

Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Calcular les raons trigonomètriques d'un angle.
- Trobar totes les raons trigonomètriques d'un angle a partir d'una d'aquestes.
- Resoldre triangles rectangles quan es coneixen dos costats o un costat i un angle.
- Resoldre situacions relacionades amb la geometria en les quals es necessiti calcular angles i distàncies entre dos punts.
- Utilitzar la calculadora per obtenir raons o angles.

Abans de començar.

1. Els angles i la seva mesura pàg. 4
Recorreguts en la circumferència
Radiants
Graus sexagesimals
De radiants a graus
Mesurant angles
2. Raons trigonomètriques pàg. 6
Raons trigonomètriques
Sinus i cosinus en la circumferència
Tangent en la circumferència
Raons de 30° , 45° i 60°
3. Relacions trigonomètriques pàg. 8
Relacions fonamentals
4. Resoldre triangles rectangles pàg. 9
Amb un angle i la hipotenusa
Donats un angle i un catet
Coneguts dos costats
5. Raons d'angles qualssevol pàg. 10
Sinus
Cosinus
Tangent
6. Aplicacions de la trigonometria pàg. 11
Resoldre problemes mètrics

Exercicis per practicar

Per saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor

Abans de començar

<p>La trigonometria neix amb l'observació dels fenòmens astronòmics</p> 	 <p>En el conjunt megalític de Stonehenge (Gran Bretanya), construït entre 2200 i 1600 aC, l'alineació de dues grans pedres indica el dia més llarg de l'any.</p>	 <p>El primer antecedent escrit de trigonometria es troba en el papir Rhind, escrit per Ahmés al voltant del 1800 aC, transcrivint-ne un altre del 5000 aC.</p>
<p>A l'antiga Babilònia es va introduir la mesura de l'angle en graus.</p> <p>La divisió d'una circumferència en 360 graus, probablement va unida a la divisió de l'any en 360 dies.</p> <p>Així, com que el Sol recorre una circumferència en un any, un grau seria el recorregut en un dia.</p> 	<p>Amb la cultura grega la trigonometria va experimentar un impuls nou i definitiu.</p> <p>Aristarc de Samos (s. III aC), famós per haver proposat el primer sistema heliocèntric, va mesurar la distància al Sol i a la Lluna utilitzant els triangles. Hiparc de Nicea (s. II aC) va millorar les observacions d'Aristarc i és considerat l'«inventor» de la trigonometria.</p> <p>Claudi Ptolomeu el segle II va escriure l'«Almagest», que va influir al llarg de tota l'edat mitjana.</p> 	<p>El desenvolupament de la trigonometria es deu sobretot a l'obra dels àrabs, que van transmetre a Occident el llegat grec.</p> <p>Van ser els primers a utilitzar la tangent.</p> <p>Cap a l'any 833, Al-Kwuarizmi va construir la primera taula de sinos.</p> 
<p>A Europa es va publicar, el 1533, el primer tractat de trigonometria: "De trianguli omnia modi, libri V", escrit el 1464, a Königsberg, per Johann Müller, conegut com el Regiomontanus.</p> 	<p>Newton utilitza el 1671 les coordenades polars.</p> <p>La física dels fenòmens ondulatoris, com el que es produeix en una corda que vibra, va fer que Leonhard Euler (1707-1783) estudiés les funcions trigonomètriques.</p> 	<p>Avui, en els nostres dies, les utilitats de la trigonometria inclouen tot tipus de camps: de la topografia a l'acústica, l'òptica i l'electrònica.</p> 



Investigueu

Segurament deueu haver vist aquest senyal a les carreteres i sabeu que indica: pendent prolongada.

També deueu recordar el concepte de pendent d'una recta. Segons aquest, el 10% significa que cada 100 m recorreguts en horitzontal, en pugem (o baixem) 10 en vertical. Però alguns interpreten els 100 m com el camí real recorregut.

Què n'opineu?, influeix gaire considerar-lo d'una o una altra forma?

Recordeu-ho

Abans de seguir endavant us convé comprovar que recordeu la semblança de triangles i el teorema de Pitàgoras.

Trigonometria

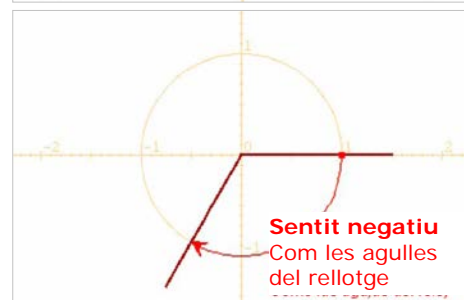
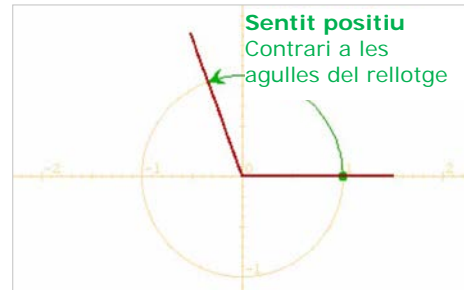
1. Els angles i la seva mesura

Trigonometria és una paraula que deriva del grec: Τριγωνομετρ'ια, tri (Τρι) tres, gono (γωνο) angle, metria (μετρ'ια) mesura, és a dir, "mesura de tres angles". Podeu consultar la definició de trigonometria que dona el diccionari del R A E.

