8

Problemes geomètrics

Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Aplicar les raons trigonomètriques per estudiar les relacions que existeixen entre els angles i els costats de les figures planes.
- Calcular el perímetre i l'àrea de les figures planes aplicant les fórmules conegudes i les raons trigonomètriques quan sigui necessari.
- Aplicar les raons trigonomètriques per estudiar les relacions que existeixen entre les arestes i els angles dels cossos geomètrics.
- Calcular l'àrea lateral, l'àrea total i el volum dels cossos geomètrics aplicant les fórmules conegudes i les raons trigonomètriques quan sigui necessari.

Abans de començar

Per resoldre les activitats d'aquesta unitat, es necessita utilitzar la calculadora. Moltes de les operacions que es realitzaran són arrels i raons trigonomètriques.

En realitzar una arrel quadrada o en calcular una raó trigonomètrica, excepte en alguns casos, s'obtindrà un nombre irracional.

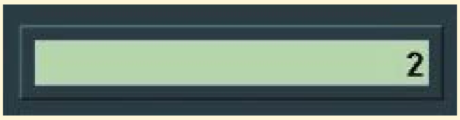
Tots els resultats estan expressats amb dues xifres decimals, però si s'ha de tornar a fer servir una dada, es convenient utilitzar-la amb totes les seves xifres decimals i no només amb les dues amb les que s'ha expressat.

Observa alguns errors que es cometen per no treballar amb totes les xifres decimals.

Calcula el valor de $\sqrt{2}$

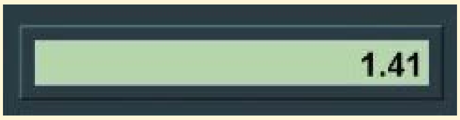
La pantalla de la calculadora s'emplena de xifres decimals. És un nombre irracional (amb infinites xifres decimals), encara que només veiem unes quantes. En canvi la calculadora emmagatzema el valor exacte a la seva memòria.

Eleva al quadrat el resultat



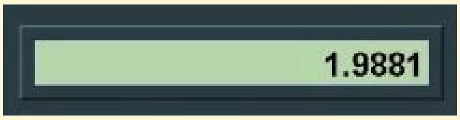
Amb una de les tecles de la teva calculadora pots elevar al quadrat el nombre que tens a la pantalla. Troba-la i realitza l'operació. Observa que s'obté com a resultat 2, com era d'esperar

Què succeeix si s'arrodoneix l'arrel a dues xifres decimals?



Eleva ara al quadrat el numero 1,41. Què s'obté?

No s'obté 2!



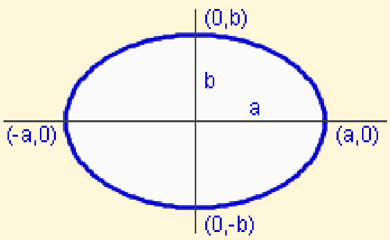
Resulta un nombre amb quatre xifres decimals, proper a 2, però diferent. Si s'arrodoneix a dues xifres decimals, es perd exactitud en els resultats.

Prova a realitzar els mateixos càlculs utilitzant més xifres decimals. S'obtenen resultats exactes o aproximats?

Realitza ara càlculs similars fent servir les raons trigonomètriques

Investiga: Àrees d'altres figures

Es pot calcular l'àrea de figures planes diferents de les estudiades en aquest tema, per exemple, una el·lipse?



1. Figures planes

Triangles

La suma dels angles d'un triangle és igual a 180º.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$$

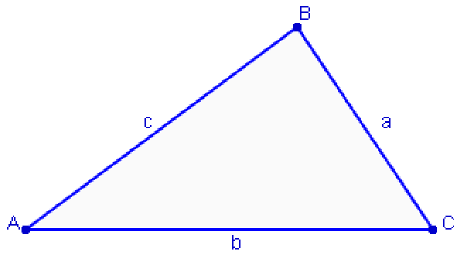


Figura 1. Triangle
Els vèrtexs d'un triangle es representen amb lletres majúscules. Els costats amb lletres minúscules. Un costat i un vèrtex oposat porten la mateixa lletra.

El **perímetre** d'un triangle és la suma de les longituds dels tres costats.

$$P = a + b + c$$

L'**àrea** o la superfície d'un triangle és la meitat del producte de la base per l'altura.

$$S = \frac{a \cdot h_A}{2} \qquad S = \frac{b \cdot h_B}{2} \qquad S = \frac{c \cdot h_C}{2}$$

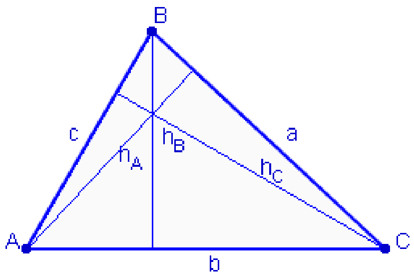


Figura 2. Altures d'un triangle.
L'altura és la línia perpendicular a cadascun dels costats que passa pel vèrtex oposat. Pel càlcul de l'àrea, l'altura és la distància de cada vèrtex al costat oposat.

Si en un triangle qualsevol es traça una altura, es formen dos triangles rectangles. En ells es pot aplicar el Teorema de Pitàgores i la definició de les raons trigonomètriques

A la figura 3, al triangle ADB es verifica:

$$\sin A = \frac{h_B}{c} \Rightarrow h_B = c \cdot \sin A \Rightarrow S = \frac{b \cdot h_B}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$$

De la mateixa forma, amb els altres vèrtexs, s'obté:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} \qquad S = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} \qquad S = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$$

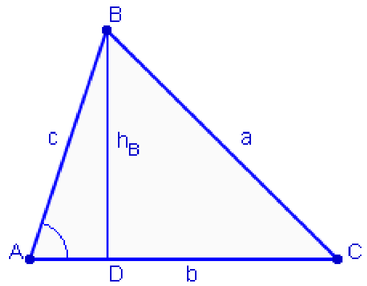


Figura 3. Altura sobre el vèrtex B

Un altre mètode pel càlcul de l'àrea és la **fórmula d'Heró**.

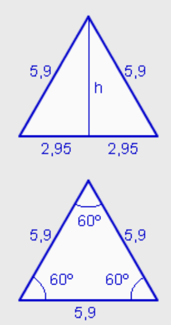
Sigui $p = \frac{a+b+c}{2}$ el semiperímetre del triangle.

Aleshores:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

EXERCICIS resolts

1. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de 5,9 centímetres de costat.



S'aplica el Teorema de Pitàgores per calcular l'altura

$$h = \sqrt{5,9^2 - 2,95^2} = \sqrt{26,1075} = 5,11\,cm$$

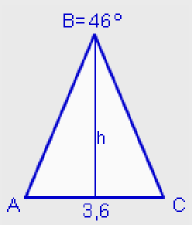
$$S = \frac{5,9 \cdot 5,11}{2} = 15,07\ cm^2$$

Un altre mètode: $S = \dfrac{5,9 \cdot 5,9 \cdot \text{sen}\,60^o}{2} = 15,07\ cm^2$

Amb la fórmula d'Heró: $p = \dfrac{5,9+5,9+5,9}{2} = 8,85$

$$S = \sqrt{8,85 \cdot (8,85-5,9) \cdot (8,85-5,9) \cdot (8,85-5,9)} = 15,07\ cm^2$$

2. El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 3,6 cm i l'angle diferent mesura 46º. Calcula el perímetre i l'àrea.



