1

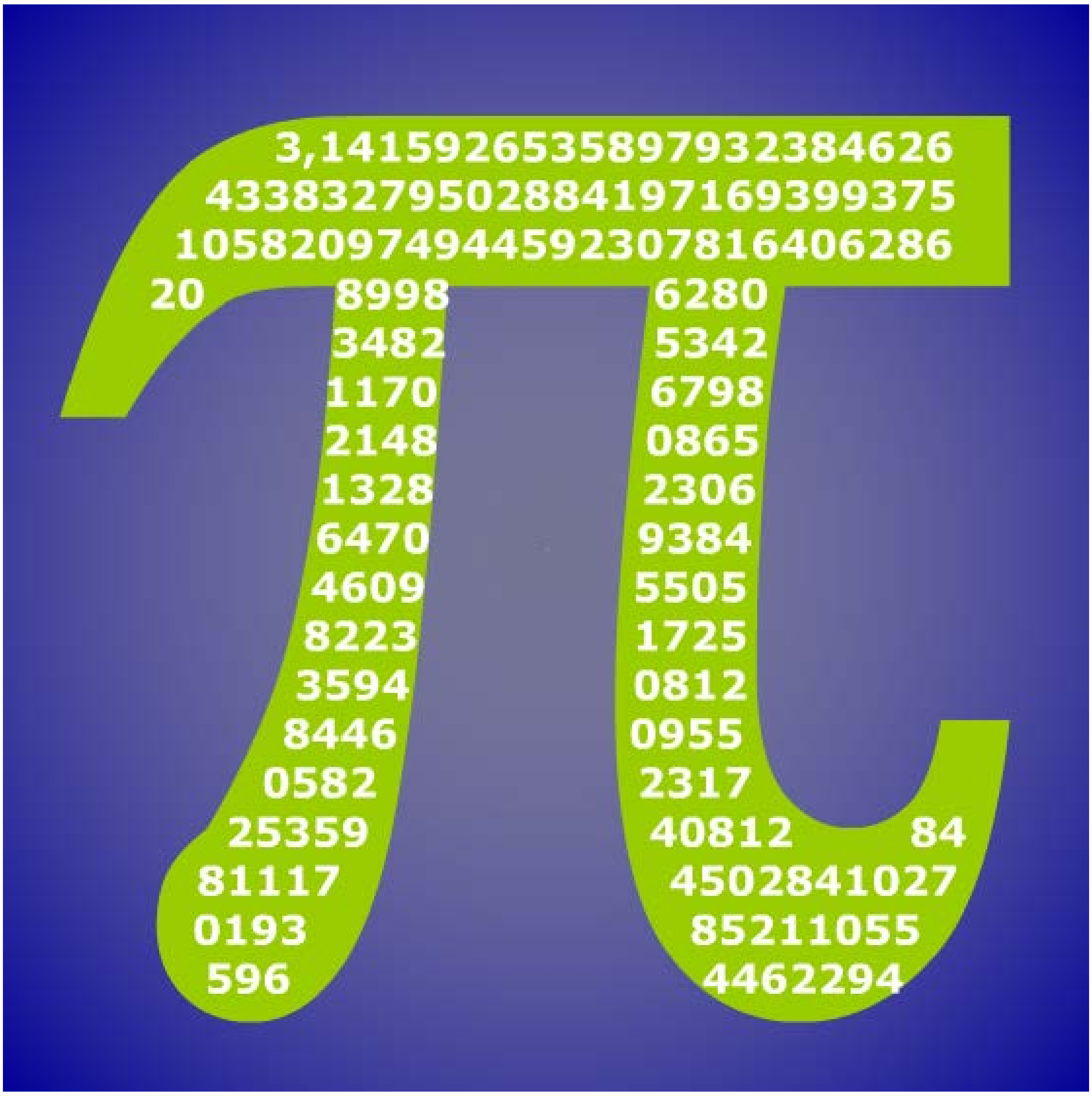
Els nombres reals

Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Classificar els nombres reals en racionals i irracionals.
- Aproximar nombres amb decimals fins a un ordre donat.
- Calcular la cota d'error d'una aproximació.
- Representar en la recta nombres reals.
- Expressar i representar intervals de nombres reals.
- Utilitzar la calculadora per facilitar els càlculs.

Abans de començar



Investigueu

Segurament heu realitzat alguna vegada algun càlcul amb el nombre pi; per exemple, calcular la longitud d'alguna circumferència i l'àrea d'un cercle. En aquests càlculs deveu haver utilitzat valors com 3,14, 3,1416, 3,141592... També és possible que hàgiu llegit en algun diari que s'ha descobert una altra xifra del nombre pi, o que ja es coneixen amb exactitud tantes xifres del nombre pi. Tot el que hem exposat resulta una mica confús. Quina de les quantitats anteriors és l'autèntic nombre pi? Com és possible que les anomenem totes pi si és obvi que són diferents? Com és possible que s'estiguin descobrint encara xifres de pi si fa molts anys que l'utilitzem?

Intenteu donar una resposta a aquestes preguntes. Si no ho aconseguiu ara torneu-ho a intentar després de veure aquest tema en profunditat. Per finalitzar la proposta aquí teniu una altra pregunta: Quina és o quina podria ser l'última xifra del nombre pi?

1. Nombres racionals i irracionals

Decimal periòdic

Heu vist en cursos anteriors que una fracció és un quocient entre dos nombres enters. La divisió d'aquests dos nombres dóna lloc a una **expressió decimal** amb un grup de xifres que es repeteixen periòdicament, l'anomenat **període,** i que pot ser:

- Decimal **periòdic pur**.
  La representació d'un nombre d'aquest tipus és:
  $\frac{12}{11} = 1{,}090909\ldots = 1,\overset{\frown}{09}$; el període és 09.

- Decimal **periòdic mixt.**
  $\frac{31}{15} = 2{,}06666\ldots = 2{,}0\overset{\frown}{6}$; el període és 6.