En aquest curs es tractarà únicament la trigonometria plana.

Per tal d'estudiar els angles i la seva mesura adoptarem la definició d'angle escenificada a l'esquerra en la qual un angle es veu com un recorregut en la circumferència amb centre l'origen i de radi unitat o circumferència goniomètrica. El punt de partida d'aquests recorreguts se situarà en el punt de coordenades (1, 0) i la mesura d'un angle serà la mesura d'aquest recorregut.

Els angles poden tenir sentit positiu o negatiu, segons quin sigui el del seu recorregut; si és contrari al de les agulles del rellotge serà positiu i si és igual, negatiu.



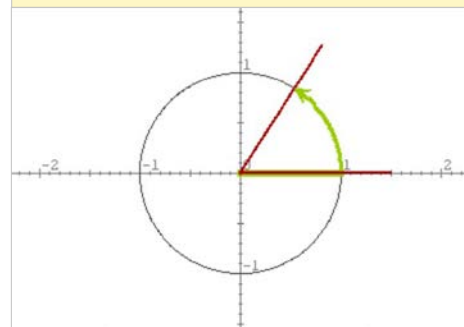
Radians

Mesurar un angle és mesurar el seu recorregut en la circumferència.

Com que la mesura de tota la circumferència és $2 \cdot \pi \cdot \text{radi}$, resulta convenient prendre com a unitat de mesura el radi.

A les figures, els angles es van representar en una circumferència de radi 1, això no significa que el radi mesuri 1 cm o 1 peu o 1 m, sinó que el radi és la unitat de mesura presa. Per raons evidents a aquesta unitat se l'anomena **radiant**.

L'angle **d'1 radiant** és aquell que presenta un recorregut en la circumferència igual al radi.



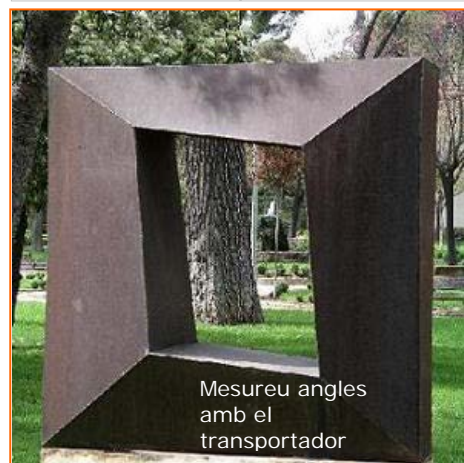
Graus sexagesimals

Ja coneixeu el sistema sexagesimal de mesura d'angles.

En dividir la circumferència en 360 parts iguals, obtenim un grau, al seu torn cada grau es compon de 60 minuts i cada minut de 60 segons.

Així un angle es mesura en:

graus° minuts' segons''



De graus a radians i de radians a graus

$$1 \text{ grau} = \frac{\pi}{180} \text{ radians}$$

De graus a radians:

✓ multipliquem per $\frac{\pi}{180}$

$$1 \text{ radiant} = \frac{180}{\pi} \text{ graus}$$

De radians a graus:

✓ multipliquem per $\frac{180}{\pi}$

El semiperímetre de la semicircumferència és radi

$$\pi \text{ radians} = 180 \text{ graus}$$

és a dir, π vegades un radiant = 180 vegades un grau

$$\pi \cdot 1 \text{ radiant} = 180 \cdot 1 \text{ grau}$$

Si aïllem el grau resulta:

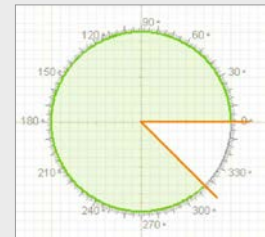
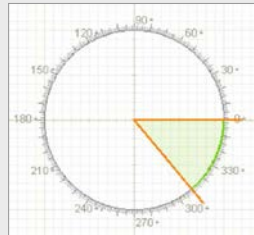
$$1 \text{ grau} = \pi/180 \text{ radians} \sim 0.0175 \text{ radians}$$

Si aïllem el radiant resulta:

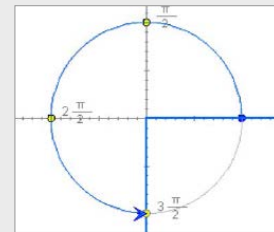
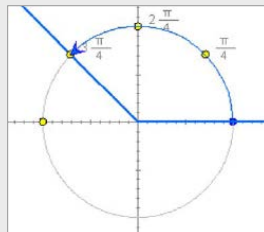
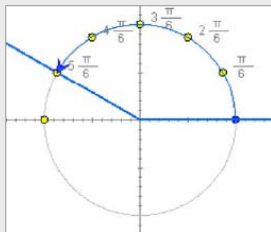
$$1 \text{ radiant} = 180/\pi \text{ graus} \sim 57.2957 \text{ graus}$$

EXERCICIS resoltos

1. Dibuixeu a la circumferència goniomètrica els angles de 120° , -50° i 315° .



2. Dibuixeu a la circumferència goniomètrica l'angle de $5\pi/6$, $3\pi/4$, i $3\pi/2$ rad.



3. Passeu a radians: a) 150° , b) 210° , c) 270° , d) 60°

$$a) 150^\circ = \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$b) 210^\circ = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$c) 270^\circ = \frac{270 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

$$d) 60^\circ = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

4. Passeu a graus: a) $11\pi/6$ rad, b) $\pi/4$ rad, c) $5\pi/4$ rad, d) $2\pi/3$ rad

$$a) \frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 330^\circ$$

$$b) \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$$

$$c) \frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225^\circ$$

$$d) \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120^\circ$$

Trigonometria

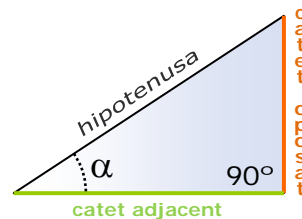
2. Raons trigonomètriques

En els triangles semblants els angles són iguals i els costats homòlegs són proporcionals. La raó entre dos costats d'un triangle rectangle determina la seva forma.

