

MATEMÀTIQUES

Orientades als Ensenyaments Acadèmics





Els nombres reals

Continguts

1. Nombres racionals i irracionals
 - Decimals periòdics
 - Fracció generatriu
 - Nombres racionals
 - Nombres irracionals
 - Nombres reals
2. Calculant amb nombres reals
 - Aproximacions
 - Mesura d'errors
 - Notació científica
3. La recta real
 - Ordenació dels nombres reals
 - Valor absolut
 - Intervals

Objectius

- Classificar els nombres reals en racionals i irracionals.
- Aproximar nombres amb decimals fins a un ordre donat.
- Calcular la cota d'error d'una aproximació.
- Representar en la recta nombres reals.
- Expressar i representar intervals de nombres reals.
- Utilitzar la calculadora per facilitar els càlculs.



**Abans de començar**

Observa l'animació que hi ha en aquesta pàgina i respon a les següents preguntes:

a) Què s'està representant en l'animació?

b) Estan representades en la imatge de l'esquerra totes les xifres decimals que té el nombre pi? _____

c) Quina és o quina podria ser l'última xifra del nombre pi? _____

d) Quantes xifres té el nombre pi? _____

Si tens dificultats amb les operacions amb fraccions pots repassar clicant



Clica per anar a la pàgina següent.

1. Nombres racionals i irracionals

1.a. Decimals periòdics

- Llegeix el text de la pantalla.

a) Quan trobem l'expressió decimal d'una fracció, quants tipus n'obtenim? _____

b) Quins són aquests tipus de decimals? _____, _____ i _____

c) Per què quan dividim dos nombres sempre arriba el moment en que es repeteixen les xifres del quocient? _____

- Amb l'ajuda de l'escena, troba l'expressió decimal de les següents fraccions:

a) $\frac{12}{7} =$

b) $\frac{31}{15} =$

c) $\frac{17}{8} =$

b) Escriu diferents exemples de fraccions l'expressió decimal de les quals sigui:

Exacta					
Periòdica pura					
Periòdica mixta					

Clica en el botó



per fer uns exercicis.

Clica per anar a la pàgina següent.

1.b. Fracció generatriu

- Ara veurem com obtenir a partir d'una expressió decimal, exacta o periòdica, la seva fracció generatriu. Mira l'escena de l'esquerra i intenta trobar la fracció generatriu de tres expressions decimals de cada tipus:

Exacta			
Periòdica pura			
Periòdica mixta			


- Es poden obtenir tres regles per a construir mecànicament una fracció generatriu per a cada tipus d'expressió decimal. Aquestes regles són les següents:

Exacta		Exemple:
Periòdica pura		Exemple:
Periòdica mixta		Exemple:

Clica en el botó



per fer uns exercicis.
Insisteix fins que no facis cap error.


Clica  per anar a la pàgina següent.

1.c. Nombres racionals i la seva representació gràfica

- Agafa regle i compàs i anem a representar fraccions (Nombres Racionals) en una recta. A cada fracció li correspondrà un punt de la recta. Fes els sis exemples que s'indiquen a continuació:

Representació d'un decimal periòdic el valor del qual està entre 0 i 1.	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
---	---------------	---------------

Representació d'un decimal periòdic el valor del qual és més gran que 1.	$\frac{19}{4}$	$\frac{22}{3}$
Representació d'un decimal periòdic negatiu.	$-\frac{23}{5}$	$-\frac{7}{3}$


Clica  per anar a la pàgina següent.

1.d. Nombres irracionals. Representació gràfica (casos senzills)

- Agafa regle i compàs i seguint l'exemple de l'escena representa:

Representació gràfica de $\sqrt{2}$.

- Per què $\sqrt{2}$ no és un nombre racional? _____
- Als nombres que no són racionals se'ls anomena: _____
- Llegeix i intenta entendre la demostració de perquè $\sqrt{2}$ no és un nombre racional.

Clica  per anar a la pàgina següent.

Nombres reals.

- Agafa regle i compàs i seguint l'exemple de l'escena representa:

Representació gràfica de $\sqrt{3}$.

Representació gràfica de $\sqrt{7}$.

Representació gràfica de $\sqrt{17}$.

EXERCICIS

1. Calcula la fracció generatriu de:

a) 2,3751000

b) 43,666...

c) 4,3666...

2. Representa en la recta:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4}$

c) $-\frac{23}{5} = -5 + \frac{2}{5}$

3. Determina quin tipus de decimals són els següents:

a) $\frac{92}{73}$

b) $\frac{57}{22}$

c) $\frac{27}{36}$

4. Representa $\sqrt{17}$:

5. Esbrina si els següents nombres són racionals o irracionals:

-5

0

$\pi/2$

$\sqrt{16}$

$\frac{7}{3}$


2,313131...