- Decimal exacte.
  $\frac{1}{8} = 0{,}125000\ldots = 0{,}125$

12 | 7
50 1,714285714
10
30
20
60
40
50
10
30
2

$$\frac{12}{7}$$

La resta sempre és menor que el divisor, després com a màxim en un nombre de passos igual al divisor, la resta es repetirà i les xifres decimals del quocient també.

Fracció generatriu

Ara veurem que qualsevol decimal periòdic pot expressar-se en forma de fracció, a la qual anomenem **fracció generatriu** del decimal en qüestió.

En estos casos no es necesario aplicar la fórmula sino que resulta más sencillo proceder de la siguiente manera:

- Decimal exacte
  Es treu la coma i es divideix per la unitat seguida de tants zeros com xifres decimals significatives té.

- Decimal periòdic pur
  En el numerador escrivim la part sencera i les xifres fins a finalitzar el primer període menys la part sencera, i en el denominador tants nous com xifres té el període.

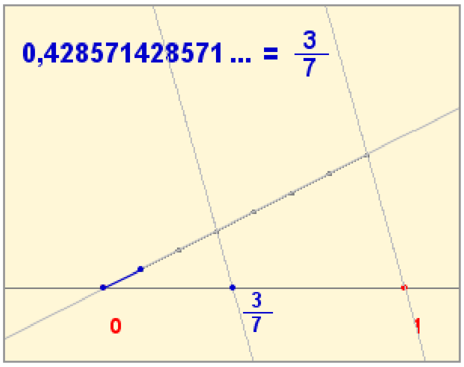
- Decimal periòdic mixt
  En el numerador s'escriu la part sencera seguida de les xifres fins a finalitzar el primer període menys la part sencera seguida de les xifres fins a començar el període, i en el denominador tants nous com xifres té el període seguits de tants zeros com xifres hi ha entre la coma i el començament del període.

- Decimal exacte $x=71{,}52$
  2 xifres decimals
  es multiplica per 10^2
  $100x=7152$
  $x = \frac{7152}{100}$

- Periòdic pur $x=853{,}11\ldots$
  Període amb 1 xifra
  és multiplica per 10
  $10x=8531{,}11..$
  Restant: $9x=8531-853$
  $x = \frac{7678}{9}$

- Periòdic mixt $x=4{,}9368368..$
  1 xifra entre la coma i el període
  es multiplica per 10
  $10x=49{,}368368\ldots$
  Període amb 3 xifres
  es multiplica per 10^3
  $10000x=49368{,}368\ldots$
  Restant: $9990x=49368-49$
  $x = \frac{49319}{9990}$

Nombres racionals



Els decimals exactes, periòdics purs i periòdics mixtos tenen en comú que la seva part decimal acaba sent periòdica (per la qual cosa a tots aquests els anomenem **decimals periòdics**). A més, hem vist que poden escriure's en forma de fracció o raó, per tant, a partir d'ara als decimals periòdics els anomenarem **nombres racionals.**

Els nombres racionals poden representar-se de forma ordenada sobre una línia recta, assignant a cada nombre un punt d'aquesta línia.

Nombres irracionals

Existeixen nombres que no poden escriure's en forma de fracció o de manera equivalent, ja que la seva part decimal no és periòdica. Aquests nombres reben el nom de **nombres irracionals.**

$\sqrt{2}$ no és un decimal periòdic

Si ho fos es podria escriure en forma de fracció irreductible:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r}{q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s}$$

quan p és p_1, p_2 ..., els factors primers de n; q_1, q_2... els de m i totes les "p" diferents de les "q".

Elevant al quadrat:

$$2 = \frac{n^2}{m^2} = \frac{{p_1}^2 \cdot {p_2}^2 \cdot \ldots \cdot {p_r}^2}{{q_1}^2 \cdot {q_2}^2 \cdot \ldots \cdot {q_s}^2} \Rightarrow n^2 = 2m^2$$

Després n és divisible per a 2, n=2t,

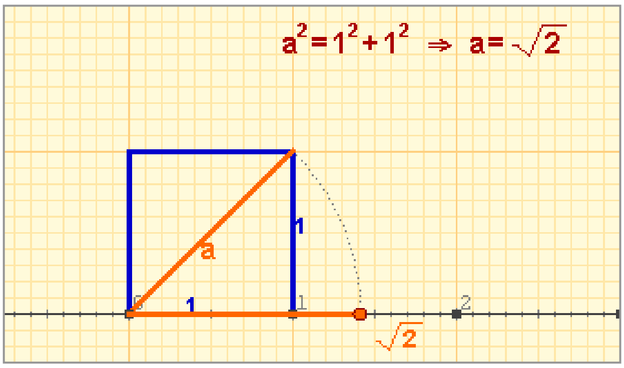
Per tant $\sqrt{2} = \frac{2t}{m}$

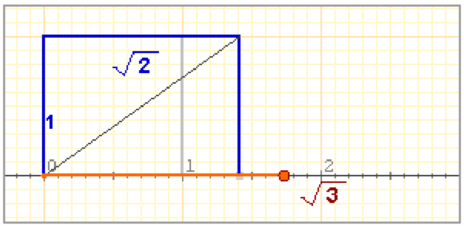
Elevant de nou al quadrat:

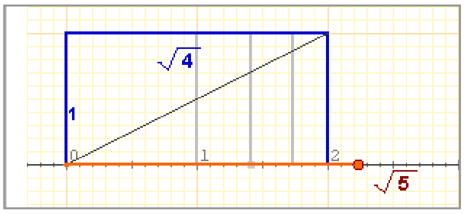
$$2m^2 = 4t^2 \Rightarrow m^2 = 2t^2$$

D'on es dedueix que també m és divisible per 2, el que és contradictori amb el fet que m/n sigui una fracció irreductible.

Per la qual cosa $\sqrt{2}$ no es pot escriure en forma de fracció i no és decimal periòdic.







Nombres reals

A les figures adjuntes podeu veure com poden representar-se en la recta nombres irracionals procedents d'arrels quadrades. Tanmateix, no tots els nombres irracionals poden representar-se mitjançant una tècnica simple com aquesta i s'ha de recórrer a mètodes aproximats per aconseguir-ho.