$$A+B+C=180^o \rightarrow A+C=134^o \rightarrow A=C=67^o$$

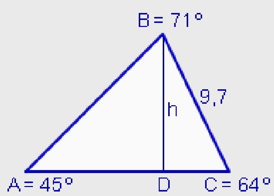
$$\cos 67^o = \frac{1,8}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1,8}{\cos 67^o} = 4,61\ cm$$

$$tg\,67^o = \frac{h}{1,8} \rightarrow h = 1,8 \cdot tg 67^o = 4,24\ cm$$

Perímetre: $P=4,61+4,61+3,6=12,81$ cm

Àrea: $S = \dfrac{3,6 \cdot 4,24}{2} = 7,63\ cm^2$

3. Els angles d'un triangle escalè mesuren 45º, 64º i 71º i el costat menor mesura 9,7 cm. Calcula el perímetre.



$$\sin 64^o = \frac{h}{9,7} \rightarrow h = 9,7 \cdot \sin 64^o = 8,72\,cm$$

$$\cos 64^o = \frac{\overline{DC}}{9,7} \rightarrow \overline{DC} = 9,7 \cdot \cos 64^o = 4,25\,cm$$

$$\sin 45^o = \frac{8,72}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{8,72}{\sin 45^o} = 12,33\,cm$$

$$\cos 45^o = \frac{\overline{AD}}{12,33} \rightarrow \overline{AD} = 12,33 \cdot \cos 45^o = 8,72\,cm$$

Perímetre: $P=9,7+12,33+4,25+8,72=35$ cm

1. Figures planes

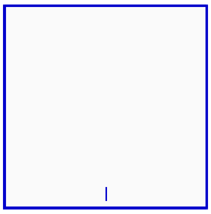
Paral·lelograms

Un **paral·lelogram** és un quadrilàter que té els costats oposats paral·lels. La suma dels angles interiors d'un paral·lelogram és igual a 360º.

Hi ha quatre paral·lelograms: quadrat, rectangle, rombe i romboide.

El perímetre d'un paral·lelogram és la suma de les longituds dels quatre costats.

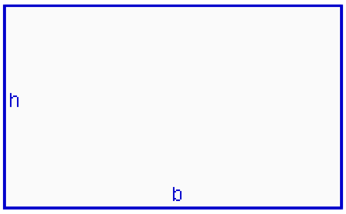
L'àrea de cadascun dels paral·lelograms és:



Quadrat

Quadrat

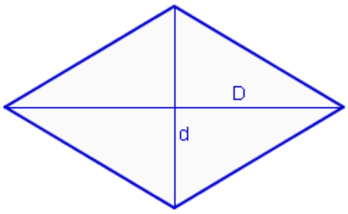
$$S = \text{costat}^2$$



Rectangle

Rectangle

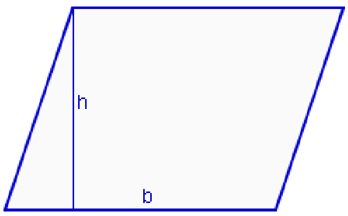
$$S = \text{base} \times \text{altura}$$



Rombe. Les diagonals divideixen al rombe en quatre triangles rectangles iguals.

Rombe

$$S = \frac{\text{Diagonal major} \times \text{diagonal menor}}{2}$$



Romboide. Al dibuixar l'altura es forma un triangle rectangle.

Romboide

$$S = \text{base} \times \text{altura}$$

EXERCICIS resolts

4. a) Calcula l'àrea d'un quadrat de 17,2 cm de costat.

b) Calcula el perímetre d'un quadrat de 5975,29 cm^2 d'àrea.

a) $S=17{,}2^2=295{,}84\ cm^2$

b) $l=\sqrt{5975{,}29}=77{,}3\ cm \quad \rightarrow \quad P=4\cdot 77{,}3=309{,}2\ cm.$

5. a) Calcula l'àrea d'un rectangle de 45,6 cm de base i 32,5 cm d'altura.

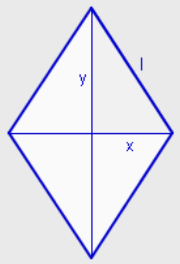
b) Calcula la base d'un rectangle de 364,5 cm^2 d'àrea i 24,3 cm d'altura.

a) $S=45{,}6\cdot 32{,}5=1482\ cm^2$

b) $b=\dfrac{364{,}5}{24{,}3}=15\ cm$

6. Calcula el costat i els angles d'un rombe les diagonals del qual mesuren 12,7 i 19,6 cm.

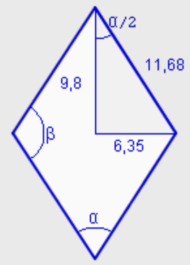
$$x=\frac{12{,}7}{2}=6{,}35\ cm \qquad y=\frac{19{,}6}{2}=9{,}8\ cm$$



$$l^2=6{,}35^2+9{,}8^2 \rightarrow l=\sqrt{136{,}36}=11{,}68\ cm$$

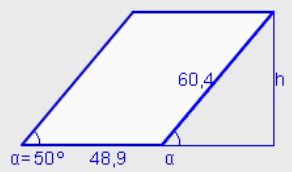
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{6{,}35}{11{,}68}=0{,}5438 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}5749\ rad$$

$$\alpha = 1{,}1499\ rad = 65^o\ 52'\ 59{,}45''$$



$$2\alpha + 2\beta = 360^o \rightarrow \beta = 180 - \alpha$$
$$\beta = 114^o\ 7'\ 0{,}55''$$

7. Calcula l'àrea del romboide de la figura sabent que els costats mesuren 60,4 i 48,9cm i l'angle menor que formen els seus costats mesuren 50º.



$$\sin\alpha=\frac{h}{60{,}4} \rightarrow h=60{,}4\cdot\sin 50^o=46{,}27\ cm$$

Àrea: $S=48{,}9\cdot 46{,}27=2262{,}56\ cm^2$

1. Figures planes

Trapezis

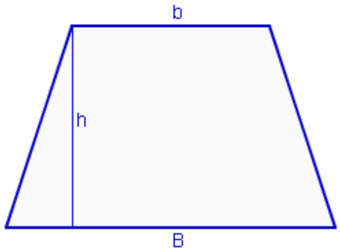
Un **trapezi** és un quadrilàter que té dos costats paral·lels. La suma dels angles interiors d'un quadrilàter és igual a 360º.

El perímetre d'un trapezi és la suma de les longituds dels quatre costats.

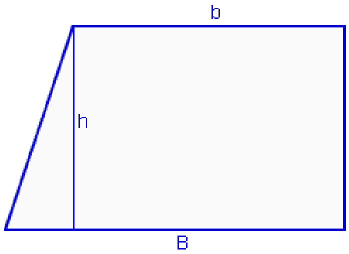
L'àrea d'un trapezi és:

$$S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

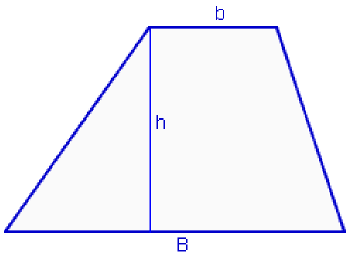
Si en un trapezi es traça l'altura per qualsevol dels vèrtexs de la base menor es forma un triangle rectangle. En aquest triangle es pot aplicar el Teorema de Pitàgores i la definició de les raons trigonomètriques.



Trapezi isòsceles



Trapezi rectangle



Trapezi escalè

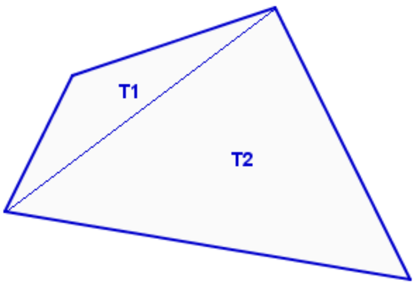
Trapezoides

Un **trapezoide** és un quadrilàter que no té costats paral·lels. La suma dels angles interiors d'un trapezoide és igual a 360º.