Donat un triangle rectangle, les raons trigonomètriques de l'angle agut α es defineixen:

- ✓ El **sinus** és el quocient entre el catet oposat i la hipotenusa.
- ✓ El **cosinus** és el quocient entre el catet adjacent i la hipotenusa.
- ✓ La **tangent** és el quocient entre el catet oposat i el catet adjacent.

Aquestes raons no depenen de la mida del triangle sinó de l'angle.



$$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}$$

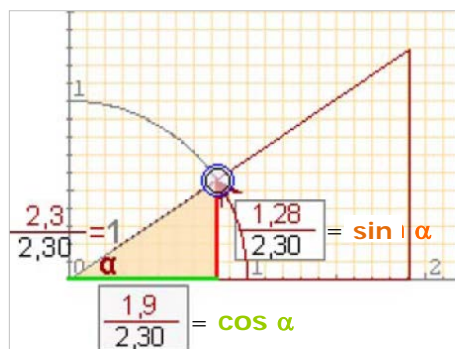
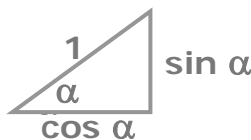
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}$$

El sinus i el cosinus en la circumferència

A la figura s'ha representat l'angle α en la circumferència goniomètrica o de radi unitat.

En el triangle rectangle que es forma com la hipotenusa és 1, el catet oposat és el **sin α** i l'adjacent el **cos α** .

És important recordar el següent triangle:



Observeu que (**cos α** , **sin α**) són les **coordenades** del punt final de l'angle en la circumferència de radi unitat.

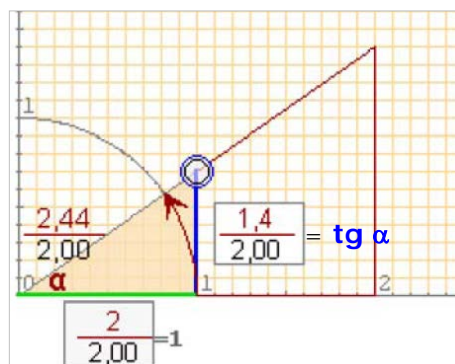
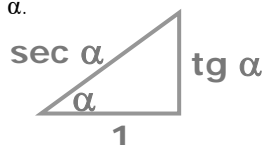
La tangent en la circumferència

A la figura es comprèn perquè al quocient entre el catet oposat i el catet adjacent se l'anomena tangent, el seu valor queda definit sobre una recta tangent a la circumferència en el punt (1,0).

Observeu a l'escena que quan el catet adjacent val 1, la hipotenusa és igual a la inversa del cos α .

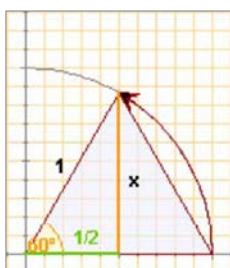
Al quocient:

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{catet adjacent}}$$



se l'anomena secant de α i s'abreuja amb sec α .

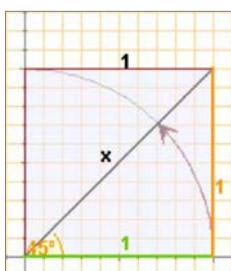
Els angles d'un triangle equilàter fan **60°**
Amb el teorema de Pitàgores es calcula l'altura



$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Prenem un quadrat de costat **1**

Amb el teorema de Pitàgores es calcula la diagonal



$$\text{diag} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Les raons de 30°, 45° i 60°

Els angles de 30°, 45° i 60° apareixen freqüentment, fixeuvos com es calculen les seves raons a partir de la definició si busquem els triangles adequats.

	sinus	cosinus	tangent
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Memoritzar aquesta taula és fàcil si observeu l'ordre que segueixen. Una vegada apresos els sinus amb les arrels consecutives, els cosinus surten en ordre invers.

Amb la calculadora

- Donat un angle α obteniu-ne les raons trigonomètriques.

Per exemple el $\sin 28^\circ 30'$

Poseu la calculadora en mode **DEG**

Teclegeu $28^\circ 30'$ **sin**

Obtenim: **0,477158760**

En algunes calculadores cal prémer la tecla **sin** abans d'introduir l'angle, comproveu com funciona la vostra.

Si volem obtenir el $\cos \alpha$ o la α tg procedirem de la mateixa forma però prement les tecles **cos** i **tan** respectivament.

- Donada una raó cal obtenir l'angle α corresponent.