Ara, l'important és que tenim dos conjunts numèrics: els decimals periòdics o **racionals** i els decimals no periòdics o **irracionals.** La unió d'aquests dos conjunts és el conjunt dels **nombres reals.**

Nombres racionals

EXERCICIS resolts

1. Calculeu la fracció generatriu:

a) 2,375 $\quad 1000x = 2375 \quad \Rightarrow x = \dfrac{2375}{1000} = \dfrac{19}{8}$

b) 43,666... $\quad x = 43,\overset{\frown}{6}$

$10x = 436,\overset{\frown}{6} \quad 9x = 436 - 43 \quad \Rightarrow x = \dfrac{393}{9} = \dfrac{131}{3}$

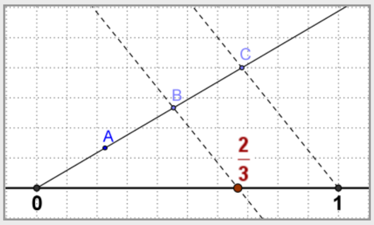
c) 4,3666... $\quad x = 4,3\overset{\frown}{6}$

$10x = 43,\overset{\frown}{6}$

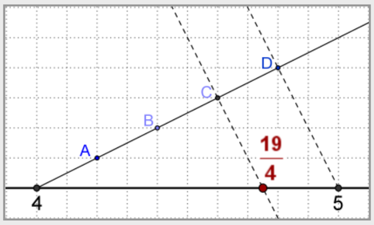
$100x = 436,\overset{\frown}{6} \quad 90x = 436 - 43 \quad \Rightarrow x = \dfrac{393}{90} = \dfrac{131}{30}$

2. Representeu en la recta:

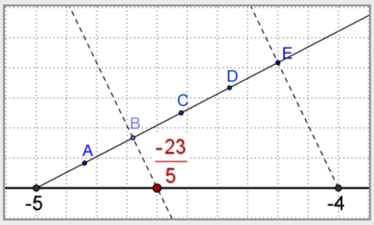
a) 2/3 $\qquad$ b) 19/4 = 4 + 3/4 $\qquad$ c) -23/5 = -5 + 2/5



Es divideix el segment (0,1) en 3 parts iguals i se n'agafen 2.



Ja que 19/4 = 4 +3/4, es divideix el segment (4,5) en 4 parts iguals i se n'agafen 3.

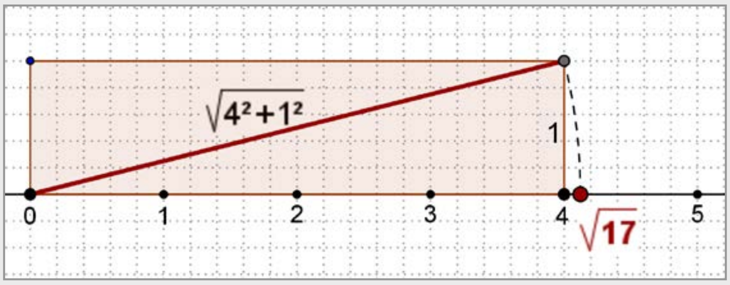


Ja que -23/5 = -5 +2/5, es divideix el segment (-5,-4) en 5 parts iguals i se n'agafen 2.

3. Determineu quin tipus de decimals són els següents

a) $\dfrac{92}{73}$ b) $\dfrac{57}{22}$ c) $\dfrac{27}{36}$ $\qquad$ a) Periòdic pur b) Periòdic mixt c) Exacte

4. Representa $\sqrt{17}$:



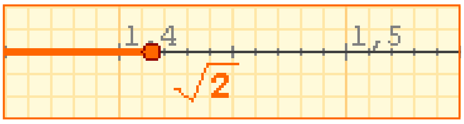
$17 = 16 + 1 = 4^2 + 1^2$
N'hi ha prou amb dibuixar un rectangle de base 4 unitats i altura 1, a partir de l'origen.
La diagonal mesura $\sqrt{17}$, amb el compàs es pren la mida i es marca el punt corresponent sobre la recta graduada.

5. Decidiu si els següents nombres són racionals o irracionals:

-5, 0, $\pi/2$, $\sqrt{16}$, 7/3, 2,313131...., $\sqrt{15}$, 1,01001000100001... , -4/5, 4,65

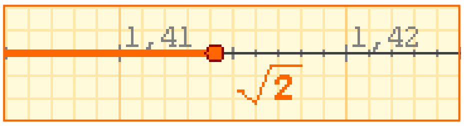
Són racionals els enters i decimals exactes o periòdics:
-5, 0, $\sqrt{16} = 4$, 7/3, -4/5 y 4,65
Són irracionals: $\pi/2$, $\sqrt{15}$, 1,01001000100001...

2. Calculando con números reales

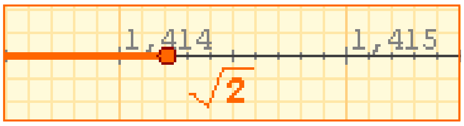


$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots$

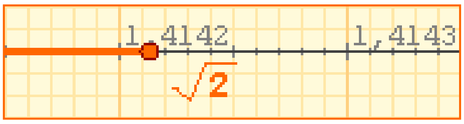
1,4 $<\sqrt{2}<$ **1,5**



1,41 $<\sqrt{2}<$ **1,42**



1,414 $<\sqrt{2}<$ **1,415**



1,4142 $<\sqrt{2}<$ **1,4143**

TRUNCAMENT	ARRODONIMENT
1,4	1,4
1,41	1,41
1,414	1,414
1,4142	1,4142
1,41421	1,41421
1,414213	1,414214
1,4142135	1,4142136
1,41421356	1,41421356

$\dfrac{\mathbf{506}}{\mathbf{13}} = \mathbf{38{,}923076923076\ldots}$

Aproximar amb 4 xifres:

- Truncament: **38,9230**

Error absolut:

