11 Funciones racionales, exponenciales y logarítmicas

Contenidos

1. Funciones racionales
   Función de proporcionalidad inversa
   Las asíntotas
   Otras funciones racionales

2. Funciones exponenciales
   Características
   Crecimiento exponencial
   Aplicaciones

3. Funciones logarítmicas
   Función inversa de la exponencial
   Función logarítmica
   Logaritmos

Objetivos

- Conocer las características de la función de proporcionalidad inversa y los fenómenos que describen.
- Hallar las asíntotas de una hipérbola.
- Reconocer y representar funciones exponenciales.
- Aplicar las funciones exponenciales al interés compuesto y otras situaciones.
- Calcular el logaritmo de un número.
- Interpretar las gráficas de las funciones logarítmicas.

Autor: Xosé Eixo Blanco

Antes de empezar

Investiga

Benjamin Franklin, famoso científico y estadista, dejó un legado de 1000 libras a las ciudades de Boston y Filadelfia para que se prestasen a jóvenes aprendices al 5% anual.

Según Franklin al cabo de 100 años se habrían convertido en 131000 libras, de las cuales 100000 serían para obras públicas y las 31000 restantes volverían a utilizarse como préstamos otros 100 años. ¿Calculó bien?

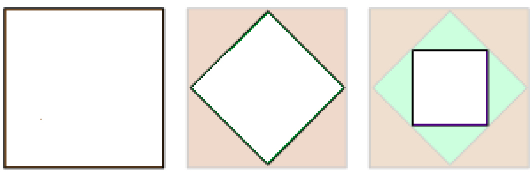
En la escena puedes ver la definición de Progresión Geométrica y varios ejemplos.

Pulsa el botón para detener la explicación
Pulsa el botón para reanudar la explicación
Pulsa los botones para retroceder / avanzar más rápidamente

EJERCICIO 1: Completa lo que falta en los siguientes recuadros:

Una **progresión geométrica** está constituida por una ___________________________ en la que cada uno de ellos se obtiene _________________________ el anterior por una constante denominada ___________________________________.

Ejemplo 1

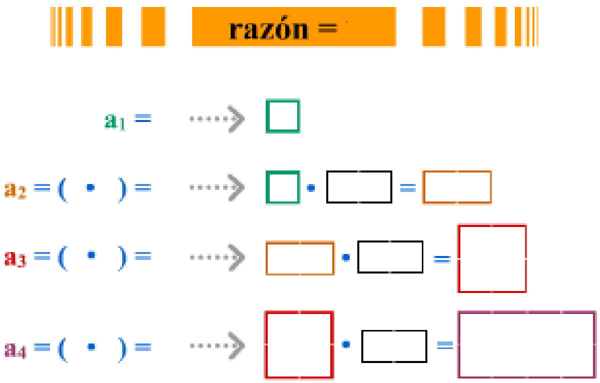


$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$

$a_2 = (a_1 \cdot \quad)$ $a_3 = (a_2 \cdot \quad)$

razón =

Ejemplo 2



Pulsa para ir a la página siguiente.

1. Funciones racionales

1.a. Función de proporcionalidad inversa

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

EJERCICIO 1: Completa.

La **función de proporcionalidad inversa** relaciona _________________________________ ___________________. Su expresión algebraica es:

$$y = \frac{\quad}{\quad}$$

Su gráfica es una ____________________.

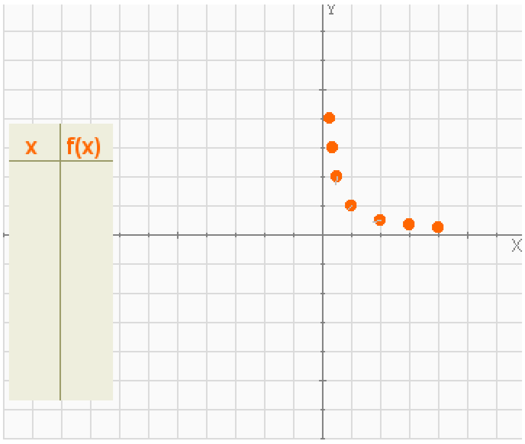
EJERCICIO 2: Completa.

- El **dominio** y el **recorrido** son ____.
- Es una función _______: ______________________
- Si **k>0** la función es _____________ y su gráfica aparece en los cuadrantes_________.
- Si **k<0** la función es _____________ y su gráfica está en el _________ cuadrante.

En la escena puedes ver en primer lugar una animación en la que se construye la gráfica de la función $f(x) = \frac{k}{x}$ para k = 1.

Completa la tabla de valores y el dibujo en este sistema de coordenadas cartesianas:

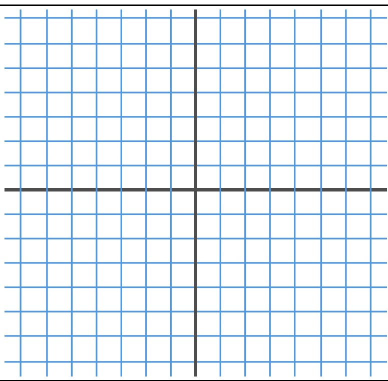
Al finalizar puedes variar el valor de k y observar las gráficas correspondientes.



Representa en los siguientes recuadros las gráficas que se indican:

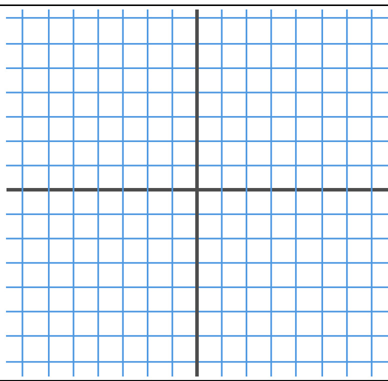
$f(x) = \frac{2}{x}$

x	f(x)



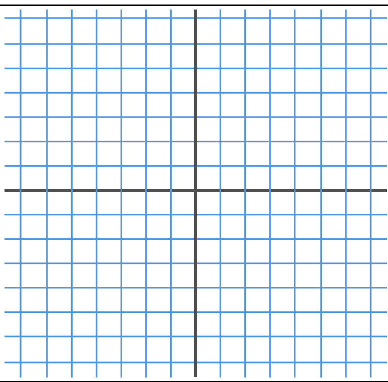
$f(x) = -\frac{1}{x}$

x	f(x)



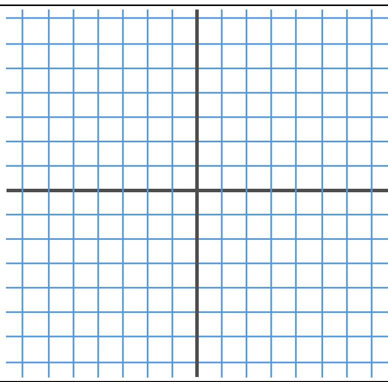
$f(x) = \frac{4}{x}$

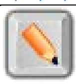
x	f(x)



$f(x) = -\frac{4}{x}$

x	f(x)



Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios. Aparece una escena en la que se repasa el concepto de magnitudes inversamente proporcionales.

Contesta:

Cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales, si tomamos dos cantidades correspondientes, ¿qué es lo que se mantiene constante? : ___________________________

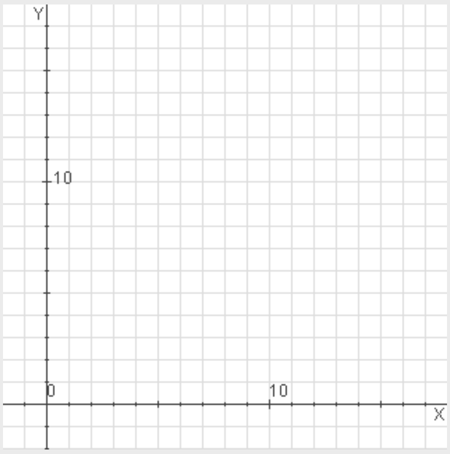
Pulsando en los botones que aparecen en ese cuadro puedes acceder a tres ejercicios diferentes. Resuélvelos en los siguientes recuadros y después pulsa el botón “Comprobar”.

EJERCICIOS

1 Observa la gráfica de la figura. Arrastra el punto naranja para ver como aparecen distintos rectángulos.
(Dibújala en los ejes de la derecha fijándote bien en la ecuación y en los puntos por los que pasa).