$\sqrt{15}$

1,01001000100001...

$-\frac{4}{5}$

4,65

Clica  per anar a la pàgina següent.

2. Calculant amb nombres reals

2.a. Aproximacions


- Llegeix el text de la pàgina i després fixa't en la descripció que es fa en l'escena del que és una aproximació per defecte i per excés, i després la diferència entre truncar i arrodonir.
 - a) En l'aproximació per defecte d'un nombre, l'aproximació és sempre _____ que el propi nombre. Per exemple:
 - a. En aproximar per defecte 1,66666666... fins les deumil·lèsimes obtenim el nombre: _____
 - b. En aproximar per defecte 3,1415926535... fins les mil·lèsimes obtenim el nombre: _____
 - b) En l'aproximació per excés d'un nombre, l'aproximació és sempre _____ que el propi nombre. Per exemple:
 - a. En aproximar per excés 1,66666666... fins les deumil·lèsimes tenim el nombre: _____
 - b. En aproximar per excés 3,1415926535... fins les mil·lèsimes tenim el nombre: _____
 - c) Quan truncuem un nombre sempre tenim una aproximació per _____.
 - d) Quan arrodonim un nombre obtenim una aproximació per defecte si la xifra següent a la qual s'aproxima és _____ i una aproximació per excés si la xifra següent a la qual s'aproxima és _____.

Clica en el botó



per fer els exercicis que se't proposen.

El radi d'una circumferència és de 3,96 metres. Utilitzant el valor de π que dóna la calculadora, esbrina:
1. La longitud de la circumferència, truncant el resultat als centímetres.
2. La longitud de la circumferència, arrodonint el resultat als centímetres.
3. L'àrea del cercle, truncant el resultat als centímetres quadrats.
4. L'àrea del cercle, arrodonint el resultat als centímetres quadrats.

Clica  per anar a la pàgina següent.

2.b. Mesura d'errors

- Llegeix el text que s'inclou a la part dreta de la pàgina i
 - a) defineix que és l'error absolut que es comet en una aproximació:

 - b) defineix l'error relatiu que es comet en una aproximació:


 - c) quin és el percentatge d'error?

- Fixa't en l'escena i completa la taula pel nombre $\frac{266}{974}$

	Aproximació per defecte	Error absolut	Error relatiu	Aproximació per excés	Error absolut	Error relatiu
1 xifra decimal						
2 xifres decimals						
3 xifres decimals						
4 xifres decimals						

- Fes el mateix amb el nombre $\frac{5}{270}$


	Aproximació per defecte	Error absolut	Error relatiu	Aproximació per excés	Error absolut	Error relatiu
1 xifra decimal						
2 xifres decimals						
3 xifres decimals						
4 xifres decimals						

Clica en el botó  per fer els exercicis que se't proposen.

Copia l'enunciat i les dades de cada exercici:

Exercici 1:

Exercici 2:

Clica  per anar a la pàgina següent.

2.c. Notació científica

- Llegeix detingudament l'explicació de l'escena interactiva i ves emplenant la taula següent:

	Notació usual	Notació científica
Diàmetre de la galàxia d'Andròmeda en anys-llum		
Distància a la Terra d'Andròmeda en anys-llum		
Velocitat de la llum en km/s		
Diàmetre d'Andròmeda en km		
Distància a la Terra d'Andròmeda en km		
Mida d'una puça en mm		
Mida de l'aresta d'un cristall de silici en mm		
Mida de l'escama de l'ala d'una papallona en mm		
Mida d'un bacteri del còlera en mm		
Mida d'un virus en mm		
Mida d'un àtom d'oxigen en mm		

- Per què convé utilitzar la notació científica quan treballem amb nombres molt petits o molt grans?

Clica en el botó



per fer els exercicis que se't proposen.

Copia l'enunciat i les dades de cada exercici:

Exercici 1:

Exercici 2. Passar de forma científica a decimal. Realitza cinc exercicis d'aquest tipus:

Científica	Decimal

Exercici 3. Passar de forma decimal a científica. Realitza cinc exercicis d'aquest tipus:

Decimal	Científica


Exercici 4.

Exercici 5.