$|38{,}9230-38{,}923076923076\ldots|$
$=0{,}000076923076\ldots$

Error relatiu:

$\dfrac{0{,}0000769230\ldots}{38{,}92307692\ldots} = 0{,}00000197$

$= 0{,}000197\%$

- Arrodoniment: **38,9231**

Error absolut:

$|38{,}9231-38{,}9230769230\ldots|$
$=0{,}000023076923\ldots$

Error relatiu:

$\dfrac{0{,}000023076923\ldots}{38{,}92307692\ldots} = 0{,}00000059$

$= 0{,}000059\%$

Aproximacions

Com heu comprovat, els nombres reals tenen infinites xifres decimals, per la qual cosa, en general, no és possible donar el seu valor exacte. En alguns casos, com els racionals (amb la fracció generatriu) i els radicals, sí que és possible representar-los de manera exacta. Però en infinitat d'altres casos (com el nombre π, o el nombre **e)** això no és possible.

Quan en un problema necessitem usar un nombre amb infinites xifres decimals, a la pràctica usem un valor aproximat que ens permeti obtenir un resultat acceptable encara que no sigui exacte.

Una aproximació és **per defecte** si és menor que el nombre exacte i **per excés** si és major.

- ✓ Quan en un decimal ens quedem amb les n primeres xifres decimals diem que hem realitzat un **truncament** amb n xifres significatives.
- ✓ Realitzem un **arrodoniment** amb n xifres significatives, si trunquem amb n xifres, deixant igual la xifra n-èsima si la següent és menor que 5, i augmentant l'última xifra en una unitat en cas contrari.

Observeu els exemples de l'esquerra on s'agafen diferents aproximacions de $\sqrt{2}$.

Mesura d'errors

Per fer càlculs amb nombres reals hem d'utilitzar, en molts casos, aproximacions. Sorgeix llavors el problema de saber fins a quin punt és vàlida l'aproximació realitzada. Per a això definim:

- ✓ **Error absolut:** és la diferència entre el valor exacte i el valor aproximat.
- ✓ **Error relatiu**: és el quocient entre l'error absolut i el valor exacte. Sol mesurar-se en %.

Quan el valor exacte és desconegut s'empra l'anomenada cota d'error, és el valor major que pot prendre el valor absolut. La seva magnitud ens permet saber fins a quina xifra decimal podem tenir la certesa que és correcta.

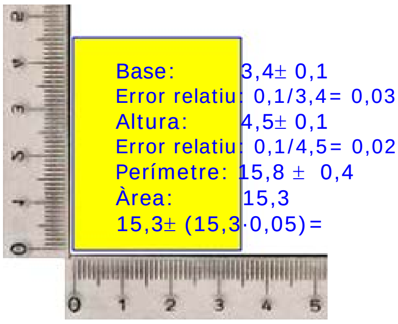
Càlcul amb aproximacions

El càlcul amb aproximacions està relacionat amb el problema de la mida. Ara mesurareu longituds fent servir un regle graduat en cm i mm. N'obtindrem dues aproximacions (una per defecte i una altra per excés) i donarem com a longitud el valor més probable o el que ens sembli més proper. La cota de l'error serà la diferència entre les dues aproximacions o la meitat d'aquesta diferència en cas de donar el valor més probable.

Si operem amb les mesures obtingudes d'aquesta manera:

- ✓ **L'error absolut** de la suma o la resta d'aproximacions és la suma dels errors absoluts de cadascuna.
- ✓ **L'error relatiu del producte** o quocient d'aproximacions és la **suma** dels errors relatius de cadascuna.

Aproximació per defecte: 3,20
Aproximació per excés: 3,30
Valor més probable: 3,25
Cota d'error: 3,25-3,20=0,05



Notació científica

Les aproximacions tenen un interès especial quan es treballa amb nombres molt grans o molt pròxims a 0. En aquest cas utilitzem una notació especial denominada **notació científica,** anomenada així perquè és en l'àmbit de la ciència on més se sol utilitzar.

Un nombre expressat en notació científica té la forma: $\mathbf{x \cdot 10^n}$, llavors x és major o igual que 1 i estrictament menor que 10, és a dir amb una sola xifra diferent de 0, en la seva part sencera.

Per operar amb nombres en notació científica apliquem les propietats de les potències.

La galàxia d'Andròmeda té un diàmetre de 100000 anys-llum i està situada a uns 2000000 d'anys-llum, quin és el seu diàmetre i quant dista en km?

Velocitat de la llum: 300000 km/s
En un any:
$300000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 =$
$9.460.800.000.000$ km $=$
$\mathbf{9{,}4608 \cdot 10^{12}}$

Diàmetre de la galàxia (km):
$10^5 \cdot 9{,}4608 \cdot 10^{12} = \mathbf{9{,}4608 \cdot 10^{17}}$

Distància (km):
$2 \cdot 10^6 \cdot 9{,}4608 \cdot 10^{12} = \mathbf{1{,}8922 \cdot 10^{19}}$

Quants àtoms d'oxigen caben en un bacteri?

$$\frac{1{,}59 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-7}} = 1{,}325 \cdot 10^4$$

Quants nuclis d'oxigen caben en un àtom?

$$\frac{1{,}2 \cdot 10^{-7}}{6{,}55 \cdot 10^{-12}} = 0{,}1832 \cdot 10^5$$

en notació científica $= 1{,}832 \cdot 10^4$

Amb la calculadora

Per introduir a la calculadora nombres en notació científica com:

- $9{,}0043 \cdot 10^{13}$

  Teclegeu 9 . 0043 EXP 13

  Apareixerà: 9.0043 13

- $6{,}0743 \cdot 10^{-18}$

  Teclegeu 6 . 0743 EXP +/- 18

  Apareixerà: 6.0743 -18

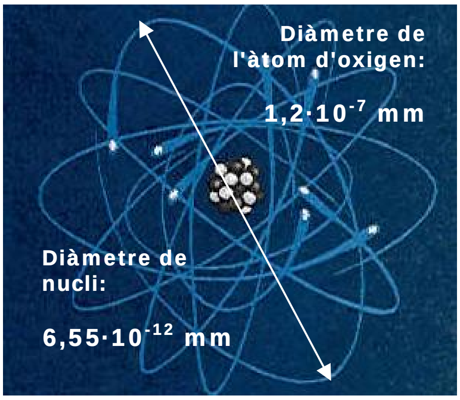
Si introduïu:

- $900{,}43 \cdot 10^{13}$

  Teclegeu 900 . 43 EXP 13

  Apareixerà: 900.43 13

  I pitjant = surt el número en notació científica: 9.0043 15



EXERCICIS resolts

6. El radi d'una circumferència són 3,96 m. Fent servir la calculadora i el valor que dóna, π calculeu:

a) La longitud de la circumferència truncant el resultat a cm.