Amb el mateix valor que teniu a la pantalla **0,477158760**

Comproveu que la calculadora segueix en mode **DEG**

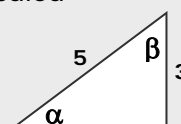
Teclegeu **SHIFT sin**

Obtenim: **28,5** en graus, si volem graus, minuts i segons, premem **SHIFT** **sin** obtenim **28° 30'**

EXERCICIS resolts

5. En el triangle de la figura calculeu

- a) $\sin \alpha$ d) $\sin \beta$
b) $\cos \alpha$ e) $\cos \beta$
c) $\text{tg } \alpha$ f) $\text{tg } \beta$



- a) $\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$ d) $\sin \beta = \frac{4}{5} = 0,8$
sin sin
b) $\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$ e) $\cos \beta = \frac{3}{5} = 0,6$
c) $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$ f) $\text{tg } \beta = \frac{4}{3} = 1,3$

6. Obteniu amb la calculadora

- a) $\sin 30^\circ = 0,5$
b) $\cos 60^\circ = 0,5$
c) $\text{tg } 45^\circ = 1$

7. Obteniu amb la calculadora els angles α i β de l'exercici 5.

α : Teclegem **0 6 SHIFT sin** $\rightarrow 36,87^\circ$

β : Teclegem **0 8 SHIFT sin** $\rightarrow 53,13^\circ$

Observeu que en efecte sumen 90° .

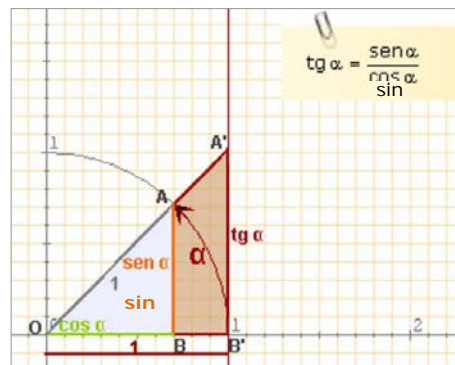
Trigonometria

3. Relacions fonamentals

Si s'apliquen la semblança i el teorema de Pitàgores als triangles rectangles "bàsics", és a dir, amb hipotenusa=1 o amb catet adjacent=1, s'obtidran les relacions fonamentals de la trigonometria:

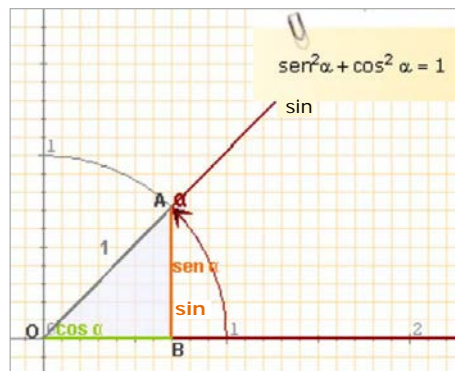
OBA i OB'A' són triangles semblants:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1} \text{ després } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



Apliquem el Teorema de Pitàgores al triangle OBA de la figura obtenim:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

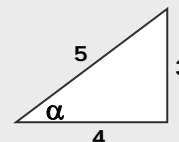


EXERCICIS resoltos

8. Comproveu en l'angle α del triangle de la figura que es compleixin les relacions fonamentals.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \operatorname{tg} \alpha$$



9. Calculeu el cosinus i la tangent d'un angle agut α tal que $\sin \alpha = 0,3$

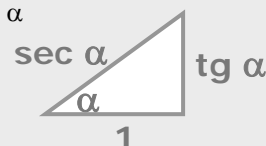
$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0,3^2 = 1 - 0,09 = 0,81 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{0,81} = 0,9$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$$

10. Comproveu que es compleixi la relació: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

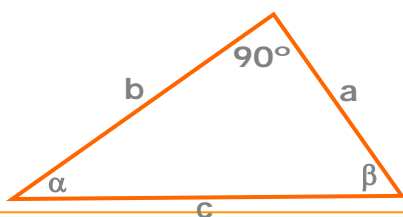
Recordeu el triangle:



4. Resolució de triangles rectangles.

Resoldre un triangle rectangle és calcular les dades desconegudes, costats o angles, a partir dels coneguts.

Vegem els casos que es poden presentar.



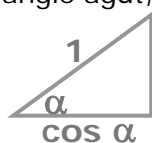
Calcular l'altura de la muntanya.



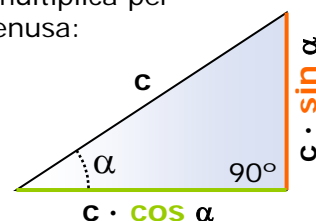
$$x = 650 \cdot \sin 30^\circ = 650 \cdot 0,5 = 325$$

a) Coneguts la hipotenusa i un angle

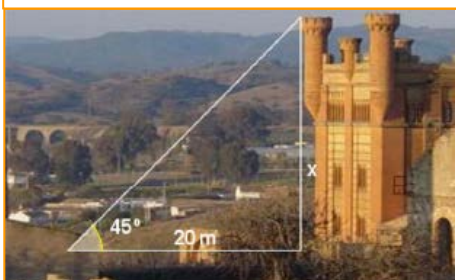
Per trobar els catets d'un triangle rectangle del qual es coneixen les mesures de la **hipotenusa** i d'un angle agut, pensarem en el triangle



que es multiplica per la hipotenusa:



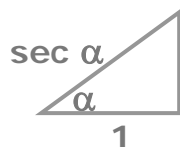
Calcular l'altura de la torre.