EXERCICIS

6. El radi d'una circumferència és 3,96 m. Utilitzant la calculadora i el valor de π que dóna, calcula:
- La longitud de la circumferència truncant el resultat a cm.
 - La longitud de la circumferència arrodonint el resultat a cm.
 - L'àrea del cercle truncant a cm^2
 - L'àrea del cercle arrodonint a cm^2

7. Els radars de tràfic mesuren la velocitat dels cotxes en carrers i carreteres. La legislació vigent té en compte que en tota mesura es cometen errors, per això dóna un marge d'error del 10% (o un error relatiu de 0,10). Tenint en compte aquest fet, calcula la velocitat màxima a la que pot anar un cotxe sense infringir la llei en els casos:
- Autopista amb límit de velocitat de 120 km/h
 - Carretera amb límit de velocitat de 90 km/h
 - Via urbana amb límit de velocitat de 50 km/h
8. Escribe en notació científica o en notació decimal respectivament:
- $0,000000002145 =$
 - $3,589 \cdot 10^9 =$
 - $1523000000000 =$
 - $5,267 \cdot 10^{-5} =$


Clica  per anar a la pàgina següent.

3. La recta real

3.a. Ordenació dels nombres reals

Llegeix el text de la pàgina i de l'escena i des d'aquesta accedeix al vídeo que ens relata la cursa en la determinació de les xifres del nombre pi.

- Quin sentit té aquesta cursa?
- Té alguna aplicació pràctica conèixer cent milions de xifres de pi?
- I un googol de xifres de pi?
- Cada punt en la recta real es correspon amb un _____
- Cada nombre real és representable com un punt en _____
- Donats dos nombres reals, **a** i **b**, direm que **a és menor que b**, **a** ____ **b**, si en representar-los **a** està a _____ de **b**.
- **a és menor que b** si la diferència _____ és _____.
- Els nombres a la dreta del zero són els _____ i els de l'esquerra són els _____.

Clica en el botó  per fer els exercicis que es proposen.


Llegeix en primer lloc les indicacions que et facilitaran la resolució dels exercicis

Exercici 1: Comparar nombres racionals. Realitza cinc exercicis d'aquest tipus.

Exercici 2: Comparar radicals. Realitza cinc exercicis d'aquest tipus.


Exercici 3: Comparar nombres en notació científica. Realitza cinc exercicis d'aquest tipus.

Exercici 4: Ordenar de menor a major. Realitza cinc exercicis d'aquest tipus.

Clica  per anar a la pàgina següent.

3.b. Distàncies entre nombres. Valor absolut.

- Llegeix el text d'aquesta pàgina i les diferents pantalles de l'escena. Respon les següents preguntes:
 - a) Què anomenem valor absolut d'un nombre?
 - b) Com es representa el valor absolut del nombre a?
 - c) La distància al zero del punt que en la recta real representa al nombre a és:
 - d) Donats dos nombres a i b, la distància entre els punts que els representen és:
 - e) Quina és la desigualtat triangular en el valor absolut?
 - f) Quan $|a + b| = |a| + |b|$?
 - g) A què és igual el valor absolut del producte de dos nombres? ¿I el valor absolut del quocient?


Clica en el botó  per fer els exercicis que se't proposen.

Exercici 1. De tres dels exemples que et proposi l'escena, escriu i calcula:

a	b	a	b	d(a, b)

Exercici 2. De tres dels exemples que et proposi l'escena, escriu i calcula:

a	b	a+b	a-b	a · b	$ \frac{a}{b} $

Clica  per anar a la pàgina següent.

3.c. Intervals

- Llegeix el text d'aquesta pàgina i les diferents pantalles de l'escena. Respon les següents preguntes:

a) A què anomenem interval d'extremes a i b? _____

b) Escribe matemàticament la definició dels diferents tipus d'intervals:

Interval	Exemple	Representació gràfica
$[a, b] =$		
$(a, b) =$		
$[a, b) =$		
$(a, b] =$		
$(-\infty, b] =$		
$[a, +\infty) =$		

c) Què és un entorn simètric de centre c i radi r?. Escribe-ho matemàticament, posa un exemple i representa'l.

d) Què és la longitud d'un interval? Posa diferents exemples.

Clica en el botó



per fer els exercicis que se't proposen.

Repeteix-los tants cops com sigui necessari, fins que no t'equivoquis.

EXERCICIS

9. Ordenar de menor a major:

a) $5,97509 \cdot 10^8$ b) $6,10314 \cdot 10^{-6}$ c) $\frac{-8243924}{5560}$ d) $\frac{5952091}{4605}$ e) $\sqrt{30694}$ f) $-\sqrt{6320}$

10. El radi d'una circumferència és de 4 m. Calcula la seva longitud

a) Truncant el resultat primer a cm i després a m.

b) Arrodonint el resultat primer a cm i després a m.