$L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381...\text{m} = 2488 \text{ cm}$

b) La longitud de la circumferència arrodonint el resultat a cm

$L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381...\text{m} = 2488 \text{ cm}$

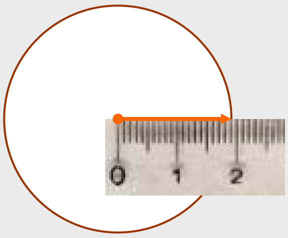
c) L'àrea del cercle truncant cm^2

$A = \pi\cdot r^2 = 49{,}26519935...\text{ m}^2 = 492651 \text{ cm}^2$

d) L'àrea del cercle arrodonint a cm^2

$A = \pi\cdot r^2 = 49{,}26519935...\text{ m}^2 = 492652 \text{ cm}^2$

7. Calculeu la longitud de la circumferència i l'àrea del cercle de la figura i les seves respectives cotes d'error.



Radi: 1,9 cm amb un error menor que 0,1 cm
Agafem com a valor de π: 3,1
Error relatiu en la mesura de π : 0,1/3,1=0,03
Error relatiu en la mesura del radi: 0,1/1,9
Longitud = $2\cdot3{,}1\cdot1{,}9=11{,}8$ amb un error relatiu=0,08
Longitud $=11{,}8\pm(11{,}8\cdot0{,}08)=11{,}8\pm0{,}9$
Àrea $=3{,}1\cdot1{,}9\cdot1{,}9=11{,}2$ amb un error relatiu 0,14
Àrea $=11{,}2\pm0{,}14\cdot11{,}2=11{,}2\pm1{,}6$

8. Els radars de trànsit mesuren la velocitat dels cotxes en carrers i carreteres. La legislació vigent té en compte que en tot mesurament es cometen errors per això concedeix un marge d'error del 10% (o un error relatiu de 0,10). Tenint en compte això calculeu la velocitat màxima a la qual pot anar un cotxe sense infringir la llei en els casos:

a) Autopista amb límit de velocitat de 120 km/h: $120 + 0{,}10\cdot120 = 132$ km/h

b) Carretera amb límit de velocitat de 90 km/h: $90 + 0{,}10\cdot90 = 99$ km/h

c) Via urbana amb límit de velocitat de 50 km/h: $50 + 0{,}10\cdot50 = 55$ km/h

9. Escriviu en notació científica o en notació decimal respectivament:

a) $0{,}000000002145 = 2{,}145\cdot10^{-9}$

b) $3{,}589\cdot10^{9} = 3589000000$

b) $1523000000000 = 1{,}523\cdot10^{12}$

d) $5{,}267\cdot10^{-5} = 0{,}00005267$

10. Amb les dades del tema i usant la calculadora si és cal, esbrineu quants sistemes solars com el nostre hi hauria al llarg del diàmetre de la galàxia d'Andròmeda:

Diàmetre d'Andròmeda: $9{,}4608\cdot10^{17}$ Diàmetre Sistema Solar: $9{,}0086\cdot10^{9}$

$\dfrac{9{,}4608\cdot10^{17}}{9{,}0086\cdot10^{9}} = 1{,}0502\cdot10^{8} \cong 105020000$ una mica més de 100 milions de sistemes.

11. Amb les dades del tema i fent servir la calculadora si cal, calculeu en mm^3 el volum d'un àtom d'oxigen considerant que és una esfera.

Radi de l'àtom d'oxígen: $6\cdot10^{-6}$ mm

Volumen $= \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\cdot6^3\cdot(10^{-6})^3 = 904{,}78\cdot10^{-18} = 9{,}0478\cdot10^{-16}$

4. La recta real

Ordenació de nombres reals

Qualsevol nombre real queda representat per un punt de la recta i, recíprocament, a tot punt de la recta li correspon un nombre real.

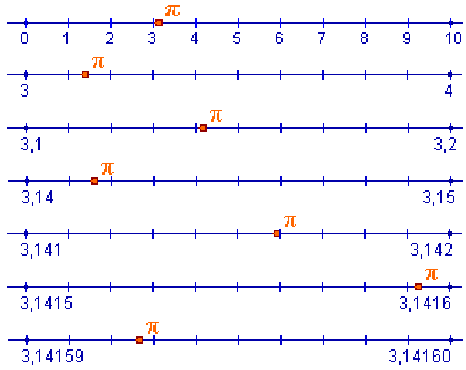
Observeu al gràfic com assignar un punt de la recta a un nombre irracional com π, mitjançant una successió d'intervals encaixats.

Això permet definir una relació d'ordre en el conjunt dels nombres reals:

✓ Donats dos nombres reals, ***a*** i ***b,*** direm que ***a és més petit que b,*** **a** < **b,** si en representar-los a és ***a*** l'esquerra de ***b.***

✓ També podem dir que els nombres a la dreta del zero són els **positius** i els de l'esquerra són els **negatius,** i **a és més petit que *b*** si la diferència **b – a** és positiva.

π = 3,141592353589793...