El perímetre d'un trapezoide és la suma de les longituds dels quatre costats.

No hi ha fórmules per calcular l'àrea o la superfície d'un trapezoide. Per calcular l'àrea es traça una diagonal i es divideix la figura en dos triangles. L'àrea és la suma de les àrees dels triangles.

$$S = T_1 + T_2$$

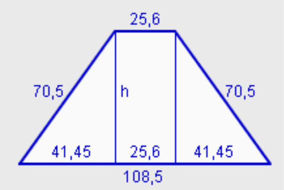


Trapezoide descompost en dos triangles

EXERCICIS resolts

8. Calcula el perímetre i l'àrea d'un trapezi isòsceles les bases del qual mesuren 25,6 i 108,5 i els costats no paral·lels 70,5 cm.

Perímetre: P=108,5+25,6+70,5+70,5=275,1 cm



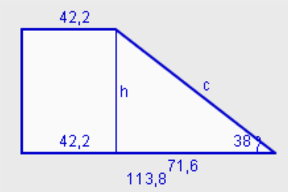
$$\frac{108,5 - 25,6}{2} = 41,45$$

$$h^2 + 45,41^2 = 70,5^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{3252,15} = 57,03\,\text{cm}$$

$$\text{Àrea:} \quad S = \frac{(108,5 + 25,6)\cdot 57,03}{2} = 3823,7\,\text{cm}^2$$

9. Calcula el perímetre i l'àrea d'un trapezi rectangle les bases del qual mesuren 42,2 i 113,8 i l'angle que forma el costat oblic amb la base major mesura 38º.

113,8-42,2=71,6 cm



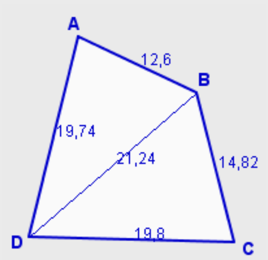
$$\text{tg}\,38^\circ = \frac{h}{71,6} \quad \rightarrow \quad h = 71,6 \cdot \text{tg}\,38^\circ = 55,94\,\text{cm}$$

$$\cos 38^\circ = \frac{71,6}{c} \quad \rightarrow \quad c = \frac{71,6}{\cos 38^\circ} = 90,86\,\text{cm}$$

Perímetre: P=113,8+42,2+55,94+90,86=302.8 cm

$$\text{Àrea:} \quad S = \frac{(113,8 + 42,2)\cdot 55,94}{2} = 4363,32\,\text{cm}^2$$

10. Calcula el perímetre i l'àrea del trapezoide amb les dades que s'indiquen: AB=12,6 cm. BC=14,82 cm. CD=19,8 cm. DA=19,74 cm. DB=21,24 cm.



Perímetre: P=12,6+14,82+19,8+19,74=66,96 cm

Àrea = Àrea del triangle ABD + Àrea del triangle BCD.

Àrea del triangle ABD:

$$\text{Fórmula d'Heró:} \quad p = \frac{12,6 + 21,24 + 19,74}{2} = 26,79$$

$$S = \sqrt{26,79\cdot(26,79 - 12,6)\cdot(26,79 - 21,24)\cdot(26,79 - 19,74)} = 121,96\ \text{cm}^2$$

Àrea del triangle ABD:

$$\text{Fórmula d'Heró:} \quad p = \frac{14,82 + 19,8 + 21,24}{2} = 27,93$$

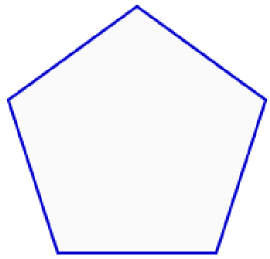
$$S = \sqrt{27,93\cdot(27,93 - 14,82)\cdot(27,93 - 19,8)\cdot(27,93 - 21,24)} = 141,12\ \text{cm}^2$$

Àrea del trapezoide = 121,96+141,12=263,08 cm^2

1. Figures planes

Polígons regulars

No hi ha fórmules per calcular l'àrea o la superfície d'un trapezoide. Per calcular l'àrea es traça una diagonal i es divideix la figura en dos triangles. L'àrea és la suma de les àrees dels triangles.



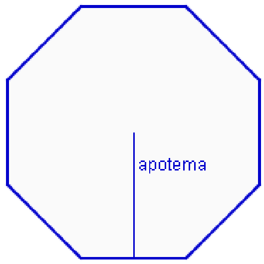
Pentàgon regular

El perímetre d'un polígon regular és la suma de les longituds dels seus costats.

L'**apotema** és el segment que uneix el centre del polígon amb el punt mig de cada costat.

L'àrea s'obté com la meitat del producte del perímetre per l'apotema.

$$S = \frac{P \times a}{2}$$

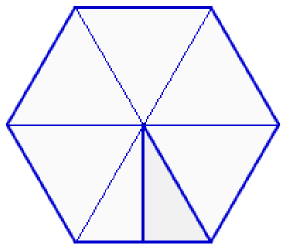


Octògon regular. Apotema

Un polígon regular es pot dividir en triangles isòsceles. L'apotema divideix aquests triangles en triangles rectangles. L'apotema coincideix amb l'altura del triangle.

L'angle diferent d'aquests triangles isòsceles es calcula dividint 360º entre el nombre de triangles.

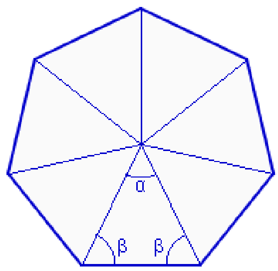
$$\alpha = \frac{360^{\circ}}{\text{nre.costats}}$$



Hexàgon regular

Els dos angles iguals es calculen sabent que la suma dels angles d'un triangle és igual a 180º.

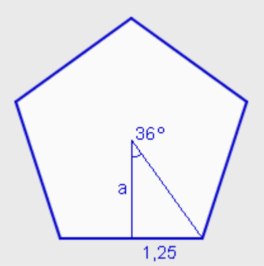
$$\alpha + 2\beta = 180^{\circ} \Rightarrow \beta = \frac{180 - \alpha}{2}$$



Heptàgon regular

EXERCICIS resolts

11. Calcula el perímetre i l'àrea d'un pentàgon regular de 2,5 cm de costat.



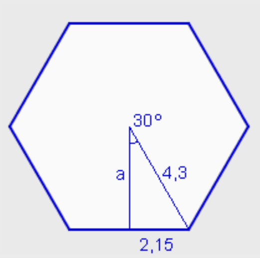
Perímetre: $P=5\cdot 2,5=12,5$ cm

$$\frac{360^{o}}{5}=72^{o} \qquad \frac{72^{o}}{2}=36^{o}$$

$$tg\,36^{o}=\frac{1,25}{a} \rightarrow a=\frac{1,25}{tg\,36^{o}}=1,72\,cm$$

$$\text{Àrea: } S=\frac{5\cdot 2,5\cdot 1,72}{2}=10,75\ cm^{2}$$

12. Calcula el perímetre i l'àrea d'un hexàgon regular de 4,3 cm de costat.



Perímetre: $P=6\cdot 4,3=25,8$ cm

$$\frac{360^{o}}{6}=60^{o} \qquad \frac{60^{o}}{2}=30^{o}$$

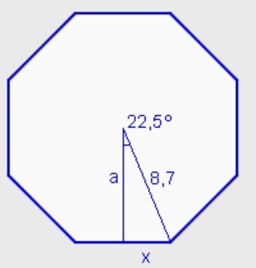
$$tg\,30^{o}=\frac{2,15}{a} \rightarrow a=\frac{2,15}{tg\,30^{o}}=3,72\,cm$$

$$\text{Àrea: } S=\frac{6\cdot 4,3\cdot 3,72}{2}=48,04\ cm^{2}$$

A l'hexàgon, el costat coincideix amb el radi de la circumferència circumscrita. Es pot calcular l'apotema utilitzant el Teorema de Pitàgores.