11. Calcula el valor absolut dels nombres $a=-3$ i $b=5$, i la distància entre ells.

12. Calcula $|a+b|$ $|a-b|$ $|a \cdot b|$ i $|a/b|$

13. Indica quins punts pertanyen a l'interval en cada cas:

a) Interval $(-74, -52]$. Punts: a) -53 b) -74 c) 11

b) Interval $(-\infty, 75]$. Punts: a) 32 b) 75 c) 76

Clica  per anar a la pàgina següent.



Recorda el més important – RESUM

Els nombres reals estan compostos pels _____ i pels _____.

Els nombre racionals es poden escriure sempre como una _____ i la seva expressió decimal és _____.

L'expressió decimal d'un nombre irracional és _____. Un nombre irracional no pot escriure's como una _____.

Què diferencia una aproximació per defecte d'una per excés? _____

Què és arrodonir? _____.

Què és truncar? _____.

L'error absolut comés en una aproximació és: _____.

L'error relatiu és: _____.

La notació científica s'utilitza per representar nombres _____ i _____. Amb aquesta notació s'observa ràpidament l'ordre de _____ del nombre representat. Per a que un nombre estigui en notació científica ha _____.


El valor absolut d'un nombre ens dóna la distància del punt que representa aquest nombre en la recta real al _____.

La distància entre dos nombres a i b ve donada pel valor absolut de _____.

Un interval obert d'extrems a i b és _____. S'escriu com _____ i gràficament es representa:

Un interval tancat d'extrems a i b és _____. S'escriu com _____ i gràficament es representa:

Un interval semiobert a l'esquerra d'extrems a i b és _____
_____. S'escriu com _____ i gràficament es representa:

Clica  per anar a la pàgina següent.



Per practicar

Ara anem a practicar resolent diferents exercicis. En les següents pàgines trobaràs exercicis de

Operacions amb nombres racionals

Tipus d'aproximacions


Càlculs aproximats

Intervals

Procura fer-ne al menys un de cada classe i un cop resolt, comprova la solució.


Completa l'enunciat amb les dades que apareixen en cada exercici de la pantalla i després resol-lo.

És important que primer el resolguis tu i després comprovis a l'ordinador si l'has fet bé.

Clica  per anar a la pàgina següent.

Operacions amb nombres racionals

1. Calcula el valor exacte de $A+B$ i de $B+C$. $A=$ _____ $B=$ _____ $C=$ _____	
2. Calcula el valor exacte de $A-B$, $C-A$ i $B-C$. $A=$ _____ $B=$ _____ $C=$ _____	
3. Calcula el valor exacte de $A \cdot B$, $A \cdot C$ i $B \cdot C$. $A=$ _____ $B=$ _____ $C=$ _____	
4. Calcula el valor exacte de A/B , de C/A i de B/C . $A=$ _____ $B=$ _____ $C=$ _____	


Clica  per anar a la pàgina següent.

Tipus de aproximacions

<p>5. Aproximar radicals. Considerant com a exacte el valor de $\sqrt{\quad} = \quad$. Escriu les aproximacions per defecte, per excés i els arrodoniments de primer, segon, tercer, quart i cinquè ordres.</p>	
<p>6. Mesures aproximades. La cinta mètrica que apareix té divisions fins a mig centímetre. La utilitzem per a mesurar una vareta i obtenim el valor: \quad. Entre quins valors exactes es troba la longitud real, suposant que aquest valor és: a) per defecte, b) per excés, c) arrodoniment a cm?</p>	
<p>7. Poblacions aproximades. Ens diuen que la població d'aquesta ciutat és de \quad habitants i que les 4 primeres xifres d'aquesta quantitat són significatives. Entre quins valors es troba realment la població de la ciutat?</p>	

Càlculs aproximats

<p>8. Suma i producte. Els valors $X = \quad$ i $Y = \quad$ són aproximacions per defecte de dos nombres reals desconeguts A i B. Esbrina entre quins valors exactes es troben $A+B$ i $A \cdot B$ i amb quina precisió poden donar-se els resultats.</p>	
<p>9. Calcular longitud. Amb motiu d'unes obres es vol envoltar la font de la imatge amb una tela metàl·lica protectora. Utilitzant un flexòmetre graduat en mil·límetres, s'obté la longitud del diàmetre de la font que és: \quad. Calcula la longitud de la tela metàl·lica utilitzant el nombre pi amb la quantitat de xifres decimals adequada.</p>	
<p>10. Calcular superfície. Copia l'enunciat i resol.</p>	

 Clica  per anar a la pàgina següent.

Intervals

Copia els intervals i realitza cinc exercicis de cada tipus.