¿Cómo es el área de todos esos rectángulos? _______________

¿Cuánto mide? _____________



2 La tabla corresponde a cantidades inversamente proporcionales, complétala y escribe la expresión algebraica de la función y = f(x).

y =

x	f(x)

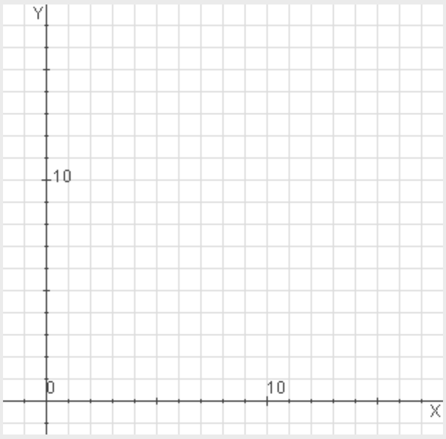
3 Según la Ley de Boyle-Mariotte, la presión que ejerce un gas y el volumen que ocupa son inversamente proporcionales. A 25º determinada cantidad de gas ejerce una presión ____ atmósferas y ocupa un volumen de ____ litros.

a) ¿Qué volumen ocupará cuando la presión ejercida sea de 1 atmósfera?

b) ¿Qué presión ejercerá cuando el volumen sea ___ litros?

Escribe la función que relaciona:
presión → volumen

Dibuja su gráfica →



Pulsa para ir a la página siguiente.

1.b. Las asíntotas

Observa la escena de la derecha y lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

EJERCICIO 1: En la escena de la derecha observa la animación en la que se ve como se comportan los valores de x e y en la gráfica de la función f(x) = 1/x.

Contesta:	RESPUESTAS
¿Qué ocurre con los valores de y = f(x) a medida que los valores de x se van aproximando 0 por la derecha ($x \to 0^+$)?	
¿Qué ocurre con los valores de y = f(x) a medida que los valores de x se van aproximando 0 por la izquierda ($x \to 0^-$)?	
¿Qué ocurre con los valores de y = f(x) a medida que los valores de x van siendo cada vez más grandes, es decir cuando tienden a “más infinito” ($x \to +\infty$)?	
¿Qué ocurre con los valores de y = f(x) a medida que los valores de x tienden a “menos infinito” ($x \to -\infty$)?	

EJERCICIO 2: Contesta.	RESPUESTA
¿Cuándo decimos que una recta es asíntota de una función?	

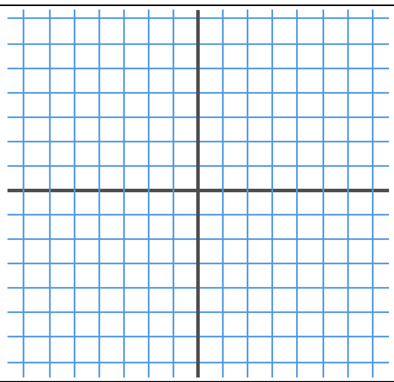
EJERCICIO 3: Completa.

- **Asíntotas verticales.**
  La recta **x=a** es una asíntota vertical de la función y = f(x) si se verifica que ______
  ____.
- **Asíntotas horizontales.**
  La recta **y=b** es una asíntota horizontal de la función y = f(x) si se verifica que _____
  ____.

Representa en los siguientes recuadros las gráficas que se indican:

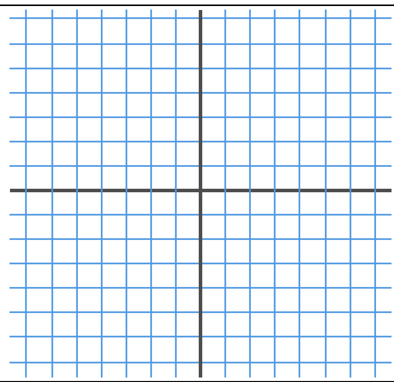
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

x	f(x)
3	
2,5	
2,1	
1	
1,5	
1,9	



$f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ ¡ Observa que x–(–3)=x+3 !

x	f(x)
-4	
-3.5	
-3.1	
-2	
-2.5	
-2.9	



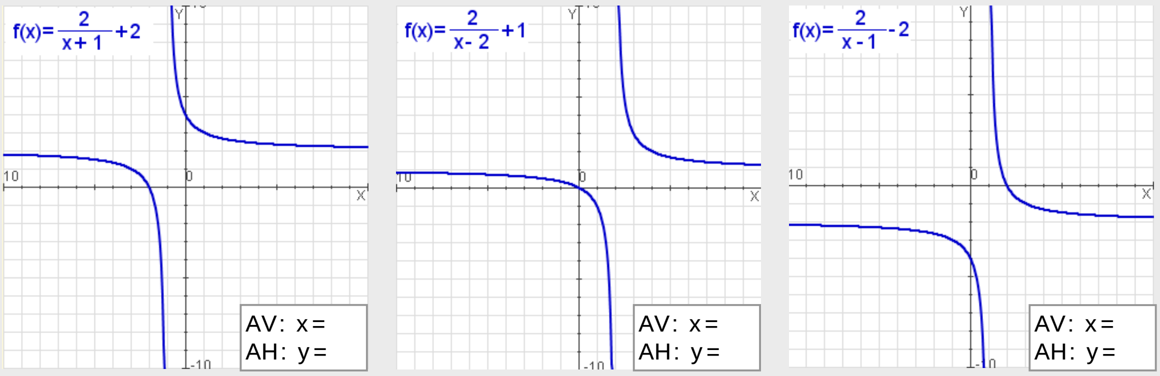
Pulsa el botón para hacer unos ejercicios. En la escena aparece una función para calcular sus asíntotas. Puedes ayudarte de las rectas verde y naranja para localizarlas.

Completa la tabla siguiente con 4 de las funciones y sus correspondientes asíntotas:

Función	A.V.	A.H.	Función	A.V.	A.H.
$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$			$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$		
$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$			$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$		

EJERCICIOS

4. En las siguientes funciones, dibuja las asíntotas y escribe su ecuación.



Pulsa para ir a la página siguiente.

1.c. Otras funciones racionales

Observa la escena de la derecha y lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

EJERCICIO 1: Completa.

Las **funciones racionales** son aquellas que su expresión algebraica es ________________
____

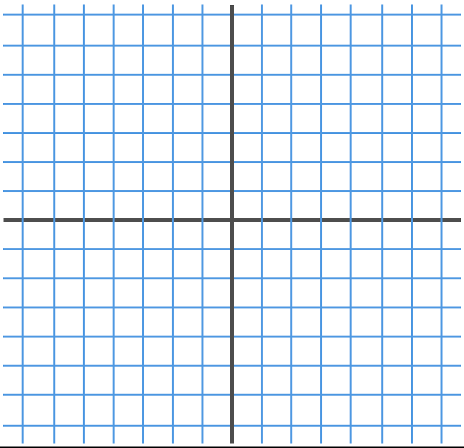
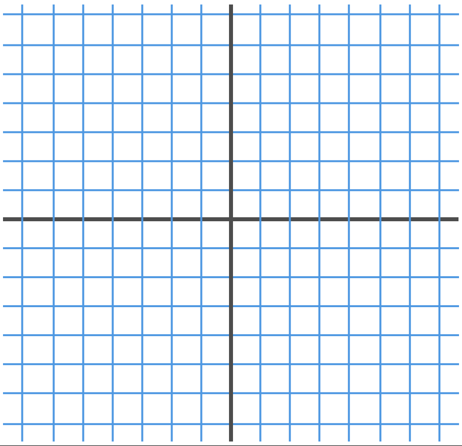
$$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$$

EJERCICIO 2: Completa.

- Su **dominio** son _______________________ excepto ___________________________.
- Para calcular el punto de corte con el eje OY ___________.
- Para calcular los puntos de corte con el eje OX ________________________________.

En la escena puedes ver cómo se calculan las asíntotas y los puntos de corte en varios ejemplos con funciones que son cociente de dos polinomios de grado 1.

Completa en los siguientes recuadros dos de los ejemplos que aparecen en la escena.