$$a^{2}+2,15^{2}=4,3^{2} \rightarrow a=\sqrt{13,87}=3,72\,cm$$

13. Calcula el perímetre i l'àrea d'un octògon regular inscrit en una circumferència 8,3 cm de radio.



$$\frac{360^{o}}{8}=45^{o} \qquad \frac{45^{o}}{2}=22,5^{o}$$

$$\sin 22,5^{o}=\frac{x}{8,7} \rightarrow x=8,7\cdot\sin 22,5^{o}=3,33\,cm$$

$$\cos 22,5^{o}=\frac{a}{8,7} \rightarrow a=8,7\cdot\cos 22,5^{o}=8,04\,cm$$

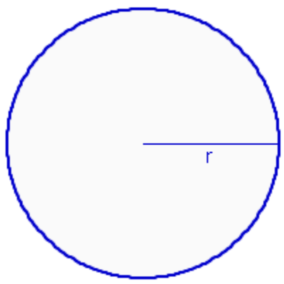
Costat $=2\cdot 3,33=6,66$ cm Perímetre: $P=8\cdot 6,66=53,27$ cm

$$\text{Àrea: } S=\frac{8\cdot 6,66\cdot 8,04}{2}=214,08\ cm^{2}$$

1. Figures planes

Cercles, sectors i segments circulars

La longitud de la circumferència i l'àrea del cercle es calculen amb les fórmules:

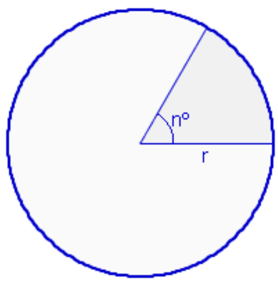


Cercle de radi r

$$\mathbf{L = 2 \cdot \pi \cdot r}$$

$$\mathbf{S = \pi \cdot r^2}$$

Un **sector circular** és la regió del cercle limitada per dos radis. En dividir una circumferència en 360 parts iguals s'obtenen sectors circulars d'amplitud 1º. La longitud i l'àrea d'un sector s'obtenen dividint la longitud i l'àrea total per 360 i multiplicant pel nombre de graus.



Sector circular

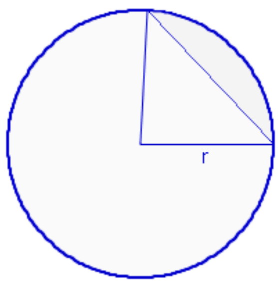
Longitud de l'arc:

$$\mathbf{L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot nº}{360}}$$

Àrea:

$$\mathbf{L = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot nº}{360}}$$

Un **segment circular** és la regió del cercle limitada per una corda. Quan unim els extrems de la corda amb el centre s'obté un sector circular.



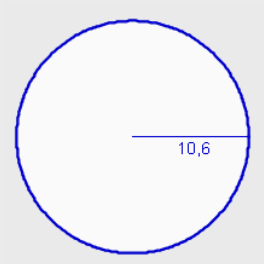
Segment circular

El perímetre d'un segment circular és igual a la suma de la longitud de l'arc i la longitud de la corda que el determinen.

L'àrea d'un segment circular és igual a la diferència de l'àrea del sector circular i l'àrea del triangle que el determinen.

EXERCICIS resolts

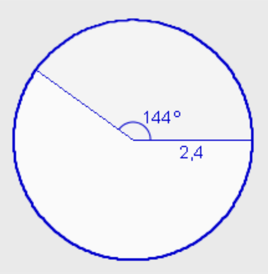
14. Calcula la longitud i l'àrea d'un cercle 10,6 cm de radi.



Longitud: $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 10{,}6 = 66{,}6$ cm

Àrea: $S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 10{,}6^2 = 352{,}99$ cm^2

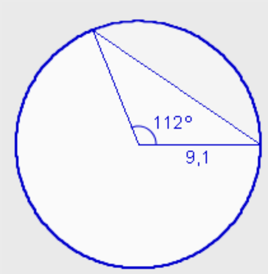
15. Calcula la longitud d'arc i l'àrea d'un sector circular de 144º comprès en un cercle de 2,4 cm de radi.

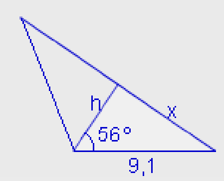


Longitud: $L = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 2{,}4 \cdot 144}{360} = 6{,}03$ cm

Àrea: $S = \dfrac{\pi \cdot 2{,}4^2 \cdot 144}{360} = 7{,}24$ cm^2

16. Calcula l'àrea d'un segment circular d'un cercle de 9,1 cm, sabent que l'angle que formen els radis que passen pels seus extrems mesura 112º.





Àrea del sector: $S_1 = \dfrac{\pi \cdot 9{,}1^2 \cdot 112}{360} = 80{,}94$ cm^2

$\sin 56^{\circ} = \dfrac{x}{9{,}1} \rightarrow x = 9{,}1 \cdot \sin 56^{\circ} = 7{,}54$ cm

$\cos 56^{\circ} = \dfrac{h}{9{,}1} \rightarrow h = 9{,}1 \cdot \cos 56^{\circ} = 5{,}09$ cm

Costat $= 2 \cdot 7{,}54 = 15{,}096$ cm

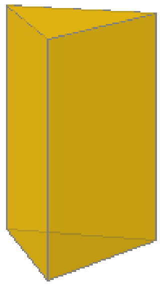
Àrea del triangle: $S_2 = \dfrac{15{,}09 \cdot 5{,}09}{2} = 38{,}39$ cm^2

Àrea del segment circular: $S = 80{,}94 - 38{,}39 = 42{,}55$ cm^2

2. Cossos geomètrics

Prismes

Un prisma és un poliedre format per dues bases paral·leles, que són dos polígons iguals i tantes cares laterals, que són rectangles, com costats tinguin les bases.

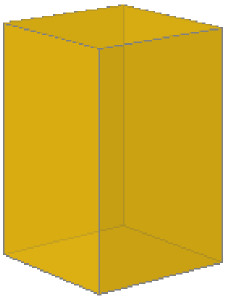


Prisma triangular

L'**àrea** d'un prisma o de qualsevol políedre, és la suma de les àrees de cada una de les seves cares.

Àrea lateral: Suma de les àrees de les cares laterals. Si el prisma és recte són rectangles.

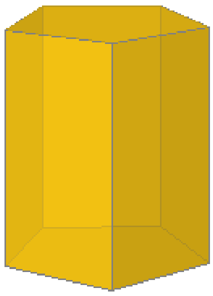
$$AL = \text{nre cares} \times A_c$$



Prisma quadrangular

Àrea total: És la suma de l'àrea lateral i l'àrea de les dues bases. Les bases són dos polígons iguals.

$$AT = AL + 2 \cdot A_b$$

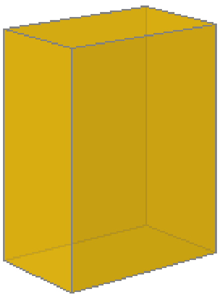


Prisma pentagonal

El **volum** d'un prisma és igual l'àrea de la base per l'altura.

$$V = A_b \times h$$

Un **ortoedre** és un prisma rectangular recte, és a dir un prisma on les seves dues bases són rectangles. El volum d'un ortoedre es calcula multiplicant les tres arestes distintes.