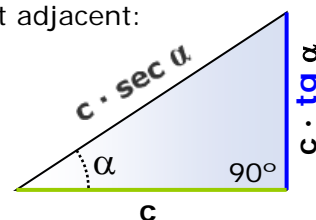
$$x = 20 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 20 \cdot 1 = 20\text{m}$$

b) Coneguts un catet i un angle

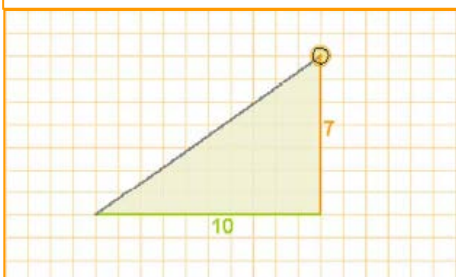
Per trobar els costats d'un triangle rectangle del qual es coneixen les mesures d'un **catet** i d'un angle no recte, pensarem en el triangle



que es multiplica pel catet adjacent:



Resoleu el triangle.



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$$

Amb la calculadora: $\operatorname{atan}(0,7) = 35^\circ$
I l'altre angle: $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

c) Coneguts dos costats

Per trobar l'altre costat del triangle s'aplicarà el teorema de Pitàgores, l'angle es determinarà com

l'arc la tangent del qual és $\frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}$

o bé com l'arc el sinus del qual és $\frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$

depenent de les dades inicials.

Per calcular l'altre angle n'hi ha prou amb restar de 90° .

Trigonometria

5. Raons de un ángulo cualquiera

Recordeu que (**cos α**, **sin α**) eren les **coordenades** del punt final de l'angle α en la circumferència de radi unitat. Això que vam veure per als angles aguts podem fer-ho extensible a angles qualssevol.

Sinus

El sinus d'un angle és la coordenada **vertical** del punt de la circumferència goniomètrica que defineix l'angle.

Observeu que el valor està comprès entre -1 i 1.

Cosinus

De la mateixa manera que el sinus d'un angle és l'ordenada, el cosinus és **l'abscisa** del punt final del recorregut que marca l'angle en la circumferència.

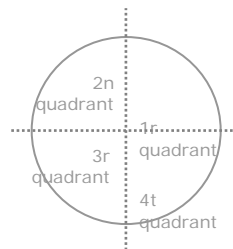
El valor també està comprès entre -1 i 1.

Tangent

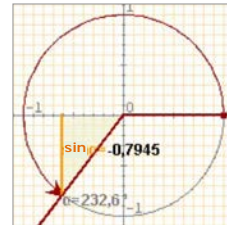
Amb la relació fonamental **tg α = senα/cosα** s'amplia la definició de tangent en angles aguts a un angle qualssevol.

Observeu que la tangent es representa en la recta tangent a la circumferència goniomètrica en el punt (1,0).

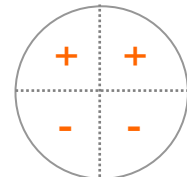
Fixeu-vos també que per als angles de 90° i 270°, el cosinus és 0 per la qual cosa no està definida la tangent; com més s'apropa un angle a 90° o a 270°, més gran es fa en valor absolut la tangent, direm que és infinit:



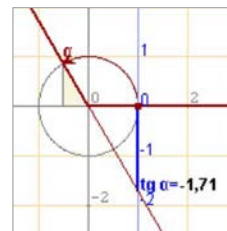
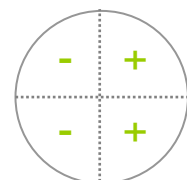
La circumferència goniomètrica és una circumferència de radi unitat i el centre és l'origen de coordenades.



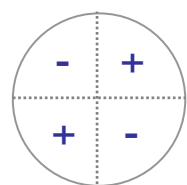
SIGNE DEL SINUS



SIGNE DEL COSINUS



SIGNE DE LA TANGENT



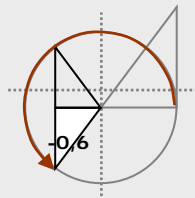
EXERCICIS resolts

8. Dibuixeu un angle del tercer quadrant el cos del qual sigui -0,6 i calculeu el sinus i la tangent

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64$$

$\sin \alpha = \pm \sqrt{0,64} = \pm 0,8$ Com que és en el tercer quadrant serà -0,8

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{4}{3}$$



9. Calculeu $\cos \alpha$ quan $\operatorname{tg} \alpha = -2$ i α del quart quadrant

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ i triem el positiu ja que α és en el 4t quadrant.

Observeu

Angles suplementaris

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Angles que sumen 360°

$$\begin{aligned} \sin(360^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

6. Resoldre problemes mètrics

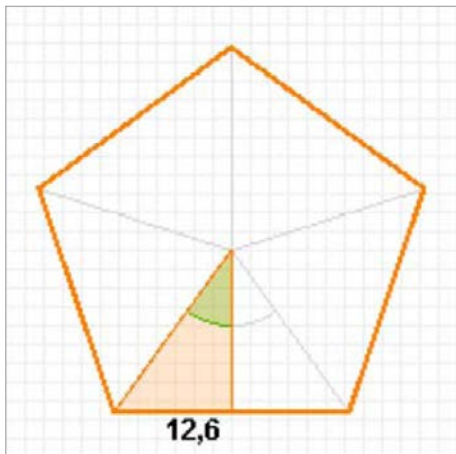


La trigonometria és útil per resoldre problemes geomètrics i calcular longituds a la realitat.