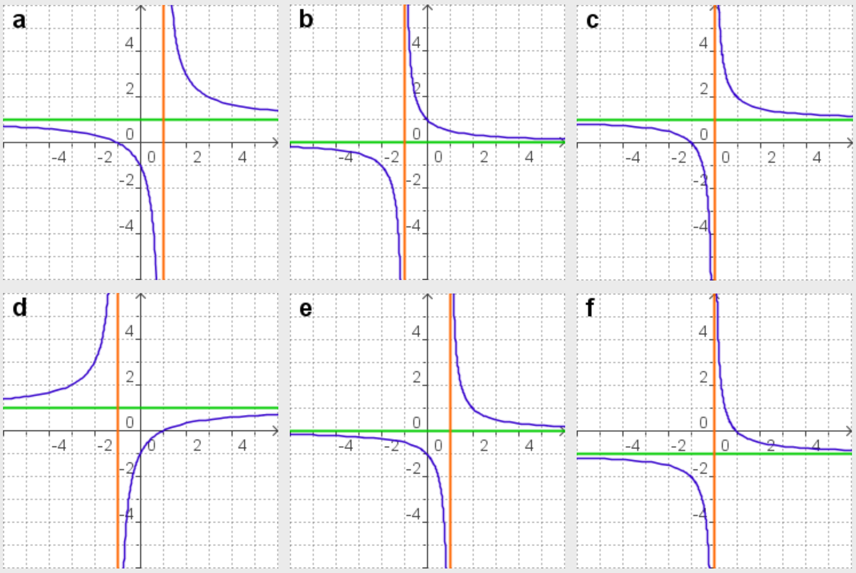
f(x) = ______	f(x) = ______
Asíntota vertical: Operación para calcular la asíntota horizontal: Asíntota horizontal:	Asíntota vertical: Operación para calcular la asíntota horizontal: Asíntota horizontal:
<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table> 	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table> 

Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

En la escena aparecen cinco funciones y cinco gráficas. Arrastra cada ecuación al lugar en el que está la gráfica correspondiente y pulsa **Comprobar** para ver si lo has hecho bien. Repite el ejercicio un mínimo de dos veces sin fallos.

EJERCICIOS

5. Decide qué gráfica corresponde a cada función:



1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ →

2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ →

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ →

4) $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ →

5) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ →

6) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ →

Pulsa para ir a la página siguiente.

2. Funciones exponenciales

2.a. Características de la función exponencial

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y en la escena varía el valor de "a" y pulsa "**animar**" para observar cómo se van obteniendo los puntos de la función y su correspondiente representación gráfica.

EJERCICIO 1: Completa.

La **función exponencial** es de la forma f(x) = con **a** un número real positivo.

EJERCICIO 2: Completa.

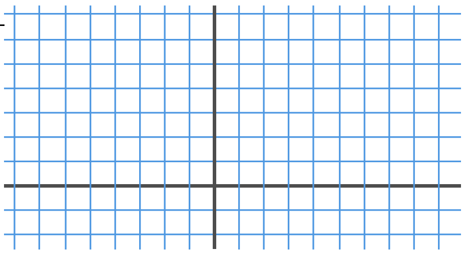
- El **dominio** son _________________ y el **recorrido** son _______________________.
- Es **continua** en _______________________.
- Si **a>1** la función es __________________________________.
- Si **0<a<1** la función es _____________________.
- Corta al eje OY en el punto **(,).**
- El eje OX es ______________________.

La función es **inyectiva**, es decir si $a^n=a^m$ entonces $n=m$

Representa en los siguientes recuadros las gráficas que se indican:

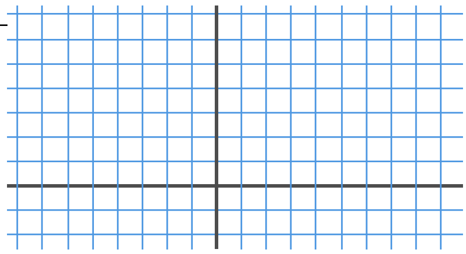
f(x) = 2^x

x	f(x)



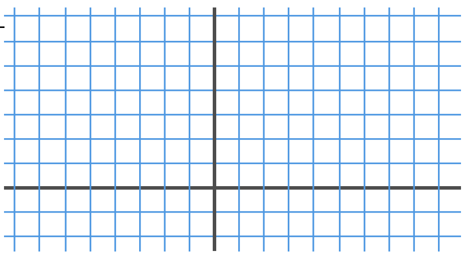
f(x) = 3^x

x	f(x)



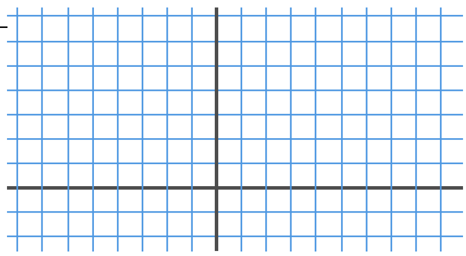
f(x) = $(0,5)^x$

x	f(x)



f(x) = $(0,25)^x$

x	f(x)



Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Aparece una escena en la que verás otras funciones exponenciales.
Por ejemplo, el caso en el que multiplicamos por un número "**k**" y el caso en el que sumamos una constante "**b**". Es decir, veremos las funciones exponenciales del tipo: $\mathbf{f(x) = k{\cdot}a^x + b}$

Pulsando en los botones que aparecen en ese cuadro puedes acceder a tres ejercicios diferentes. Resuélvelos en los siguientes recuadros y después pulsa el botón "Comprobar".

1 Funciones exponenciales de la forma:

$$\mathbf{f(x) = k \cdot a^x}$$

Ejemplos:

Con base mayor que 1: $\mathbf{f(x)} = \quad \cdot \quad ^{\mathbf{x}}$

Con base positiva menor que 1: $\mathbf{f(x)} = \quad \cdot \quad ^{\mathbf{x}}$

Punto de corte con OY: (,)

2 Funciones exponenciales de la forma:

$$\mathbf{f(x) = a^x + p}$$

Ejemplos:

Con base mayor que 1

Con p > 0 : $\mathbf{f(x)} = \quad ^{\mathbf{x}} +$

Con p < 0 : $\mathbf{f(x)} = \quad ^{\mathbf{x}} -$

Punto de corte con OY: (,)

Con base positiva menor que 1

Con p > 0 : $\mathbf{f(x)} = \quad ^{\mathbf{x}} +$

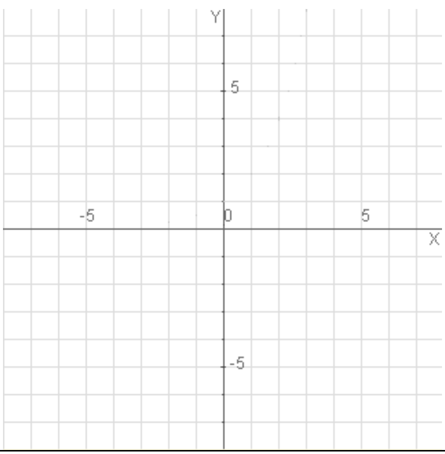
Con p < 0 : $\mathbf{f(x)} = \quad ^{\mathbf{x}} -$

Asíntota horizontal: y =

3 Representa dos de las funciones que aparecen en este apartado, completando también la tabla de valores:

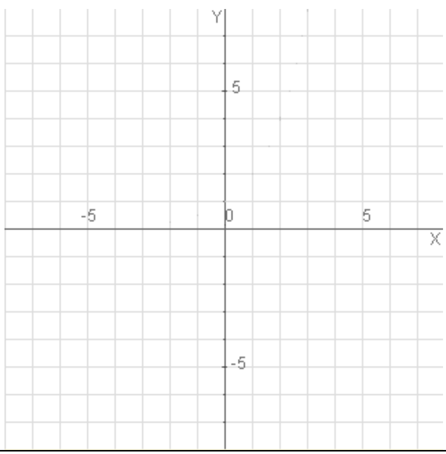
f(x) =

x	f(x)



f(x) =

x	f(x)



Pulsa para ir a la página siguiente.

2.b. Crecimiento exponencial

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

La función exponencial se presenta en multitud de fenómenos de crecimiento animal, vegetal, económico, etc. En todos ellos la variable es el tiempo. $y=a^t$

EJERCICIO 1: Completa.

En el crecimiento exponencial, cada valor de **y** se obtiene _________________________
____.

y =

Donde:

k es ___________________________

t es ___________________________

a es ____.

Si **0<a<1** se trata de un ________________________________

En la escena aparece el enunciado de un problema. Observa que el crecimiento del cultivo bacteriano (número de bacterias por unidad de tiempo) sigue un crecimiento o decrecimiento exponencial.