D'aquesta forma podem delimitar π entre dos nombres racionals, que ja sabem representar, i que són cada vegada més pròxims

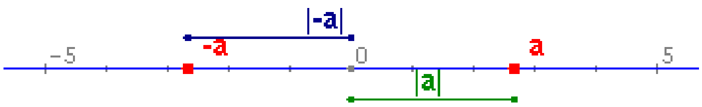
Valor absolut i distàncies

L'equivalència entre punts i nombres permet aplicar conceptes geomètrics al càlcul, en particular la idea de distància mitjançant el valor absolut d'un nombre.

✓ Anomenem **valor absolut** d'un nombre real, a, al major dels nombres ***a*** i –***a.*** El valor absolut de ***a*** es representa així: **|a|.**

Propietats del valor absolut

1) $|a| \geq 0$
2) $|a| = |-a|$
3) $|a+b| \leq |a| + |b|$
4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$



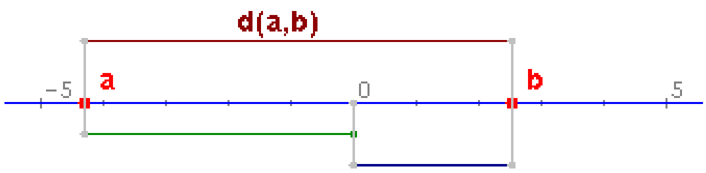
a=2,6828 **|a|=2,6828**
-a=-2,6828 **|-a|=2,6828**

El valor absolut d'un nombre representa la distància d'aquest nombre i zero. Podem generalitzar aquesta idea:

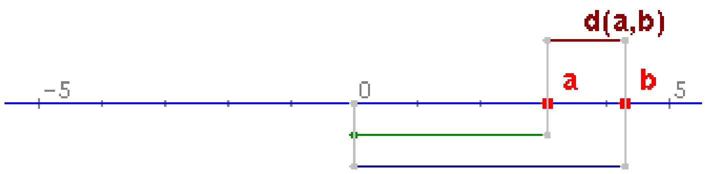
✓ Anomenem **distància** entre dos nombres reals, ***a*** i ***b,*** al valor absolut de la seva diferència:

d(a,b)=|b-a|=|a-b|

Si a i b tenen el mateix signe la distància entre a i b és la resta dels valors absoluts, i si el signe és diferent la suma.



a=-4,2946 **|a|=4,2946**
b=2,5447 **|b|=2,5447**
d(a,b)=6,8393



a=3,0054 **|a|=3,0054**
b=4,2861 **|b|=4,2461**
d(a,b)=1,2807

Interval tancat:
Els extrems pertanyen a l'interval.

$$[\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a \le x \le b\}$$

Interval obert:
Els extrems no pertanyen a l'interval.

$$(\mathbf{a,b}) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$$

Interval semiobert: Un extrem pertany a l'interval i a un altre no.

$$(\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a < x \le b\}$$

Entorn simètric d'a:

$$(\mathbf{a-r,a+r}) = \{x \in R \,/\, a - r < x < a + r\}$$

Semirecta tancada superiorment

$$(\mathbf{-\infty,b}] = \{x \in R \,/\, x \le b\}$$

Semirrecta oberta inferiorment

$$(\mathbf{a,+\infty}) = \{x \in R \,/\, a < x\}$$

Intervals: segments i semirectes

El concepte d'interval està lligat als conceptes geomètrics de segment i semirecta: un interval delimitat equival a un segment i un interval no delimitat equival a una semirecta.

✓ Dados dos números reales **a** y **b,** llamamos **intervalo de extremos a y b** al conjunto de números reales comprendidos entre ambos.

✓ La longitud de l'interval és la distància (a,b) = **|b-a|**

En els **intervals delimitats** depenent que els extrems pertanyin o no a aquest, es distingeixen els intervals tancats, oberts i semioberts (per l'esquerra o per la dreta).

Si es construeix un interval obert al voltant d'un punt a s'obté un **entorn simètric d'a i de radi r,** conjunt de nombres reals la distància del qual a "a" és menor que r.

Un **interval no delimitat** és el conjunt format per tots els nombres majors (o ≥), o menors (o ≤) que un de determinat, a, la cota inferior o superior respectivament. Es representen mitjançant una semirecta i la seva longitud és infinita.

EXERCICIS resolts

1. Ordeneu de menor a major:

   a) $5{,}97509 \cdot 10^{8}$ b) $6{,}10314 \cdot 10^{-6}$ c) $\dfrac{-8243924}{5560}$ d) $\dfrac{5952091}{4605}$ e) $\sqrt{30694}$ f) $-\sqrt{6320}$

   c < f < b < e < d < a

2. El radi d'una circumferència és de 4 m. Calculeu-ne la longitud

   2.1. Truncant el resultat primer a cm i després a m.

   L = 2·π·r =24,88141381...m = 2488 cm = 24 m

   2.2. Arrodonint el resultat primer a cm i després a m

   L = 2·π·r =24,88141381...m = 2488 cm = 25 m

3. Calculeu el valor absolut dels nombres a=-3 i b=5, i la distància entre aquests.

   |a|=3, |b|=5, dist(a,b)=|b-a|=|5-(-3)|=|8|=8

4. Calculeu |a+b| |a-b| |a·b| y |a/b|

   |a+b|=|-3+5|=|2|=2; |a-b|=|-3-5|=|-8|=8; |a·b|=|-3·5|=|-15|=15;

   |a/b|=|-3/5|=3/5

5. Indiqueu quins punts pertanyen a l'interval en cada cas:

   5.1. Interval (-74,-52]. Punts: a) –53 b) –74 c) 11 ***Resposta: cap***

   5.2. Interval (-∞,75]. Punts: a) 32 b) 75 c) 76 ***Resposta: a i b.***

Per practicar

1. Donats nombres:

A=2,7 B=3,292929... C=0,01030303...

Calculeu els valors exactes de A+B,C-A i A·C. (Heu de calcular les fraccions generatrius d'A, B i C i restar).

2. Fonament de dret 7,4833147735.... com el valor exacte de $\sqrt{56}$, escriviu les aproximacions per defecte, per excés i arrodoniments d'ordre primer i segon (desè, respectivament).