Amb un teodolit com el de la fotografia es poden mesurar angles, tant en el pla vertical com en l'horitzontal, que ens permeten, aplicant les raons trigonomètriques, trobar distàncies o calcular altures de punts inaccessibles.

En aquests casos encara que el triangle de partida no sigui rectangle, traçant la seva altura podem obtenir dos triangles rectangles que es podran resoldre amb les dades que tenim.

A l'escena podeu veure alguns exemples.



Per calcular àrees de polígons regulars

Calculeu l'àrea d'un pentàgon regular de costat 25,2 cm.

- ✓ L'àrea d'un polígon regular és: $\text{perímetre} \cdot \text{apotema} / 2$

Com que es tracta d'un pentàgon l'angle central mesura $360^\circ / 5 = 72^\circ$

- ✓ Ens fixem en el triangle rectangle de la figura en el qual un catet és l'apotema i un altre la meitat del costat. En aquest triangle

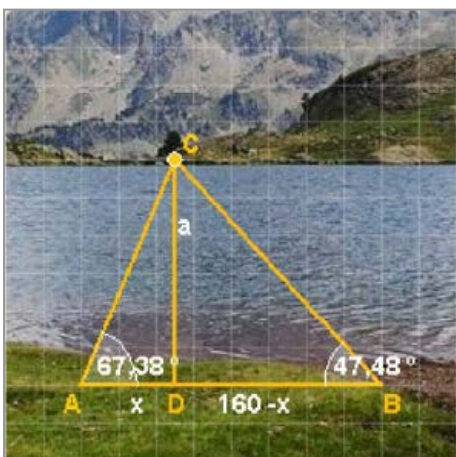
$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{12,6}{a} \Rightarrow a = \frac{12,6}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{12,6}{0,72} = 17,34$$

Després l'àrea del pentàgon és:

$$\text{Àrea} = \frac{25,2 \cdot 17,34}{2} = 1092,57 \text{ cm}^2$$

Per calcular mesures topogràfiques

Per mesurar l'amplada d'un riu s'han pres les mides de la figura; des de dos punts d'una vora distants 160 m. Quina amplada té el riu?



- ✓ L'amplada del riu és l'altura, a , del triangle ACB que no és rectangle, però sí que ho són els triangles ADC i BDC.

$$\text{Al triangle ADC: } \operatorname{tg} 67,38^\circ = \frac{a}{x} \Rightarrow a = x \cdot \operatorname{tg} 67,38^\circ$$

$$\text{En el BDC: } \operatorname{tg} 47,48^\circ = \frac{a}{160 - x} \Rightarrow a = (160 - x) \operatorname{tg} 47,48^\circ$$

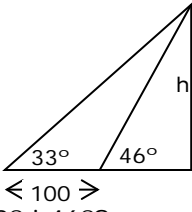
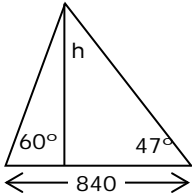
- ✓ Tenim un sistema de dues equacions que resollem per igualació

$$\left. \begin{array}{l} a = 2,40x \\ a = 1,09(160 - x) \end{array} \right\} \Rightarrow 2,40x = 1,09(160 - x) \Rightarrow 3,49x = 174,40$$

$$x = \frac{174,40}{3,49} = 50 \Rightarrow a = 2,40 \cdot 50 = 120 \text{ m}$$



Per practicar

- Expresseu en radiants:
 - 15°
 - 120°
 - 240°
 - 345°
- Expresseu en graus:
 - $\frac{\pi}{15}$
 - $\frac{3\pi}{10}$
 - $\frac{7\pi}{12}$
 - $\frac{11\pi}{6}$
- Trobeu amb la calculadora les següents raons arrodonint a centèsimes:
 - $\sin 25^\circ$
 - $\cos 67^\circ$
 - $\operatorname{tg} 225^\circ$
 - $\operatorname{tg} 150^\circ$
- Un angle d'un triangle rectangle mesura 47° i el catet oposat 8 cm, trobeu la hipotenusa.
- La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 26 cm i un angle 66° . Calculeu els catets.
- Un angle d'un triangle rectangle mesura 44° i el catet adjacent 16 cm, calculeu l'altre catet.
- En un triangle rectangle els catets mesuren 15 i 8 cm, trobeu els angles aguts.
- La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 45 cm i un catet 27 cm, calculeu els angles aguts.
- En un triangle isòsceles els angles iguals mesuren 78° i l'altura 28 cm, trobeu el costat desigual.
- Els costats iguals d'un triangle isòsceles mesuren 41 cm i els angles iguals 72° , calculeu l'altre costat.
- El cos d'un angle del primer quadrant és $3/4$, calculeu el sinus de l'angle.
- La tangent d'un angle del primer quadrant és $12/5$ calculeu el sinus.
- El $\sin \alpha = 3/5$ i α és un angle del segon quadrant, calculeu la $\operatorname{tg} \alpha$.
- El $\cos \alpha = 3/5$ i α és un angle del quart quadrant, calculeu la $\operatorname{tg} \alpha$.
- La $\operatorname{tg} \alpha = 3$ i α és un angle del tercer quadrant, calculeu el $\cos \alpha$.
- La longitud de l'apotema d'un polígon regular de 9 costats és de 15 cm. Calculeu el costat.
- El costat d'un hexàgon regular mesura 30 cm, calculeu l'apotema.
- L'apotema d'un octàgon regular mesura 8 cm, calculeu l'àrea del polígon.
- La longitud del radi d'un pentàgon regular són 15 cm. Calculeu-ne l'àrea.
- L'ombra d'un arbre quan els raigs del sol formen amb l'horitzontal un angle de 36° mesura 11 m. Quina és l'altura de l'arbre?
- La longitud del fil que subjecta un estel és de 50m. Si l'angle d'elevació de l'estel és de 37° , quina altura assoleix l'estel?
- Per calcular l'altura d'un edifici es mesuren els angles d'elevació des de dos punts situats a una distància de 100m. Quina és l'altura de l'edifici, si els angles són 33° i 46° ?
 