EJERCICIO 2:

Varía el valor inicial "**k**" y el factor por el que se multiplica "**a**" y observa las diferentes gráficas que se obtienen. **Contesta**:

	RESPUESTA
¿Para qué valores de "**a**" se tiene un crecimiento exponencial?	
¿Para qué valores de "**a**" se tiene un decrecimiento exponencial?	
¿Cómo es la función para a = 1?	
¿Cuál es el punto de corte con el eje OY?	

Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Aparece un resumen en el que puedes ver las respuestas a las preguntas anteriores. Pulsando en los botones que aparecen en ese cuadro puedes acceder a tres ejercicios diferentes. Resuélvelos en los siguientes recuadros y después pulsa el botón "Comprobar".

1. Escribe la tabla de una función exponencial si para x=___ la función vale ___ y la constante de crecimiento es ___.
¿Cuál es la expresión algebraica?

x	y

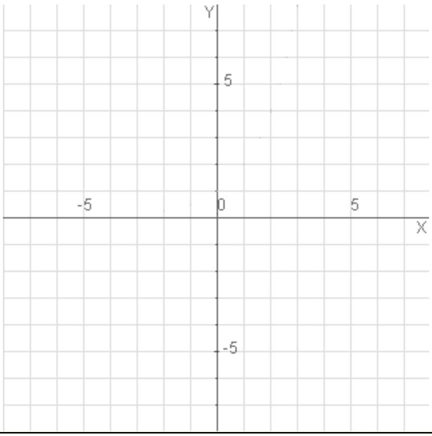
2 La tabla siguiente corresponde a valores de una función exponencial. Complétala y escribe la expresión algebraica de la función y=f(x)?

x	f(x)

3 Representa dos de las funciones que aparecen en este apartado, completando también la tabla de valores:

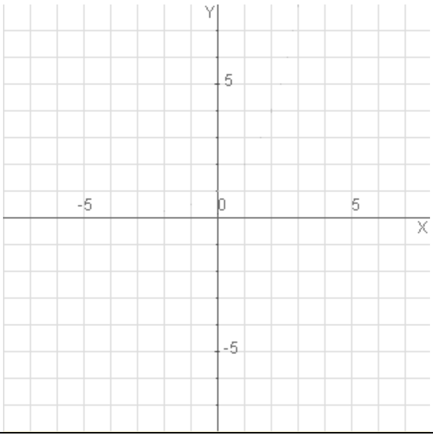
f(x) =

x	f(x)



f(x) =

x	f(x)



Pulsa para ir a la página siguiente.

2.c. Aplicaciones

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

EJERCICIO 1: Contesta.

¿Para qué sirve la **función exponencial**?

EJERCICIO 2:

Ahora puedes resolver el problema del legado de Franklin, planteado al comienzo del tema. Pulsa sobre la imagen.

En la escena de la derecha puedes ver tres aplicaciones: Interés compuesto. Crecimiento de poblaciones. Desintegración radioactiva.

Pulsa sobre **Interés compuesto**

Lee la explicación de la escena y completa lo que falta en el siguiente texto:

Interés Compuesto

En el interés compuesto los intereses producidos por un capital C_0 ______________________ a éste, de tiempo en tiempo, para producir nuevos intereses.
Los intervalos de tiempo, al cabo de los cuales los intereses se acumulan al capital, se llaman ____.

El Capital Final obtenido C_f por un capital inicial C_0 al cabo de t años a interés compuesto del r % anual, se determina por la fórmula:

Si la capitalización no es anual se cambia t por ___ y r por ____donde n es el número de periodos que hay en un año.

Crecimiento Continuo

Cuando los períodos de tiempo se hacen cada vez más pequeños, de manera que los intereses se acumulan al capital en cada instante, se obtiene la fórmula del interés continuo:

EJEMPLO Si colocamos un capital de ____ € al ______ anual, a interés compuesto con abonos cada ___ meses. a) Haz una tabla del capital acumulado en los primeros años. b) Escribe la expresión algebraica del capital acumulado, en función de los años transcurridos. c) ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de ___ años? d) ¿Cuántos años tienen que pasar para tener _____ €?	x | y El rédito por período es: Cada € se convierte por período en: Cada € se convierte por año en: b) y = c) y( ) = d) Continuamos con la tabla Tienen que pasar:

Pulsa "**< volver**" para volver al menú.

Pulsa sobre **Crecimiento de poblaciones**

Lee la explicación de la escena y completa lo que falta en el siguiente texto:

Crecimiento de poblaciones

El crecimiento vegetativo de una población viene dado por ___________________________ ____.
Si inicialmente partimos de una población $\mathbf{P_0}$ que tiene un índice de crecimiento anual **i** (expresado en tanto por uno), la población después de un año será:

Y al cabo e t años será

Crecimiento Continuo

Si se considera el crecimiento continuo:

EJEMPLO Un pueblo tiene ____ habitantes. Se sabe que su población crece a un ritmo del ____ anual. a) Haz una tabla de valores que relacione tiempo y población. b) Escribe la expresión algebraica de la función tiempo población. c) ¿Cuántos habitantes tendrá dentro de ____ años? d) ¿Cuántos años tienen que pasar para que la población sea de aproximadamente ____ habitantes?	x | y b) y = c) y( ) = d) Continuamos con la tabla Tienen que pasar:

Pulsa "**< volver**" para volver al menú.

Pulsa sobre **Desintegración Radioactiva**

Lee la explicación de la escena y completa lo que falta en el siguiente texto:

Desintegración Radioactiva

Las sustancias radioactivas se desintegran _____________________. La cantidad de una cierta sustancia radioactiva que va quedando al pasar el tiempo t, viene dada por

En donde M_0 es la cantidad de sustancia que había en el instante que tomemos como inicial y **a** una constante, 0 < a < 1, que depende de la sustancia en cuestión y de la unidad de tiempo que tomemos.

La rapidez de desintegración de las sustancias radioactivas se mide por el ________________ ______________, que es ____.

EJEMPLO Un gramo de estroncio-90 se reduce a la mitad en 28 años. Si en el año 2000, teníamos ___ gramos y tomamos como origen de tiempo el año 2000. a) Haz una tabla con la cantidad de estroncio que quedará en los años 2000, 2028, 2056, 2084. b) Escribe la expresión algebraica de la función años, masa. c) ¿Cuánto estroncio quedará en el año ________? d) ¿Cuántos años tienen que pasar para que se reduzca a _____ g?	año | x | y x = años que han pasado desde el año 2000 y = cantidad de masa en el año x b) y = c) y( ) = d) Continuamos con la tabla a partir de x = ____ Tienen que pasar:

EJERCICIOS

6. Representa y estudia las funciones

a) $f(x)=4\cdot 2^{x}$

b) $f(x)=2\cdot 3^{-x}+1$

7. Construye una tabla de valores de una función exponencial en cada caso y escribe la expresión algebraica.

a) $f(-2)=2/9$ y constante de crecimiento 3

x	f(x)
-2	**2 / 9**
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $f(0)=3$ y constante de decrecimiento ¼

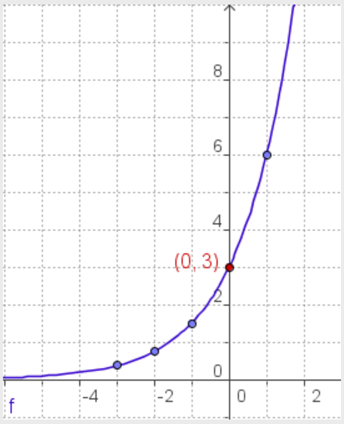
x	f(x)
-2	
-1	
0	**3**
1	
2	
3	

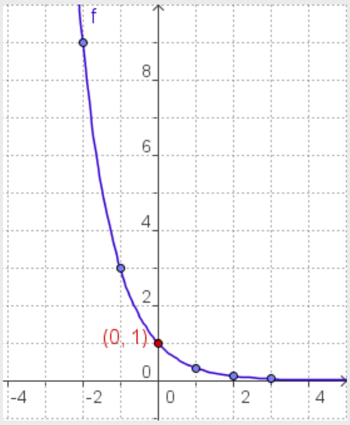
8. La tabla corresponde, en cada caso, a una función exponencial. Escribe la fórmula.

x	f(x)
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27

x	f(x)
-2	25
-1	5
0	1
1	1/5
2	1/25
3	1/125

9. Indica si el gráfico corresponde a una función con crecimiento exponencial o con decrecimiento. Escribe la función.





Pulsa para ir a la página siguiente.

3. Funciones logarítmicas

3.a. Función inversa de la exponencial

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

EJERCICIO 1: Completa.