Ortoedre

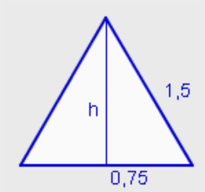
EXERCICIS resolts

17. Calcula l'àrea total i el volum d'un ortoedre de 4,8 cm d'alt, 2,5 cm d'ample i 7,6 cm de llarg.

Àrea total: $AT = 2 \cdot 4{,}8 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 4{,}8 \cdot 7{,}6 + 2 \cdot 2{,}5 \cdot 7{,}6 = 134{,}96\ cm^2$

Volum: $V = 4{,}8 \cdot 2{,}5 \cdot 7{,}6 = 91{,}2\ cm^3$

18. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum d'un prisma triangular de 7,9 cm d'alt i 1,5 cm d'aresta de la base.



Àrea lateral: $AL = 3 \cdot 1{,}5 \cdot 7{,}9 = 35{,}55\ cm^2$

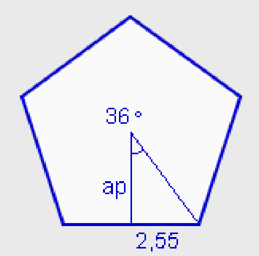
$h^2 + 0{,}75^2 = 1{,}5^2 \rightarrow h = \sqrt{1{,}6875} = 1{,}3\ cm$

Àrea de la base: $A_b = \dfrac{1{,}5 \cdot 1{,}3}{2} = 0{,}97\ cm^2$

Àrea total: $AT = 35{,}55 + 2 \cdot 0{,}97 = 37{,}5\ cm^2$

Volum: $V = 0{,}97 \cdot 7{,}9 = 7{,}7\ cm^3$

19. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total y el volum d'un prisma pentagonal de 4,3 cm d'alt i 5,1 cm d'aresta de la base.



Àrea lateral: $AL = 5 \cdot 5{,}1 \cdot 4{,}3 = 109{,}65\ cm^2$

$tg\,36^\circ = \dfrac{2{,}55}{ap} \rightarrow ap = \dfrac{2{,}55}{tg\,36^\circ} = 3{,}51\,cm$

Àrea de la base: $A_b = \dfrac{5 \cdot 5{,}1 \cdot 3{,}51}{2} = 44{,}75\ cm^2$

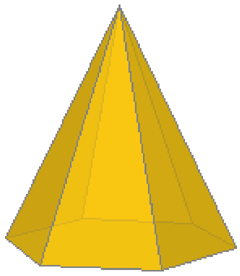
Àrea total: $AT = 109{,}65 + 2 \cdot 44{,}75 = 199{,}15\ cm^2$

Volum: $V = 44{,}75 \cdot 4{,}3 = 192{,}42\ cm^3$

2. Cossos geomètrics

Piràmides

Una piràmide és un poliedre format per una base que és un polígon i tantes cares laterals, que són triangles, com costats tingui la base.

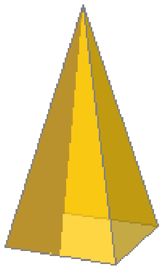


Piràmide hexagonal

L'**àrea** d'una piràmide és la suma de les àrees de cadascuna de les seves cares.

Àrea lateral: Suma de les àrees de les cares laterals. En la piràmide les cares laterals són triangles.

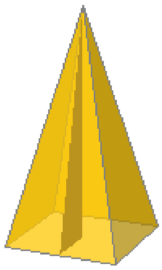
$$AL = \text{nre cares} \times A_c$$



El triangle format per una aresta lateral, l'altura d'una cara i la meitat de l'aresta de la base, és un triangle rectangle.

Àrea total: És la suma de l'àrea lateral i l'àrea de la base. La base és un polígon regular o no.

$$AT = AL + A_b$$

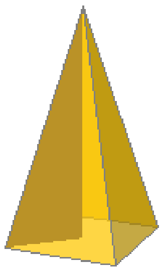


El triangle format per l'altura de la piràmide, l'altura d'una cara i l'apotema de la base, és un triangle rectangle.

El **volum** d'una piràmide és igual a l'àrea de la base per l'altura dividit per tres.

$$V = \frac{A_b \times h}{3}$$

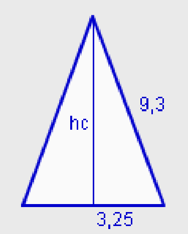
En les piràmides de la dreta es pot observar les relacions que existeixen entre les arestes, l'altura d'una cara i l'altura de la piràmide.

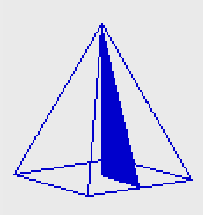


El triangle format per una aresta lateral, l'altura de la piràmide i la distància d'un vèrtex al centre de la base, és un triangle rectangle.

EXERCICIS resolts

20. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum d'una piràmide quadrangular de 9,3 cm d'aresta lateral i 6,5 cm d'aresta de la base.





$$hc^2 + 3,25^2 = 9,3^2 \rightarrow hc = \sqrt{75,9275} = 8,71 \text{ cm}$$

$$\text{Àrea d'una cara:} \quad A_c = \frac{6,5 \cdot 8,71}{2} = 28,32 \text{ cm}^2$$

Àrea lateral: $4 \cdot 28,32 = 113,28 \text{ cm}^2$

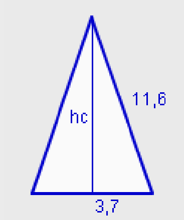
Àrea de la base: $A_b = 6,5^2 = 42,25 \text{ cm}^2$

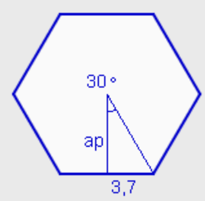
Àrea total: $AT = 113,28 + 42,25 = 155,53 \text{ cm}^2$

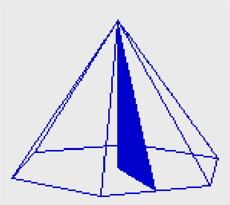
$$h^2 + 3,25^2 = 8,71^2 \rightarrow h = \sqrt{65,365} = 8,08 \text{ cm}$$

$$\text{Volum:} \quad V = \frac{42,25 \cdot 8,08}{3} = 113,86 \text{ cm}^3$$

21. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum d'una piràmide hexagonal de 11,6 cm d'aresta lateral i 7,4 cm d'aresta de la base.







$$hc^2 + 3,7^2 = 11,6^2 \rightarrow h = \sqrt{120,987} = 10,99 \text{ cm}$$

$$\text{Àrea d'una cara:} \quad A_c = \frac{7,4 \cdot 10,99}{2} = 40,68 \text{ cm}^2$$

Àrea lateral: $6 \cdot 40,68 = 244,07 \text{ cm}^2$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{3,7}{ap} \rightarrow ap = \frac{3,7}{\text{tg } 30^\circ} = 6,41 \text{ cm}$$

$$\text{Àrea de la base:} \quad A_b = \frac{6 \cdot 7,4 \cdot 6,41}{2} = 142,27 \text{ cm}^2$$

Àrea total: $AT = 244,07 + 142,27 = 386,34 \text{ cm}^2$

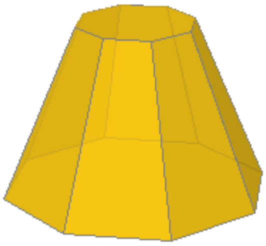
$$h^2 + 6,41^2 = 10,99^2 \rightarrow h = \sqrt{79,8} = 8,93 \text{ cm}$$

$$\text{Volum:} \quad V = \frac{142,27 \cdot 8,93}{3} = 423,64 \text{ cm}^3$$

2. Cossos geomètrics

Troncs de piràmides

Al tallar una piràmide per un pla paral·lel a la seva base s'obtenen dos cossos geomètrics. Un és una piràmide més petita que la inicial. Al altre cos geomètric se'l coneix com **tronc de piràmide**.