- Dues persones separades 840 m veuen un avió que les sobrevol amb angles d'elevació de 60° i 47° . A quin altura vola l'avió?
 
- Per mesurar l'altura d'una muntanya es mesuren els angles d'elevació des de dos punts situats a una distància de 480m i una altura de 1200m sobre el nivell del mar. Quina és l'altura de la muntanya, si els angles són 45° i 76° ?



Quina inclinació de carretera indica aquest senyal?

Si heu investigat una mica haureu vist que a la web uns articles diuen que aquest 10% és la pendent matemàtica i d'altres la defineixen com a pendent de trànsit. Sigui una o altra, la diferència no és gran, l'angle indicat serà en el primer cas $\text{atan}(10/100)=5.71^\circ$ i $\text{asin}(10/100)=5.74^\circ$ en el segon, i els problemes del nostre cotxe per abordar aquesta pendent seran similars en ambdós casos.

La diferència entre la pendent matemàtica o la de trànsit serà més significativa si un senyal indiqués un alpinista que la inclinació de la muntanya a pujar és del 75%.

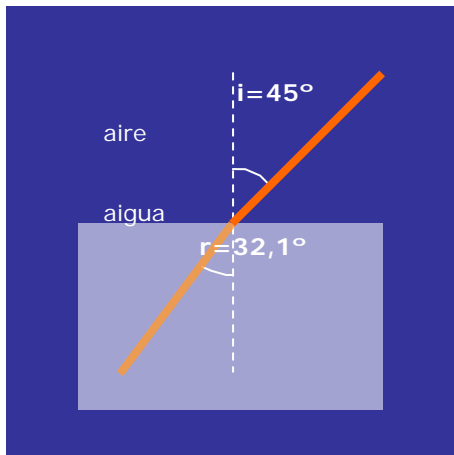
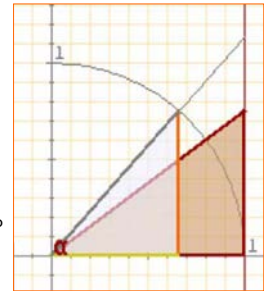
- ✓ La pendent matemàtica del 75% correspon a l'angle:

$$\text{atan}(75/100)=36.86^\circ$$

- ✓ La pendent de trànsit del 75% correspon a l'angle:

$$\text{asin}(75/100)=48.59^\circ$$

En l'escena, la hipotenusa del triangle marró mostra la inclinació en interpretar el % triangle blau, s'interpreta el % com a sinus.



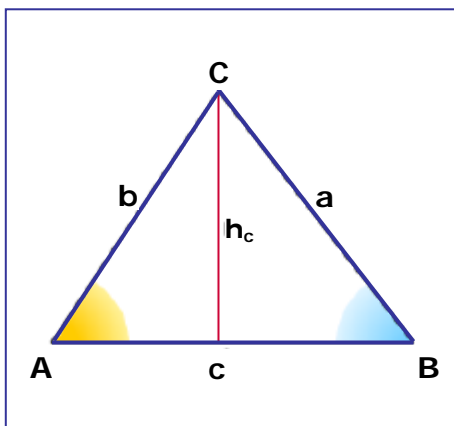
La refracció de la llum

És el fenomen que es produeix quan la llum passa d'un medi material a un altre, en què la velocitat de propagació és diferent. Per això, quan introduïm una vareta a l'aigua la veiem.

La relació entre l'angle d'incidència "i" i el de refracció "r", ve donada per la següent relació, coneguda com a Llei de Snell.

$$n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin r$$

on n_1 i n_2 són, respectivament, els índexs de refracció del medi 1 i del medi 2, al seu torn el quocient entre la velocitat de la llum al mig i la velocitat de la llum en el buit



Teorema del sinus

En aquest tema heu pogut resoldre triangles que no eren rectangles, considerant-ne l'altura.

El resultat conegut com a teorema del sinus, ens permet resoldre qualsevol triangle si coneixem un costat i dos angles.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

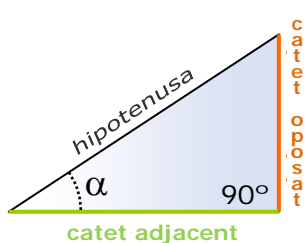
Trigonometria



Recordeu el més important

$$1 \text{ grau} = \frac{\pi}{180} \text{ radiants} \quad \begin{matrix} \text{graus} & \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} & \text{radiants} \end{matrix}$$

$$1 \text{ radiants} = \frac{180}{\pi} \text{ graus} \quad \begin{matrix} \text{radiants} & \xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}} & \text{graus} \end{matrix}$$



- ✓ El **sinus** és el quocient entre el catet oposat i la hipotenusa.
- ✓ El **cosinus** és el quocient entre el catet adjacent i la hipotenusa.
- ✓ La **tangent** és el quocient entre el catet oposat i el catet adjacent.