Dada una función *inyectiva*, y=f(x), se llama ________________ de f a otra función, g, tal que g(y)=x.

En la escena adjunta construimos paso a paso la inversa de la función exponencial. Puedes variar el valor de “a” y pulsar “animar” para observar cómo aparecen las gráficas de dos funciones: La función exponencial y = f(x) = a^x y su inversa x = g(y).

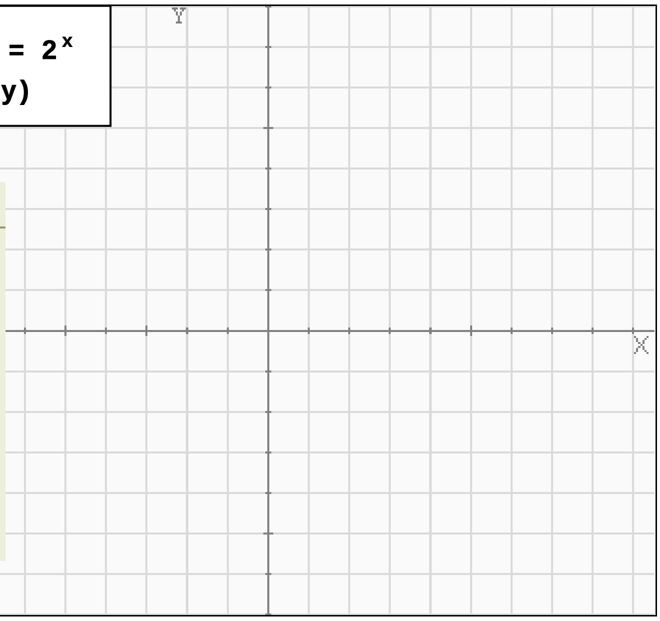
EJERCICIO 2: Completa.

Esta función inversa se llama _______________ y, como puedes observar, es ___________ de la ________________________ con respecto a ________________________________.

Representa a continuación las gráficas de las funciones que se indican, escribiendo en primer lugar la tabla de valores:

F. exponencial: **f(x) = 2^x**
Y su inversa: **x = g(y)**

x	f(x)	g(y)



Pulsa ▶ para ir a la página siguiente.

3.b. La función logarítmica

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

EJERCICIO 1: Completa.

La **función logarítmica** es ____ y se denota:

y = , con a>0 y a ≠ 1.

Observa en la escena de la derecha como construimos su gráfica de forma similar a como lo hicimos con la exponencial. Sus propiedades son "*simétricas*".

EJERCICIO 2: Completa.

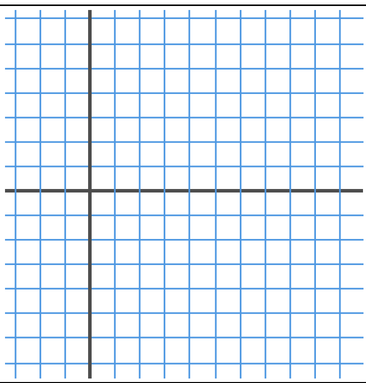
- El **dominio** es _______ y el **recorrido** es _____.
- Es **continua** en ________________________.
- Si **a>1** la función es ___________________________________.
- Si **0<a<1** la función es ______________________.
- Corta al eje OX en el punto **(,).**
- El eje OY es _______________________.

La función es inyectiva: si $\log_a x = \log_a y$ entonces $x=y$

Representa en los siguientes recuadros las gráficas que se indican:

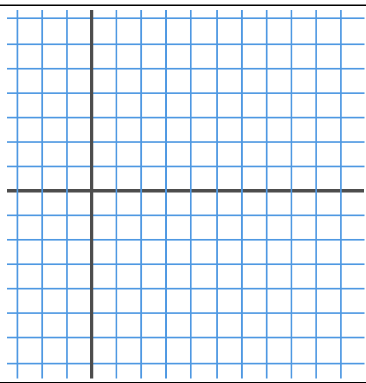
f(x) = $\log_2$ x

x	f(x)



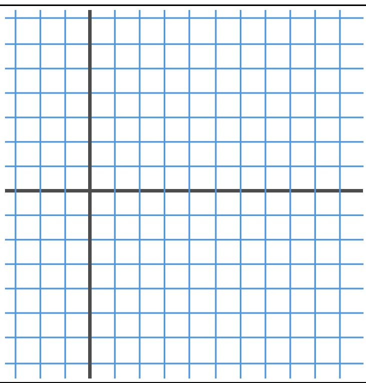
f(x) = $\log_{0,5}$ x

x	f(x)



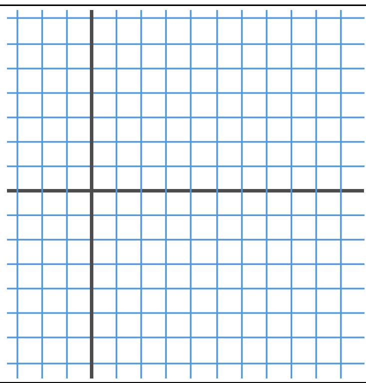
f(x) = $\log_{10}$ x

x	f(x)



f(x) = $\log_{0,1}$ x

x	f(x)



Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Aparece una escena en la que verás otras funciones logarítmicas. Por ejemplo el caso en el que multiplicamos por un número "**k**" y el caso en el que sumamos una constante "**p**". Es decir, veremos las funciones exponenciales del tipo: $f(x) = k \cdot \log_a x$; $f(x) = \log_a x + p$

Pulsando en los botones que aparecen en ese cuadro puedes acceder a tres escenas diferentes. Resuélvelos en los siguientes recuadros y después pulsa el botón "Comprobar".

1 Funciones logarítmicas de la forma: $\mathbf{f(x) = k \cdot \log_a x}$

Varía los valores de "a" y de "k" e indica si la función es creciente o decreciente.

Con base **a > 1**
Si **k>0** ____________________ Si **k<0** ________________________

Con base **0 < a < 1** (Ten en cuenta que $\log_{1/a} x = -\log_a x$)
Si **k>0** ____________________ Si **k<0** ________________________

2 Funciones logarítmicas de la forma: $\mathbf{f(x) = \log_a x + p}$

Varía los valores de "a" y de "k" e indica si la función es creciente o decreciente.

Con base **a > 1**
Si **p>0** ____________________ Si **p<0** ________________________

Con base **0 < a < 1**
Si **p>0** ____________________ Si **p<0** ________________________

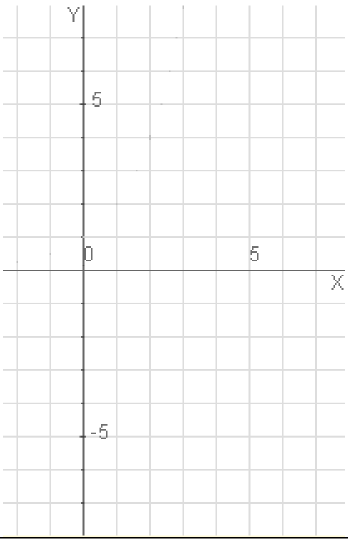
Observamos que:
Al variar p, la función se traslada sobre el eje OY.
Si **p>0** Hacia ________ y si **p<0** Hacia _______

¿Cuál es el punto de corte de la función $\mathbf{f(x) = \log_a x + p}$ con el eje OX? (,)

3 Representa dos de las funciones que aparecen en este apartado, completando también la tabla de valores:

f(x) =

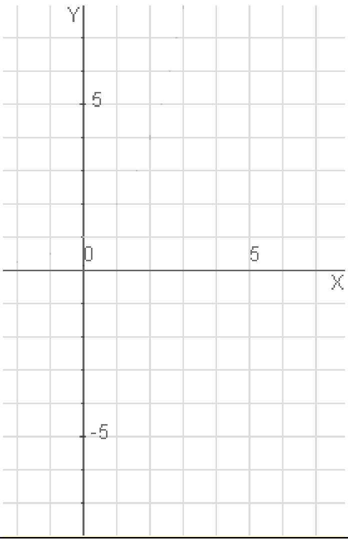
x	f(x)



Dominio:
Recorrido:
Asíntota:
Corte OX:

f(x) =

x	f(x)



Dominio:
Recorrido:
Asíntota:
Corte OX:

Pulsa para ir a la página siguiente.

3.c. Logaritmos

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

EJERCICIO 1: Completa.

Dados dos números reales positivos, a y b ($a \neq 1$), llamamos **logaritmo en base a de b** ____.