3. La cinta mètrica que apareix a baix té unes divisions fins a mig cm. La utilitzem per mesurar una vareta i n'obtenim el valor que s'hi mostra. Entre quins valors exactes es troba la longitud real, suposant que aquest valor és: a) per defecte; b) per excés; c) arrodoniment a cm.

Les aproximacions poden utilitzar-se també amb nombres enters. Per generalitzar aquesta idea farem servir el concepte de xifres significatives: *Si un número N és un valor aproximat d'un altre nombre P, direm que N té n xifres significatives si les primeres n xifres de N coincideixen amb les n primeres xifres de P. (No es consideren xifres significatives els zeros l'única finalitat dels quals és situar la coma decimal)".* La definició anterior és bastant intuïtiva però no sempre és correcta del tot, per això ens en cal una mica més: *"Direm que N té n xifres significatives si el nombre format amb les n primeres xifres de N difereix del nombre format amb les n primeres xifres de P (eliminant les comes decimals si n'hi hagués) en menys de 0,5".*

4. Ens diuen que la població d'una ciutat és de 1579000 habitants i que les 4 primeres xifres d'aquesta quantitat són significatives. Entre quins valors es troba realment la seva població?

5. Els valors X=6,235 i Y=92,88 són sengles aproximacions per defecte de dos nombres reals desconeguts A i B. Esbrineu entre quins valors exactes es troben A+B i A·B i amb quina precisió poden donar-se els resultats.

6. A causa d'unes obres es vol envoltar la font de la imatge amb una tela metàl·lica protectora. Utilitzant un flexòmetre graduat en mm, s'obté la longitud del diàmetre que s'indica. Calculeu la longitud de la tela metàl·lica fent servir el nombre pi amb la quantitat de decimals adequada.

7. La distància mitjana de Júpiter al Sol és de $7,7833 \cdot 10^8$ km. Totes les xifres són significatives i suposem que l'òrbita del planeta al voltant del Sol és circular. Calculeu: a) La cota d'error en km; b) L'àrea del cercle que descriu el planeta.

Donats dos subconjunts, A i B d'un cert conjunt de referència, E, la seva intersecció, A∩ B, és el conjunt d'elements comuns a ambdós; la seva unió, AUB, és el conjunts format per tots els elements d'A i tots els de B; la seva diferència, A-B, és el conjunt format per tots els elements d'A que no pertany a B. El complementari d'A -A, és el conjunt format per tots els elements del conjunt de referència que no pertanyen a A.

8. Determineu els conjunts AB∩, AUB, A-B i -A en els casos següents:

1. A = [-11,-9] B = (-1,6)
2. A = [-5,5] B = (3,4)
3. A = [-2,7] B = (-2,6)

Para saber más

Qüestions sobre pi

En la presentació del tema s'esmentava que el valor de pi eren 3'14, 3'1416... i es plantejaven una sèrie de preguntes sobre això:

Quina de les quantitats anteriors és l'autèntic nombre pi?

Segons heu vist al llarg del tema, en realitat cap de les anteriors quantitats no són el valor exacte de pi, es tracta d'aproximacions al nombre i el fet de posar més decimals o menys depèn de la precisió que necessitem en la mesura.

Com és possible que les anomenem totes pi si és obvi que són diferents?

El fet que anomenem pi a qualsevol de les quantitats anteriors es deu que és impossible utilitzar el valor exacte de la majoria dels nombres irracionals, per la qual cosa ens hem d'acontentar amb donar aproximacions a aquest valor. Com ja hem dit abans el nombre de xifres decimals amb què es dóna aquest nombre depèn de la precisió de mesura desitjada i el fet que, per exemple, la quarta xifra decimal sigui un 6 en 3,1416 i un 5 en 3,14159 és perquè l'aproximació es fa en cada cas per arrodoniment i, amb quatre xifres decimals, 3,1416 és més pròxim del valor exacte que 3,1415.

Alguns nombres irracionals com l'arrel quadrada de 2 sí que es poden representar en forma exacta, però si aquesta quantitat la volem mesurar a la pràctica, no ens quedarà més remei que donar un valor aproximat amb la precisió que desitgem.

Com és possible que s'estiguin descobrint encara xifres de pi si fa molts anys que l'utilitzem?

Els nombres irracionals tenen infinites xifres decimals que no es repeteixen de forma periòdica. Per trobar aquestes xifres existeixen diferents procediments o algorismes. Alguns d'aquests algorismes són relativament senzills, com el que s'utilitza per obtenir les xifres decimals de l'arrel quadrada de 2 (que antigament s'ensenyava a l'escola primària); d'altres, en canvi, són tremendament llargs i complexos. El nombre pi és en aquest segon grup. Actualment els algorismes per al càlcul de xifres decimals de pi s'executen amb potents ordinadors.

Quina és o quina podria ser l'última xifra del nombre pi?

Com hem dit abans, els nombres irracionals tenen xifres decimals infinites, per tant, no existeix l'última xifra del nombre pi. Com que, a més, les seves xifres no es repeteixen de forma periòdica no es pot predir per endavant quina xifra serà la que ocupi un determinat lloc fins que no s'aconsegueixi calcular-la.

Recordeu el més important

Els nombres reals

El conjunt de nombres reals està format pels nombres **racionals** i nombres **irracionals.**

- Un **nombre racional** és una fracció i tots els seus equivalents. Qualsevol nombre racional es pot expressar com un **decimal periòdic** i viceversa.
- Un nombre **irracional** és un nombre decimal il·limitat no **periòdic.**

Aproximacions d'un nombre real

A la pràctica és necessari usar aproximacions, quan treballem amb nombres amb infinites xifres decimals. Usem aproximacions **per defecte** i **per excés, truncaments** i **arrodoniments.**

Tots els nombres reals poden expressar-se com dues seqüències de nombres decimals que són aproximacions per defecte i per excés

- L'**error absolut** és la diferència positiva entre el valor exacte i el valor aproximat.
- L'**error relatiu** és el quocient entre el valor aproximat i el valor exacte, sol expressar-se en %.
- La **cota d'error** d'una aproximació és l'error absolut màxim possible.