11. Del tipus: intersecció

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

12. Del tipus: unió


- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

13. Del tipus: diferència

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

14. Del tipus: $-A$

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Clica  per anar a la pàgina següent.

Autoavaluació



Completa aquí cada un dels enunciats que van apareixent a l'ordinador i resol-lo, després introdueix el resultat per comprovar si la solució és correcta.

<p>1 Escribe la fracción generatriz del número _____.</p>	
<p>2 La milla anglesa fa 1609,34 m, arrodoneix a km _____ milles</p>	
<p>3 _____ _____</p>	
<p>4 Calcula l'error absolut i el relatiu (en %) que es comet quan aproximem _____ per _____.</p>	
<p>5 Amb la calculadora escriu un arrodoniment i un truncament a les mil·lèsimes de _____.</p>	
<p>6 El nombre _____ és una aproximació de x amb una cota d'error absolut de _____, entre quins valors està el nombre exacte x?</p>	
<p>7 Calcula amb tres xifres significatives el nombre de molècules d'un gas que, en condicions normals, caben en una pilota de _____ de radi.</p>	
<p>8 Escribe l'interval de la figura dibuixant-lo prèviament.</p>	
<p>9 Escribe l'interval format pels nombres x que compleixen _____</p>	
<p>10 _____ _____</p>	



Per practicar més

1. Donats els nombres:

$$A=2,7 \quad B=3,292929\dots \quad \text{i} \quad C=0,01030303\dots$$

Calcula els valors exactes de $A+B$, $C-A$ i $A \cdot C$. (Has de calcular les fraccions generatrius de A , B i C i operar).

2. Considerant $7,4833147735\dots$ com a valor exacte de $\sqrt{56}$, escriu les aproximacions per defecte, per excés i arrodoniments de primer i segon ordres (dècimes i centèsimes, respectivament).

3. La cinta mètrica que apareix a sota té unes divisions fins a mig cm. La utilitzem per mesurar una vareta i obtenim el valor que s'hi mostra. Entre quins valors exactes es troba la longitud real, suposant que aquest valor és: a) per defecte, b) per excés, i c) arrodoniment a cm?



Les aproximacions es poden utilitzar també amb nombres enters. Per a generalitzar aquesta idea utilitzarem el concepte de xifres significatives: "Si un nombre N és un valor aproximat d'un altre nombre P , direm que N té n xifres significatives si les primeres n xifres de N coincideixen amb les n primeres xifres de P . (No es consideren xifres significatives els zeros, la única finalitat dels quals és situar la coma decimal)". La definició anterior és bastant intuïtiva però no sempre és correcta del tot, per això precisem una mica més: "Direm que N té n xifres significatives si el nombre format amb les n primeres xifres de N difereix del nombre format amb les n primeres xifres de P (eliminant les comes decimals si n'hi hagués) en menys de $0,5$ ".

4. Ens diuen que la població d'una ciutat és de 1579000 habitants i que les 4 primeres xifres d'aquesta quantitat són significatives. Entre quins valors es troba realment la seva població?

5. Els valors $X=6,235$ i $Y=92,88$ són dues aproximacions per defecte de dos nombres reals desconeguts A i B . Esbrina entre quins valors exactes se troben $A+B$ i $A \cdot B$ i amb quina precisió poden donar-se els resultats.

6. Amb motiu d'unes obres es vol envoltar la font de la imatge amb una tela metàl·lica protectora. Utilitzant un flexòmetre graduat en mm, s'obté la longitud del diàmetre que s'indica. Calcula la longitud de la tela metàl·lica usant el nombre pi amb la quantitat de decimals adequada.



Long=1,804 ± 0,001 m.

7. La distància mitjana de Júpiter al Sol és de $7,7833 \cdot 10^8$ km. Totes les xifres són significatives i suposem que l'òrbita del planeta al voltant del Sol és circular. Calcula: a) La cota d'error en km; b) L'àrea del cercle que descriu el planeta.

Donats dos subconjunts, A i B , d'un cert conjunt de referència, E , la seva intersecció, $A \cap B$, és el conjunt d'elements comuns a ambdós; la seva unió, $A \cup B$, és el conjunt format per tots els elements de A i tots els de B ; la seva diferència, $A - B$, és el conjunt format per tots els elements de A que no pertanyen a B . El complementari de A , $-A$, és el conjunt format per tots els elements del conjunt de referència que no pertanyen a A .

8. Determina els conjunts $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ i el complementari ($-A$) en els casos:

1. $A = [-11, -9]$ $B = (-1, 6)$
2. $A = [-5, 5]$ $B = (3, 4)$
3. $A = [-2, 7]$ $B = (-2, 6)$