EJERCICIO 2: Completa.

La definición anterior indica que las dos igualdades siguientes son equivalentes:

	Equivale a	

Cuando **a=10** hablamos de ____________________________ y no suele escribirse la base.

log100=	porque	

En esta escena de la derecha puedes ver ejemplos y a partir de ellos puedes comprender mejor el concepto de logaritmo. A continuación podrás ver las propiedades de los logaritmos y sus correspondientes demostraciones.
Anota los ejemplos y las propiedades en los espacios siguientes:

Logaritmos de base mayor que 1

Ejemplo 1: [ ] porque [ ]

Ejemplo 2: [ ] porque [ ]

Logaritmos de base positiva menor que 1

Ejemplo 1: [ ] porque [ ]

Ejemplo 2: [ ] porque [ ]

Propiedades de los logaritmos

1) Logaritmo de un producto

Si **b** y **c** son dos números reales positivos, se cumple en cualquier base **a** que:

Demostración

Si llamamos **z** al primer logaritmo, **x** al segundo e **y** al tercero, tenemos:

Por tanto:

2) Logaritmo de un cociente

Si **b** y **c** son dos números reales positivos, se cumple en cualquier base **a** que:

Demostración

Si llamamos **z** al primer logaritmo, **x** al segundo e **y** al tercero, tenemos:

Por tanto:

3) Logaritmo de una potencia

Si **b** es un número real positivo y **c** cualquier número, se cumple en cualquier base **a** que:

Demostración

Si llamamos **z** al primer logaritmo y **x** al segundo, tenemos:

Por tanto:

4) Logaritmo de la unidad y logaritmo de la base

El logaritmo de 1 en cualquier base es ___.
El logaritmo de a en base a es ___.

porque

porque

Logaritmos decimales

(I) Son los más usados y por ese motivo no suele escribirse la base. Es decir, log 3 = $\log_{10}3$

Ejemplo 1:

Ejemplo 2:

Ejemplo 3:

Ejemplo 4:

(II) Para calcular el logaritmo decimal de un número que no sea potencia de 10 tenemos que usar la calculadora. Pero podemos hacernos una idea de su valor aproximado teniendo en cuenta que la función logarítmica de base mayor que 1 es creciente.

Ejemplo 1:	1 < < 10 →	Luego log =
Ejemplo 2:	10 < < 100 →	Luego log =
Ejemplo 3:	100 < < 1000 →	Luego log =

El logaritmo de un número "n" es ____.

El logaritmo nos informa ______________________________.

(III) Si el número es menor que 1 el logaritmo también nos informa de su tamaño:

Ejemplo 1:	1 > > 0,1 →	Luego log =
Ejemplo 2:	0,1 > > 0,01 →	Luego log =
Ejemplo 3:	0,01 > > 0,001 →	Luego log =

El logaritmo de un número "n" indica ____.

Logaritmos con la calculadora

Las calculadoras normalmente permiten calcular dos tipos de logaritmos: Decimales (base = 10) y neperianos o naturales (base = número e).
Si queremos usar la calculadora para obtener logaritmos en cualquier otra base tendremos que recurrir a la **fórmula de cambio de base**:

Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Pulsando en los botones que aparecen en ese cuadro puedes acceder a tres ejercicios diferentes. Resuélvelos en los siguientes recuadros y después pulsa el botón "Comprobar".

1 Escribe un mínimo de 5 enunciados y resuélvelos a mano antes de pulsar "Comprobar"

Ejercicio 1:	
Ejercicio 2:	
Ejercicio 3:	
Ejercicio 4:	
Ejercicio 5:	

2 Sabiendo que el log 2 = 0,301030, calcula a mano el valor de:

log 1,6 =

log 0,125 =

log 40 =

Escribe un mínimo de 5 enunciados y resuélvelos con la calculadora:

Ejercicio 1:	
Ejercicio 2:	
Ejercicio 3:	
Ejercicio 4:	
Ejercicio 5:	

EJERCICIOS

10. Representa y estudia las funciones

a) $f(x)=2\cdot\log_3 x$

b) $f(x)=\log_3 x+1$

11. Calcula x en cada caso aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_6 (1/6) = x$

b) $\log_4 2 = x$

c) $\log_5 125 = x$

d) $\log_{1/8} 1 = x$

e) $\log_3 81 = x$

f) $\log_{1/5} 25 = x$

g) $\log_3 (1/9) = x$

h) $\log_{1/2} (1/16) = x$

12. Sabiendo que log2=0,301030 calcula sin ayuda de la calculadora:

a) log40

b) log1,6

c) log 0,125

13. Con la calculadora halla los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 23{,}721$

b) $\log_3 25678{,}34561$

c) $\log_5 0{,}37906$

d) $\log_7 0{,}37906$

Pulsa para ir a la página siguiente.

Recuerda lo más importante – RESUMEN

(*Completa lo que falta en la descripción de las diferentes funciones*)

Funciones racionales

Son las que su expresión algebraica es el cociente entre dos polinomios.

- Una **función de proporcionalidad inversa**, **y=k/x**, relaciona dos variables ________________________ ________________________.
  - o Su gráfica es una ______________
  - o Es discontinua en __________
  - o Decreciente si ________
  - o Creciente si ______.
- Cuando la gráfica de una función se acerca cada vez más a una recta, confundiéndose con ella, se dice que la recta es una ____________.

¿Qué función se obtiene si se traslada el centro de la hipérbola $y=\frac{3}{x}$ al punto (–3,–2)?

$y = \frac{3}{x \quad} \qquad = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Funciones exponenciales

Son de la forma **y=a^x^**, con a>0.

- Su dominio es _____.
- Es ______________.
- Es creciente si ______________
- Es decreciente si ______________
- Corta al eje OY en (,) y pasa por (,)
- El eje OX es ________________________.

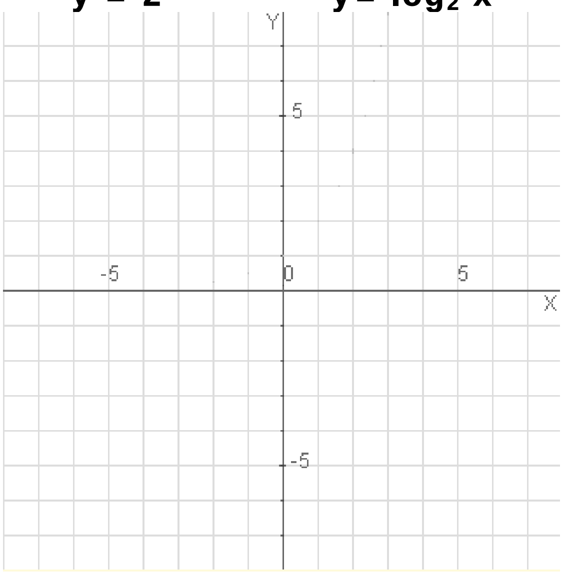
Funciones logarítmicas

Son las que asocian a cada número x su logaritmo en una cierta base, a>0, **y=log$_a$x**.

- Su dominio son ________________________
- Es ______________
- Es creciente si ________
- Es decreciente si ____________.
- Corta al eje OX en (,) y pasa por (,)
- El eje OY es______________________.

Haz la gráfica de las funciones:

$y = 2^x$ **$y = \log_2 x$**



LOGARITMOS

El **logaritmo** en base **a>0** de un número **b>0** es el exponente **x**, a que se ha de elevar a para obtener b.

$\log_a b = x$ es equivalente a ________

PROPIEDADES

1. $\log_a(b \cdot c) =$ ________________
2. $\log_a(b/c) =$ ________________
3. $\log_a b^n =$ ________________

Pulsa para ir a la página siguiente.

Para practicar

Ahora vas a practicar resolviendo distintos EJERCICIOS. En las siguientes páginas encontrarás EJERCICIOS de:

Funciones racionales
Funciones exponenciales
Funciones logarítmicas

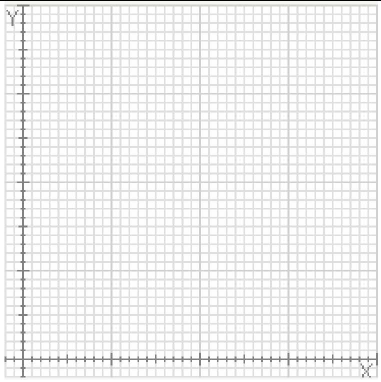
Completa el enunciado con los datos con los que te aparece cada EJERCICIO en la pantalla y después resuélvelo. Es importante que primero lo resuelvas tú y después compruebes en el ordenador si lo has hecho bien.