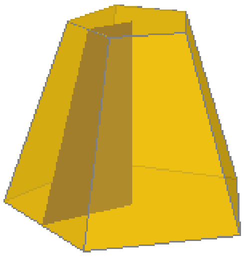


Tronc de piràmide octogonal.
Les cares laterals d'un tronc de piràmide són trapezis isòsceles.

L'**àrea** d'un tronc de piràmide és la suma de les àrees de cadascuna de les seves cares.

Àrea lateral: Suma de les àrees de les cares laterals. En el tronc de piràmide les cares laterals són trapezis.

$$\mathbf{AL = nre\ cares \times A_c}$$



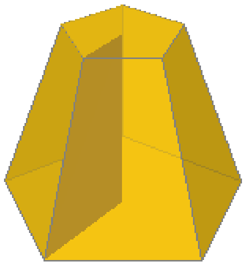
L'altura del tronc de piràmide, l'altura d'una cara i les apotemes de les dues bases formen un trapezi rectangle.

Àrea total: És la suma de l'àrea lateral i l'àrea de les bases. Les bases són dos polígons regulars o no.

$$\mathbf{AT = AL + 2 \cdot A_b}$$

El **volum** d'un tronc de piràmide es pot obtenir com la diferència entre el volum de les dues piràmides de les que s'obtenen. També es pot calcular amb la fórmula:

$$\mathbf{V = \frac{h \cdot (Ab + AB + \sqrt{Ab \cdot AB})}{3}}$$

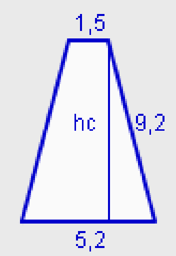


L'altura del tronc de piràmide, l'aresta lateral i els segments que uneixen un vèrtex de cada base amb el seu centre formen un trapezi rectangle.

En els troncs de piràmides de la dreta es poden observar les figures planes que s'obtenen amb els elements de les bases i les cares laterals.

EXERCICIS resolts

22. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum d'un tronc de piràmide decagonal de 1,5 cm de costat de la base menor, 5,2 cm de costat de la base major i 9,2 cm d'aresta lateral.

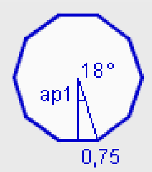


$$\frac{5,2-1,5}{2}=1,85$$

$$hc^2+1,85^2=9,2^2 \rightarrow hc=\sqrt{81,2175}=9,01 \text{ cm}$$

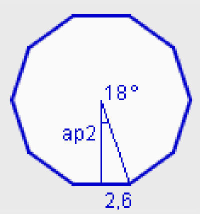
Àrea de una cara: $A_c=\dfrac{(5,2+1,5)\cdot 9,01}{2}=30,19 \text{ cm}^2$

Àrea lateral: $10\cdot 30,19=301,91 \text{ cm}^2$



$$tg\,18^\circ=\frac{0,75}{ap1} \rightarrow ap1=\frac{0,75}{tg\,18^\circ}=2,31\,\text{cm}$$

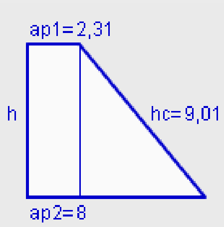
Àrea de la base menor: $A_b=\dfrac{10\cdot 1,5\cdot 2,31}{2}=17,31 \text{ cm}^2$



$$tg\,18^\circ=\frac{2,6}{ap2} \rightarrow ap2=\frac{2,6}{tg\,18^\circ}=8\,\text{cm}$$

Àrea de la base major: $A_B=\dfrac{10\cdot 5,2\cdot 8}{2}=208,05 \text{ cm}^2$

Àrea total: $AT=301,91+17,1+208,05=527,27 \text{ cm}^2$



$$8-2,31=6,69$$

$$h^2+5,69^2=9,01^2 \rightarrow h=\sqrt{48,8}=6,99 \text{ cm}$$

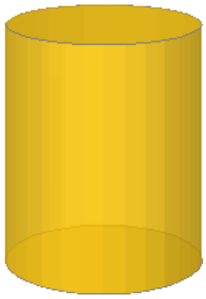
Volum:

$$V=\frac{6,99\cdot(17,31+208,05+\sqrt{17,31\cdot 208,05})}{3}=664,52 \text{ cm}^3$$

2. Cossos geomètrics

Cilindres

El desenvolupament d'un cilindre està format pels dos cercles de les bases i un rectangle de base, la longitud de la circumferència i d'altura, l'altura del cilindre.


Cilindre

Àrea lateral: Àrea del rectangle que s'obté en el seu desenvolupament.

$$AL = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Àrea total: És la suma de l'àrea lateral i l'àrea de les dues bases. Les bases són dos cercles iguals.

$$AT = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

El **volum** d'un cilindre és igual a l'àrea de la base per l'altura.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Cons


Con

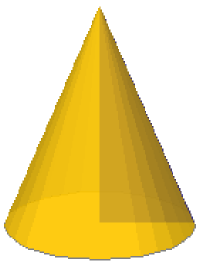
El desenvolupament d'un con està format pel cercle de la base i un sector circular la longitud d'arc del qual és igual a la longitud de la circumferència i el radi del qual és igual a la generatriu del con.

Àrea lateral: Àrea del sector circular que s'obté en el seu desenvolupament.

$$AL = \pi \cdot r \cdot g$$

Àrea total: És la suma de l'àrea lateral i l'àrea del cercle de la base.

$$AT = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$


L'altura del con, el radi de la base i la generatriu formen un triangle rectangle

El **volum** d'un con és igual a l'àrea de la base per l'altura dividit per tres.

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

EXERCICIS resolts

23. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum d'un cilindre de 8,1 cm d'alt i 2,4 cm de radi de la base.

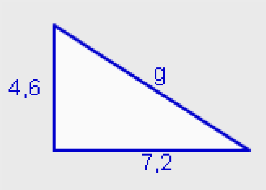
Àrea lateral: $AL=2\cdot\pi\cdot 2{,}4\cdot 8{,}1=122{,}15\ cm^2$

Àrea de la base: $Ab=\pi\cdot 2{,}4^2=18{,}1\ cm^2$

Àrea total: $AT=2\cdot\pi\cdot 2{,}4\cdot 8{,}1+2\cdot 18{,}1=158{,}34\ cm^2$

Volum: $V=\pi\cdot 2{,}4^2\cdot 8{,}1=146{,}57\ cm^3$

24. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum d'un con de 4,6 cm d'alt i 7,2 cm de radi de la base. Calcula l'angle que forma la generatriu amb el radi.



$$4{,}6^2+7{,}2^2=g^2 \rightarrow g=\sqrt{73}=8{,}54\ cm$$

Àrea lateral: $AL=\pi\cdot 7{,}2\cdot 8{,}54=193{,}26\ cm^2$

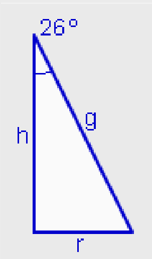
Àrea de la base: $Ab=\pi\cdot 7{,}2^2=162{,}86\ cm^2$

Àrea total: $AT=193{,}26+162{,}86=356{,}12\ cm^2$

$$\text{Volum: } V=\frac{\pi\cdot 7{,}2^2\cdot 4{,}6}{3}=249{,}72\ cm^3$$

$$tg\,\alpha=\frac{4{,}6}{7{,}2}=0{,}6389 \rightarrow \alpha=32^{o}\,34'\,26{,}61''$$

25. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum d'un con de 7,5 cm de generatriu sabent que l'angle que formen l'altura i la generatriu mesura 26º.



$$\sin 26^{o}=\frac{r}{7{,}5} \rightarrow r=7{,}5\cdot\sin 26^{o}=3{,}29\ cm$$

$$\cos 26^{o}=\frac{h}{7{,}5} \rightarrow h=7{,}5\cdot\cos 26^{o}=6{,}74\ cm$$

Àrea lateral: $AL=\pi\cdot 3{,}29\cdot 7{,}5=77{,}47\ cm^2$

Àrea de la base: $Ab=\pi\cdot 3{,}29^2=33{,}96\ cm^2$

Àrea total: $AT=77{,}47+33{,}96=111{,}43\ cm^2$

$$\text{Volum: } V=\frac{\pi\cdot 3{,}29^2\cdot 6{,}74}{3}=76{,}31\ cm^3$$

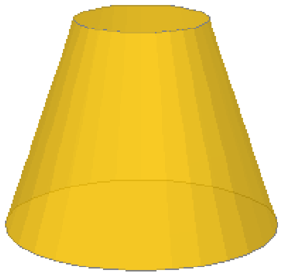
2. Cossos geomètrics

Troncs de cons

El desenvolupament d'un tronc de con està format pels cercles de les bases i un trapezi circular.

Àrea lateral: Àrea del trapezi circular que s'obté en el seu desenvolupament.

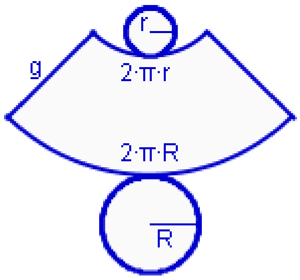
$$\boxed{AL = \pi \cdot g \cdot (R + r)}$$



Tronc de con

Àrea total: És la suma de l'àrea lateral i l'àrea dels cercles de les bases.

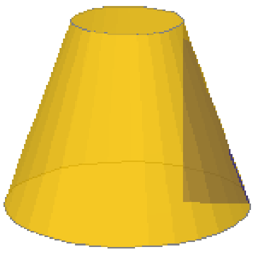
$$\boxed{AT = \pi \cdot g \cdot (R + r) + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2}$$



Desenvolupament d'un tronc de con

El **volum** d'un tronc de con és:

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}}$$



L'altura del tronc de con, la generatriu i el segment que té com longitud la diferència dels radis de les dues bases formen un triangle rectangle.

Esferes

Una esfera no es pot tallar i desenvolupar en figures planes.

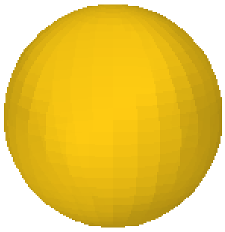
Les fórmules per al càlcul de l'àrea i del volum de l'esfera són:

Àrea:

$$\boxed{A = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Volum:

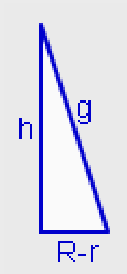
$$\boxed{A = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}}$$



Esfera

EXERCICIS resolts

26. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum d'un tronc de con de 6,6 cm d'altura, 2,2 cm de radi de la base menor i 4,3 cm de radi de la base major.



$$6,6^2 + 2,1^2 = g^2 \quad \rightarrow \quad g = \sqrt{47,97} = 6,93 \text{ cm}$$

Àrea lateral: $AL=\pi\cdot 6,93\cdot(2,2+4,3)=141,43 \text{ cm}^2$

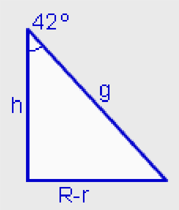
Àrea de la base menor: $Ab= \pi\cdot 2,2^2=15,21 \text{ cm}^2$

Àrea de la base major: $AB= \pi\cdot 4,3^2=58,09 \text{ cm}^2$

Àrea total: $AT=141,43+15,21+58,09=214,73 \text{ cm}^2$

Volum: $$V = \frac{\pi\cdot 6,93\cdot(2,2^2+4,3^2+2,2\cdot 4,3)}{3} = 226,63 \text{ cm}^3$$

27. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum d'un tronc de con de 6,4 cm de radi de la base menor i 12,6 cm de radi de la base major, sabent a més que la generatriu i l'altura formen un angle de 42º.



$$\text{tg } 42º = \frac{12,6-6,4}{h} \quad \rightarrow \quad h = \frac{6,2}{\text{tg } 42º} = 6,89 \text{ cm}$$

$$\sin 42º = \frac{12,6-6,4}{g} \quad \rightarrow \quad g = \frac{6,2}{\sin 42º} = 9,27 \text{ cm}$$

Àrea lateral: $AL=\pi\cdot 9,27\cdot(6,4+12,6)=553,08 \text{ cm}^2$

Àrea de la base menor: $Ab= \pi\cdot 6,4^2=128,68 \text{ cm}^2$

Àrea de la base major: $AB= \pi\cdot 12,6^2=498,76 \text{ cm}^2$

Àrea total: $AT=553,08+128,68+498,76=1180,51 \text{ cm}^2$

Volum: $$V = \frac{\pi\cdot 6,89\cdot(6,4^2+12,6^2+6,4\cdot 12,6)}{3} = 2021,62 \text{ cm}^3$$

28. Calcular l'àrea i el volum d'una esfera de 5,6 cm de radi.

Àrea: $A=4\cdot\pi\cdot 5,6^2= 394,08 \text{ cm}^2$

Volum: $$V = \frac{4\cdot\pi\cdot 5,6^3}{3} = 735,62 \text{ cm}^2$$

29. Calcular el radi d'una esfera el volum de la qual és de 3261,76 cm^3.

$$V = \frac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = 3261,76 \quad \rightarrow \quad r^3 = \frac{3\cdot 3261,76}{4\cdot\pi} = 778,69 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{778,69} = 9,2 \text{ cm}$$

Per practicar

1. El senyal de trànsit “STOP” té forma d’octàgon i una altura de 600 mm. Calcula el perímetre i l’àrea.

2. Quins polígons regulars permeten recobrir el pla sense deixar forats? Si tots ells tenen perímetre 8,4 cm, quin d’ells tenen la major superfície?

3. Una cabra està lligada a una cantonada d’una caseta quadrada de 4,2 cm de costat amb una corda de 7,7 m de longitud. Calcular l’àrea de la regió en la que pot moure’s la cabra per pasturar.

4. Un hotel té 64 habitacions. Cadascuna d’elles té dues finestres amb forma de rombe. El costat mesura 1,3 m i l’angle superior mesura 40º. Van a col·locar vidrieres a cada finestra, que s’hauran de tallar en plaques rectangulars. Quina quantitat de vidre es necessita comprar?

5. L’entrada a una fortalesa té forma de trapezi isòsceles. La base major mesura 14,7, la base menor 10,3 m i els laterals 8 m. Quin angle formen els laterals amb la base inferior?

6. Les dimensions d’un tetrabrik són 16,3 cm d’alt, 9,6 cm de llarg i 6,3 cm d’ample. Quina és la seva capacitat? Quina quantitat de material es necessita per a la seva construcció?

7. Una llauna de conserves cilíndrica té 8,3 cm d’altura i 6,5 cm de radi de la base. Quina és la seva capacitat? Quina quantitat de material es necessita per a la seva construcció? Quina quantitat de paper es necessita per la etiqueta?

8. Un llapis té forma de prisma hexagonal i té al seu interior una mina de forma cilíndrica. Si el llapis té 18 mm de llarg i 4 mm de costat de la base i la mina té 3 mm d’ample, quin és el volum de la part del llapis que no està ocupat per la mina?