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Angles i la mesura

Per mesurar angles femem graus o radiants.

Un **radiant** és l'angle el recorregut del qual és igual al radi amb què ha estat traçat.

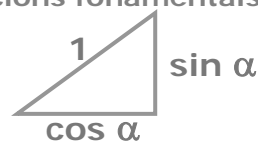
Raons trigonomètriques

$$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}$$

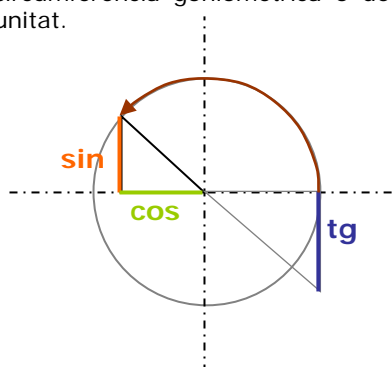
$$\text{tg} \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}$$

Relacions fonamentals

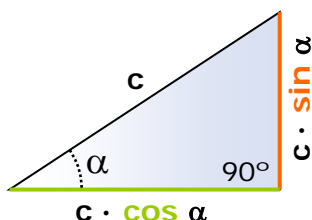
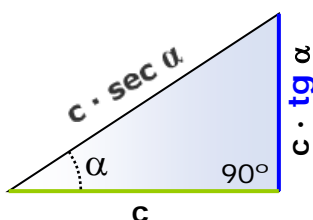


Raons d'angles qualssevol

(**cos α**, **sin α**) són les **coordenades** del punt final de l'angle α en la circumferència goniomètrica o de radi unitat.

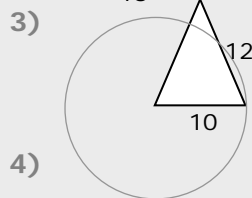
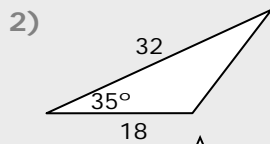
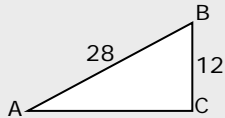


SIGNE DE LES RAONS

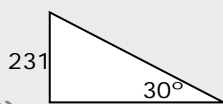


Resoldre un triangle rectangle consisteix a trobar les mesures dels seus sis elements: tres costats i dos angles (el tercer és 90°), coneguts un costat i un angle o dos costats.

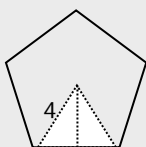
Autoavaluació



4)



9)



10)

1. Expressen en radiants l'angle de 150° .
2. Calculeu el valor de $\operatorname{tg} A$ al triangle ABC de la figura.
3. Calculeu l'àrea del triangle de la figura.
4. Amb un compàs de 12 cm de longitud hem traçat la circumferència de la figura. Quin angle, en radiants, formen les branques del compàs?
5. Si $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, i α és un angle agut, calculeu la $\operatorname{tg} \alpha$.
6. Si $\operatorname{tg} \alpha = 1.25$ i α és un angle del tercer quadrant, calculeu el $\cos \alpha$.
7. A partir de les raons de l'angle de 30° , calculeu la $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.
8. Si $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, i α és un angle agut, calculeu el $\sin(180^\circ - \alpha)$.
9. L'altura de Torrespaña és de 231 metres. Quant fa l'ombra de l'edifici quan la inclinació dels raigs del sol és de 30° ?
10. Calculeu l'àrea d'un pentàgon regular de radi 4 cm

Solucions dels exercicis per practicar

1. a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{23\pi}{12}$
2. a) 12° b) 54° c) 105° d) 330°
3. a) 0,42 b) 0,39 c) 1 d) -0,58
4. 10,93 cm
5. 23,75 cm, 10,57 cm
6. 15,45 cm
7. $28^\circ 4' 20''$ $61^\circ 55' 40''$
8. $36^\circ 52' 11''$ $53^\circ 7' 49''$
9. 11,9 cm
10. 25,33 cm
11. $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$
12. $\sin \alpha = 12/13$
13. $\text{tg } \alpha = -3/4$
14. $\text{tg } \alpha = -4/3$
15. $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$
16. 10,91 cm
17. 25,98 cm
18. costat=6,63 cm àrea=212,08 cm²
19. costat=17,63 cm apot=12,14 cm
àrea=534,97 cm²
20. 7,99 m
21. 30 m
22. 57,41 m
23. 638,11 m
24. $639,42 + 1200 = 1839,42$ m

Solucions de l'AUTOAVALACIÓ

1. $\frac{5\pi}{6}$
2. 0,47
3. 165,19 u²
4. 0,85 rad (truncament)
5. $\text{tg } \alpha = 4/3$
6. $\cos \alpha = -0,62$
7. $\text{tg } \frac{-5\pi}{6} = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
8. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -3/5$
9. 400,10 m
10. 38,04 m²