Funciones racionales.

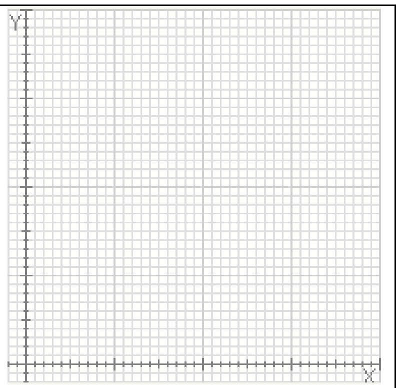
Proporcionalidad inversa (hay tres ejercicios diferentes)

1. Envasamos ___ litros de agua mineral en botellas iguales.

Escribe la función que relaciona el número de botellas y su capacidad. Dibuja la gráfica.

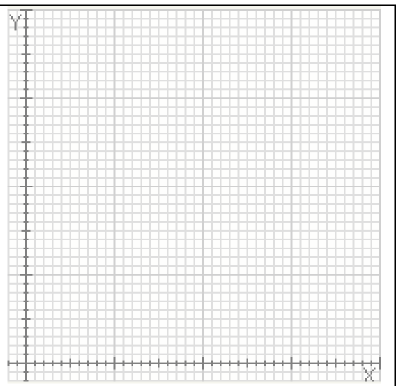


2. Un móvil recorre una distancia de ______ con velocidad constante. Escribe la función velocidad→tiempo, calcula el tiempo invertido a una velocidad de ____ km/h, y la velocidad si el tiempo ha sido ___ horas.



3. Un grifo con un caudal de ___ litros/min. tarda _____ minutos en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si el caudal fuera de ___ litros/min.?

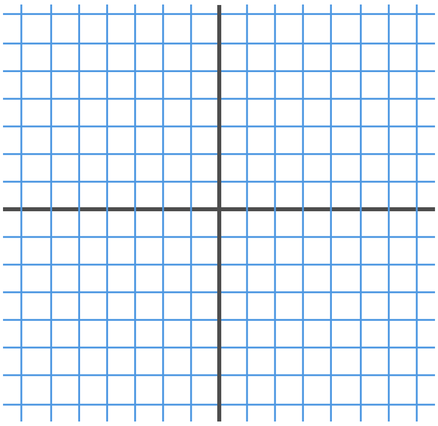
Escribe la función caudal→tiempo.



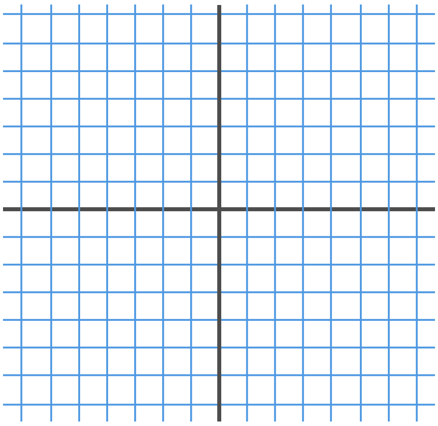
Dibuja la gráfica

4. Calcula las asíntotas y dibuja la gráfica de las funciones:

a) f(x) = ________

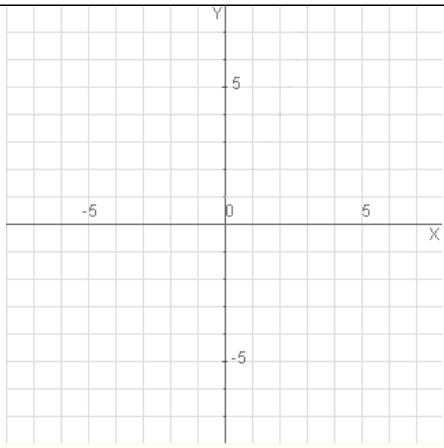


b) f(x) = ________



Escribe la ecuación

5. Escribe la ecuación de la función cuya gráfica es una hipérbola como la de la figura con el centro de simetría desplazado al punto (,   )



Coste por unidad

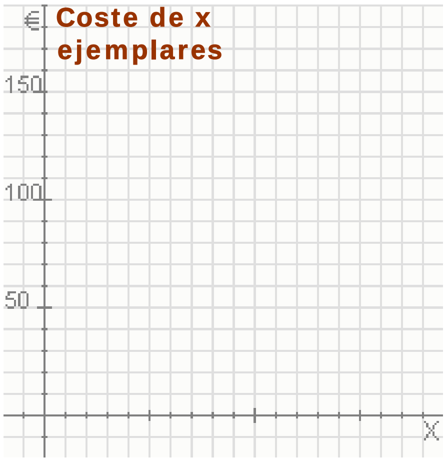
6. Los costes de edición, en euros, de x ejemplares de un libro vienen dados por y=________ (x>0).

¿Cuánto cuesta editar ___ ejemplares?,

¿y ____ ejemplares?

Escribe la función que da el coste por ejemplar.

Por muchos ejemplares que se publiquen, ¿cuál es el coste unitario como mínimo?



Pulsa para ir a la página siguiente.

Funciones exponenciales.

Interés compuesto (hay cinco ejercicios diferentes)

7. ¿En qué se convierte al cabo de ___ años un capital de __________ al ______ anual?

8. Un capital colocado a interés compuesto al ___ anual, se ha convertido en __ años en ______. ¿Cuál era el capital inicial?

9. Un capital de __________ colocado a interés compuesto se ha convertido al cabo de __ años en ___________. ¿Cuál es el rédito (interés anual) a que ha estado colocado?

10. Un capital de __________, colocado a interés compuesto del ____ anual, se ha convertido al cabo de unos años en ________. ¿Cuántos años han transcurrido?

11. ¿Cuántos años ha de estar colocado cierto capital, al ____ anual, para que se duplique?

Decaimiento Radioactivo (hay tres ejercicios diferentes)

12. El periodo de desintegración del Carbono 14 es 5370 años. ¿En qué cantidad se convierten ___ al cabo de _____ años?

13. ¿Cuántos años han de pasar para que una muestra de ____ de C14 se convierta en ____?

(Periodo de desintegración del C14: 5370 años).

14. Una muestra de _____ de una sustancia radioactiva se convierte en ______ en __ años.

¿Cuál es el periodo de desintegración?

Crecimiento de poblaciones (hay dos ejercicios diferentes)

15. El tamaño de cierto cultivo de bacterias se multiplica por _ cada __ minutos. Si suponemos que el cultivo tiene inicialmente __ millones de bacterias, ¿dentro de cuántas horas tendrá ___ millones de bacterias?

16. El tamaño de cierto cultivo de bacterias se multiplica por __ cada ___ minutos, si al cabo de __ horas el cultivo tiene ____ millones de bacterias, ¿cuántas había en el instante inicial?

Ecuaciones exponenciales

Cuando la x está en el exponente

Ejemplo 1	**Ejemplo 2**
Resuelve la ecuación: $25^{2x-3}=125$	Calcula x en $3^x=14$
$25=5^2$ y $125=5^3$, entonces $5^{2(2x-3)}=5^3$ igualando los exponentes $2(2x-3)=3 \Rightarrow x=9/4$	Tomando logaritmos: $\log 3^x=\log 14$ $x\log 3=\log 14$ luego $x=\dfrac{\log 14}{\log 3}=2{,}40$

17. Resuelve ecuaciones exponenciales (escribe 3 enunciados diferentes que aparecen en tu ordenador y resuélvelos antes de comprobar la solución):

a)

b)

c)

Pulsa ▶ para ir a la página siguiente.

Funciones logarítmicas.

Definición de logaritmo (hay tres ejercicios diferentes)

18. Calcula el número cuyo logaritmo en base ___ es ___.

19. ¿En qué base el logaritmo de 0,001 es -3?

20. Calcula mentalmente el logaritmo en base 2 de 32.

Logaritmos decimales

21. Sabiendo que el log2=0,3010 y el log3=0,4771, calcula: (haz al menos 3 diferentes)

a)

b)

c)

Logaritmos con calculadora

22. Utiliza la calculadora para averiguar el valor de: (haz al menos 3 diferentes)

a) Logaritmo en base __ de __________

b) Logaritmo en base __ de __________

c) Logaritmo en base __ de __________

Ecuaciones con logaritmos

Ejemplo

Resuelve la ecuación: $4 \cdot \log x = 2 \cdot \log x + \log 4 + 2$	
$4 \cdot \log x - 2 \cdot \log x = \log 4 + \log 100$ $2 \cdot \log x = \log 400$	$\log x^2 = \log 400$ $x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm 20$

23. Aplicando las propiedades de los logaritmos resuelve las ecuaciones (escribe 4 enunciados diferentes que aparecen en tu ordenador, dos de ecuaciones con una incógnita y otros dos de sistemas de dos ecuaciones):

a)

b)

c)

d)

Pulsa para ir a la página siguiente.

