6

3. $f(x)=2x-5$
$f(-2)=-9$, $f(-1)=-7$, $f(1)=-5$
Corte OY: -5 Corte OX: 2,5

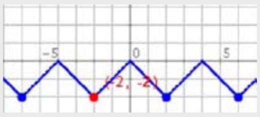
4. a) É un polinomio, $Dom(f)=\mathbb{R}$
b) Todos os reais excepto o 2
c) $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$
d) Todos os reais
e) $(2, +\infty)$

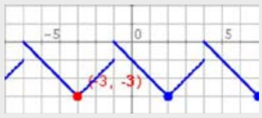
5. a) É descontinua en x=3
b) É descontinua en x=-3

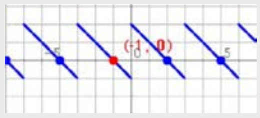
6. a) Descontinua en 1.
á esq.: 3; á der.: 1
b) Continua en 0.
á esq.: 2; á der.: 2
c) Continua en -1.
á esq.: 4; á der.: 4
c) Continua en -1.
á esq.: 4; á der.: 4

7. a) e) son impares; b) c) e f) son pares; d) non é par nin impar

8. a) TVM[0,4]=TVM[2,4]=0,5
b) TVM[0,4]=1,2; TVM[2,4]=1,8

9. a)


b)


c)


10. a) 27,5 litros; entre os km 200 e 360 e do 440 ata o 520.
b) En dúas, unha no km 200 e outra no 440; botei máis na 1ª; aos 280 km
c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km

11. a) J. 25 kg, M. 35 kg ; aos 14 anos
b) aos 11 (30 kg) e aos 15 (55 kg)
J máis que M: ata os 11 e desde os 15;
M máis que J: dos 11 a 15
c) 25kg; 6,25 kg/ano; M entre os 11 e 12 (10 kg/ano); J entre os 12-14 (10 kg/ano)

12. a) 80 km; ás 10:15; 75 e 70 min
b) 10 min en km 20, 20 min en km 30; en o km 20 e en 30 respectivamente.
c) 64 km/h e 68,6 km/h; 1º: min 60-75
2º: min 15-30 e min 70-85

13. I) a) $\mathbb{R}$; b) (0,0)(3,0)
c) e>0 $(0,+\infty)$; e<0 $(-\infty,0)$;
d) crec: $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, decrec: (1,3);
e) máx x=1, mín x=3;
f) Un; conc: $(-\infty,2)$ conv: $(2,+\infty)$
II) a) $\mathbb{R}$-{0}; b) Non corta
c) e<0 $(0,+\infty)$; e>0 $(-\infty,0)$;
d) decrec: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, crec: $(-1,0)\cup(0,1)$;
e) max x=1, mín x=-1;
f) Ningún; conv: $(-\infty,0)$ conc: $(0,+\infty)$

Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1. f(0)= –1
2. $\mathbb{R}$ - { 2, -2}
3. (3, -15)
4. (0, -0,75) (-3,0)
5. f(-3)=2
6. f(28)=f(3)=6
7. k=0
8. TVM[-3,0] = -2,25
9. (-3, 1)
10. A partir de 4,25 min a A.