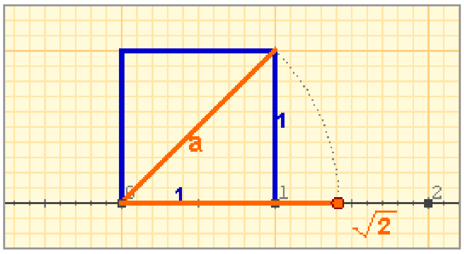
La recta real

El **valor absolut** d'un nombre a, **|a|** és el nombre prescindint del signe.

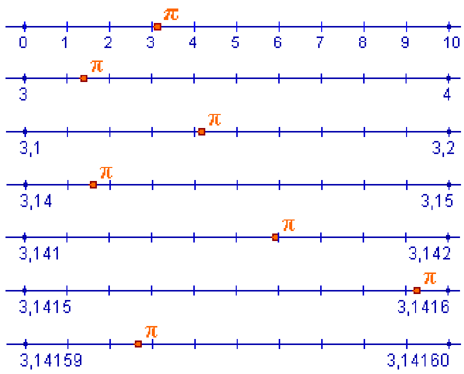
La **distància** entre dos punts a i b és el valor absolut de la seva diferència **|a−b| = |b−a|**

Intervals: segments i semirectes

- Interval tancat **[a,b]**
- Interval obert **(a,b)**
- Interval semiobert **(a,b]** ó **[a,b)**
- Interval no delimitat com a **[a,+∞)** ó **(-∞,a)**



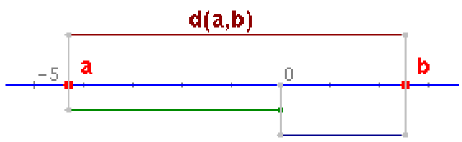
Tots els nombres reals, tant els racionals com els irracionals, es poden representar mitjançant un punt de la recta i recíprocament, a cada punt de la recta li correspon un nombre real.

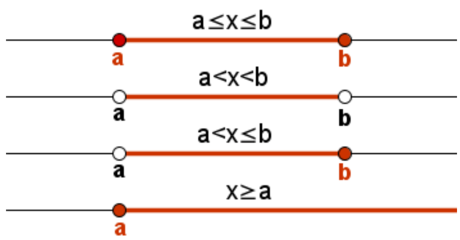


notació científica

Els nombres molt grans o molt petits s'expressen en notació científica **x·10ⁿ**

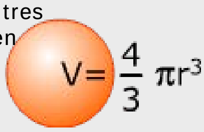
Per operar amb nombres en notació científica apliquem les propietats de les potències.





Autoavaluació

El nombre d’Avogadro
En condicions normals 22,4 litres de gas contenen **$6{,}023 \cdot 10^{23}$** mol·lècules.



1. Escriviu la fracció generatriu del nombre: 4,2323.

2. Una milla anglesa fa 1609,34 m. Arrodoniu a km 27 milles.

3. Expresseu en notació científica amb 3 xifres significatives, la distància en metres a una situada a 27 anys-llum.

4. Calculeu l’error absolut i el relatiu que cometem quan aproximer 22/7 per 3,14.

5. Amb la calculadora, escriviu un truncament i un arrodoniment a les mil·lèsimes de $\sqrt{21}$

6. El nombre 0,330 és una aproximació de x amb una cota d’error de $0{,}5 \cdot 10^{-3}$. ¿Entre quins valors queda comprès el nombre exacte x?

7. Considerant el núm. d'Avogadro, calculeu amb tres cifres significatives, el nombre de molècules d’un gas que, en condicions normals, caben en una pilota de 7 cm de radi.

8. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

9. Escriviu l’interval format pels números reals x que compleixen $|x-8| \leq 3$.

10. Trobeu dos nombres que distin 6 unitats de 3, i dos més que distin 3,5 unitats de -2, calculeu després la diferència entre el major i el menor de tots aquests nombres.

Solucions dels exercicis per practicar

1. A+B=5,9929292...

C-A=-2,68969696....

A·C=0,027818181....

2. a) De primer ordre:

Per defecte: 7,4

Per excés: 7,5

Arrodoniment: 7,5

b) De segon ordre:

Per defecte: 7,48

Per excés: 7,49

Arrodoniment: 7,48

3. a) Entre 1,100 i 1,105 m

b) Entre 1,095 i 1,100 m

c) Entre 1,095 i 1,105 m

4. Entre 1578500 i 1579500 amb una cota d'error de 500 habitants.

5. A+B = $99,1 \pm 0,1$

A·B = 579 ± 1

6. $5,67 \pm 0,01$ m

7. Cota d'error: $0,0001 \cdot 10^8 = 10000$ km

Àrea = $1,90 \cdot 10^{18}$ km^2

8. Cas 1

1) $A \cap B$ = vacío
2) $A \cup B = [-11,-9] \cup (-1,6)$
3) $A - B = A = [-11,-9]$
4) $-A = (-\infty,-11) \cup (-9,+\infty)$

Cas 2

1) $A \cap B = (3,4)$
2) $A \cup B = [-5,5]$
3) $A - B = [-5,3] \cup [4,5]$
4) $-A = (-\infty,-5) \cup (5,+\infty)$

Cas 3

1) $A \cap B = [-2,6)$
2) $A \cup B = [-2,7]$
3) $A - B = [6,7]$
4) $-A = (-\infty,-2) \cup (7,+\infty)$

solucions de L'AUTOAVALUACIÓ

1. 419/99

2. 43 km

3. $2,55 \cdot 10^{17}$

4. Error absolut: 0,00285714...
Error relatiu: 0,0009 ≈ 0,1%

5. zarza. :4,583 trun.: 4,582

6. entre 0,3295 i 0,3305

7. $3,86 \cdot 10^{22}$

8. (3, 5]

9. [5, 11]

10. -3 y 9; -5,5 y 1,5
9 – (-5,5) =14,5