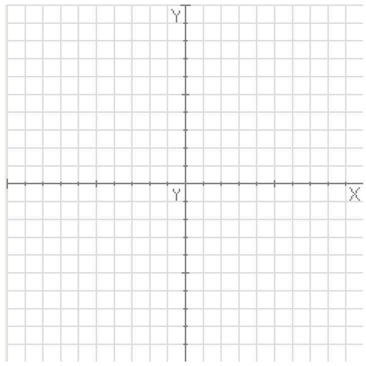
Autoevaluación

Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

1. ¿Cuál es la función de proporcionalidad inversa que a x = ____ le hace corresponder y = ___?

$f(x)=\dfrac{\square}{x}$

2. Escribe la expresión algebraica de la función de la gráfica.



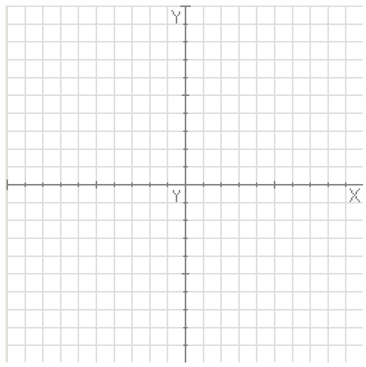
$f(x)=\dfrac{\square}{x}$

3. Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{\quad}{\quad}$.

vertical: $x =$ ____

horizontal: $y =$ ____

4. Escribe la expresión algebraica de la función exponencial de la gráfica

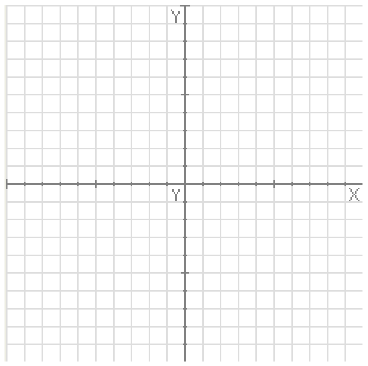


$y = \square^{x}$

5. Calcula en cuánto se convierte un capital de ______ € colocado al ___ anual durante __ años.

6 La población de una especie en extinción se reduce a la mitad cada año. Si al cabo de __ años quedan ____ ejemplares, ¿cuál era la población inicial?

7 Escribe la expresión de la función logarítmica que es la inversa de la exponencial de la gráfica.



f(x)=log__ x

8 Calcula log

9 Sabiendo que log __ = _______ y sin usar la calculadora, calcula log ________

10 Con la calculadora halla el valor de x en

____

Redondea el resultado a centésimas.

Para practicar más

1. Envasamos 276 litros de agua en botellas iguales. Escribe la función que relaciona el número de botellas y su capacidad.

2. Un móvil recorre una distancia de 130 km con velocidad constante. Escribe la función velocidad→tiempo, calcula el tiempo invertido a una velocidad de 50 km/h, y la velocidad si el tiempo ha sido 5 horas.

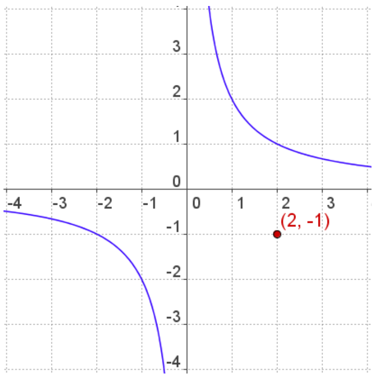
3. Un grifo con un caudal de 8 litros/min tarda 42 minutos en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si el caudal fuera de 24 litros/min?. Escribe la función caudal→tiempo.

4. Calcula las asíntotas de las funciones siguientes:

   a) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+3}$ b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-3}$

   c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$ d) $f(x) = \dfrac{-x}{x+2}$

5. Escribe la ecuación de la función cuya gráfica es una hipérbola como la de la figura con el centro de simetría desplazado al punto (2,-1).



6. Los costes de edición, en euros, de x ejemplares de un libro vienen dados por y=21x+24 (x>0). ¿Cuánto cuesta editar 8 ejemplares?, ¿y 80 ejemplares?. Escribe la función que da el coste por ejemplar. Por muchos ejemplares que se publiquen, ¿cuál es el coste unitario como mínimo?

7. ¿En qué se convierte al cabo de 15 años un capital de 23000€ al 5,5% anual?

8. Un capital colocado a interés compuesto al 2% anual, se ha convertido en 3 años en 9550,87€. ¿Cuál era el capital inicial?

9. Un capital de 29000€ colocado a interés compuesto se ha convertido al cabo de 4 años en 31390,53 €. ¿Cuál es el rédito (interés anual) a que ha estado colocado?

10. Un capital de 7000€, colocado a interés compuesto del 2% anual, se ha convertido al cabo de unos años en 8201,61€. ¿Cuántos años han transcurrido?

11. ¿Cuántos años ha de estar colocado cierto capital, al 3% anual, para que se duplique.

12. El periodo de desintegración del Carbono 14 es 5370 años. ¿En qué cantidad se convierten 10 gr al cabo de 1000 años?

13. ¿Cuántos años han de pasar para que una muestra de 30 gr de C14 se convierta en 20,86 gr.? *(Periodo de desintegración del C14 5370 años).*

14. Una muestra de 60 gr. de una sustancia radiactiva se convierte en 35,67 gr en 30 años. ¿Cuál es el periodo de desintegración?.

15. El tamaño de cierto cultivo de bacterias se multiplica por 2 cada 30 minutos. Si suponemos que el cultivo tiene inicialmente 5 millones de bacterias, ¿dentro de cuántas horas tendrá 320 millones de bacterias?.

16. El tamaño de cierto cultivo de bacterias se multiplica por 2 cada 20 minutos, si al cabo de 3 horas el cultivo tiene 576 millones de bacterias, ¿cuántas había en el instante inicial?

17. Calcula el número:

a) cuyo logaritmo en base 6 es 3.

b) cuyo logaritmo en base 4 es -3.

c) cuyo logaritmo en base 10 es 2.

d) cuyo logaritmo en base 1/2 es -3.

e) cuyo logaritmo en base 1/5 es 2.

18. ¿En qué base?

a) el logaritmo de 0,001 es -3.

b) el logaritmo de 243 es 3.

c) el logaritmo de 8 es 1.

d) el logaritmo de 1/81 es -4.

e) el logaritmo de 49 es 2.

19. Calcula mentalmente:

a) el logaritmo en base 2 de 32.

b) el logaritmo en base 5 de 125.

c) el logaritmo en base 3 de 1/9.

d) el logaritmo en base 7 de 1.

e) el logaritmo en base 6 de 216.

20. Sabiendo que el log2=0,3010 y el log3=0,4771, calcula:

a) log 16

b) log 512

c) log(16/81)

d) log 24

e) log 72

21. Utiliza la calculadora para averiguar el valor de:

a) $\log_7 12456{,}789$

b) $\log_5 5123{,}4345$

c) $\log_9 47658{,}897$

d) $\log_3 23{,}146$

e) $\log_6 1235{,}098$

22. Resuelve las ecuaciones exponenciales:

a) $32^{-9x+9}=16$

b) $27^{2x+3}=9^3$

c) $4^{-3x+8}=8$

d) $9^{8x-7}=1$

e) $25^{-5x-5}=1$

23. Calcula el valor de x:

a) $7^x=5$

b) $5^x=7$

c) $2{,}13^x=4{,}5$

24. Aplicando las propiedades de los logaritmos resuelve las ecuaciones:

a) $\log(32+x^2) - 2\cdot\log(4-x) = 0$

b) $2\cdot\log x - \log(x-16) = 2$

c) $\log x^2 - \log\dfrac{10x+11}{10} = -2$

d) $5\cdot\log\dfrac{x}{2} + 2\cdot\log\dfrac{x}{3} = 3\cdot\log x - \log\dfrac{32}{9}$

25. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2\cdot\log x - 3\cdot\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$