9. El tetraedre és un poliedre regular format por quatre triangles equilàters. És també una piràmide triangular. Calcula l’àrea total i el volum d’un tetraedre de 1 cm d’aresta.

10. Els fanals d’una ciutat tenen la forma de la imatge. Els vidres de la part superior tenen 26,7 cm d’aresta superior, 30,7 cm d’aresta inferior i 15,4 cm d’aresta lateral. Els vidres de la part inferior tenen 30,7 cm d’aresta superior, 21 cm d’aresta inferior i 37,2 cm d’aresta lateral. Quina quantitat de vidre té cada fanal?

11. Una confraria ha de fabricar caputxes per a la seva processó de Setmana Santa, de 103 cm d’alt i 11,2 cm de radi de la circumferència. Quina quantitat de cartró necessita per a cadascun?

12. En una gelateria, una terrina de gelat de 7,5 cm de diàmetre superior, 6,5 cm de diàmetre inferior i 3,6 cm d’altura es ven per 1,9 euros. Quin serà el preu d’una altra terrina de 9,5 cm de diàmetre superior, 8,1 cm de diàmetre inferior i 4,8 cm d’altura?

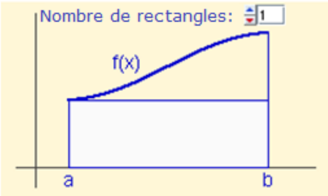
13. Sabent que el radi de la Terra és de 6370 km, calcula la superfície i el volum del nostre planeta utilitzant diferents aproximacions del nombre π.

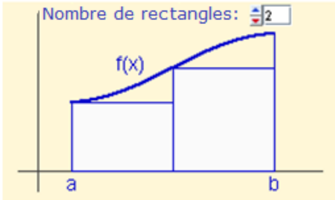
    a) 3   b) 3,14   c) 3,1416   d) π

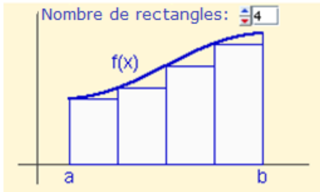
Per saber-ne més

Àrea tancada per una corba

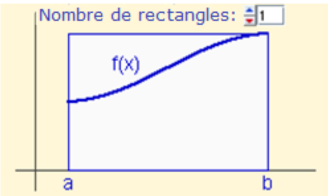
Per calcular l'àrea tancada per una corba es pot aproximar l'àrea per una successió de rectangles més petits.

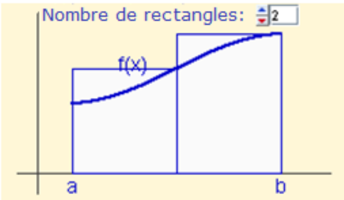


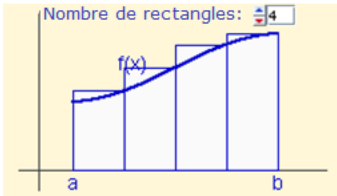




També es pot aproximar l'àrea per una successió de rectangles més grans







L'àrea obtinguda per ambdues successions coincideix i s'anomena **integral definida** de la funció f(x) entre a i b. Es representa per: $\int_a^b f(x)dx$.

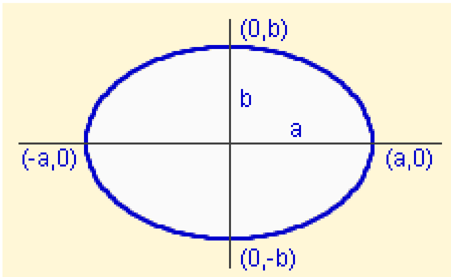
Àrea i perímetre de l'el·lipse

Aplicant el procediment anterior, es pot deduir la fórmula de l'àrea de l'el·lipse, molt similar a la del cercle:

$$\mathbf{A = \pi \cdot a \cdot b}$$

En canvi, no hi ha fórmula per la longitud de la el·lipse, només diferents aproximacions. Una d'elles és:

$$L \approx \pi \cdot \left[3(a+b) - \sqrt{(a+3b)\cdot(3a+b)} \right]$$

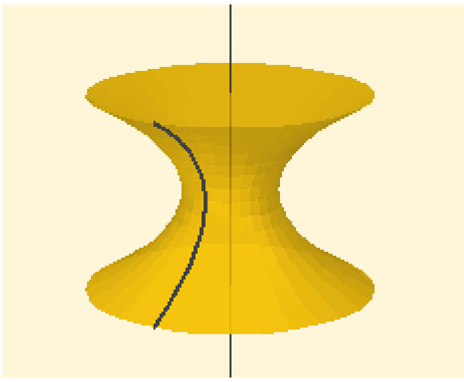


Àrea i perímetre de l'el·lipse

Al girar una corba plana al voltant d'un eix contingut en un mateix pla, s'obté una **superfície de revolució**.

Si es gira una superfície plana al voltant d'un eix contingut en un mateix pla, s'obté un **cos de revolució**.

Per a calcular la superfície o el volum de superfícies i cossos de revolució també s'apliquen procediments d'integració, que s'estudien en cursos superiors.



Recorda el més important

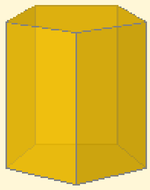
ÀREES DE COSSOS GEOMÈTRICS

Àrea lateral: suma de les àrees de totes les cares laterals d'un cos geomètric.

Àrea total: suma de l'àrea lateral i de l'àrea de les bases d'un cos geomètric.

Volum: és la mesura de l'espai que ocupa un cos geomètric.

PRISMA

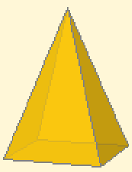


Al = nombre cares · àrea del rectangle

At = Al + 2 · àrea del polígon regular

V = àrea de la base · altura

PIRÀMIDE

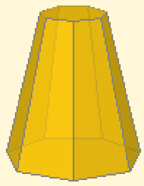


Al = nombre cares · àrea del triangle

At = Al + àrea del polígon regular

$$V = \frac{\text{A base} \cdot \text{altura}}{3}$$

TRONC DE PIRÀMIDE

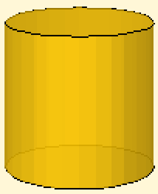


Al = nombre cares · àrea del trapezi

At = Al + àrea de polígons regulars

$$V = \frac{h \cdot (Ab + AB + \sqrt{Ab \cdot AB})}{3}$$

CILINDRE

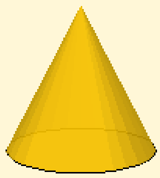


$$Al = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$At = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

CON



$$Al = \pi \cdot r \cdot g$$

$$At = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

TRONC DE CON

$$Al = \pi \cdot g \cdot (R + r)$$

$$At = \pi \cdot g \cdot (R + r) + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}$$

ESFERA

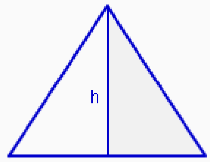
$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

RELACIONS ENTRE ELS ELEMENTS DE FIGURES PLANES I COSSOS GEOMÈTRICS

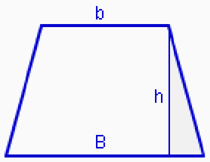
Per calcular costats, angles, altures i arestes de figures i cossos es necessita buscar triangles rectangles, en els quals es pugui aplicar el teorema de Pitàgores i la definició de les raons trigonomètriques.

TRIANGLE ISÒSCELES



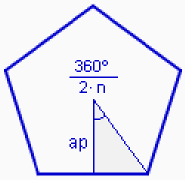
En dividir un triangle equilàter o isòsceles per l'altura es formen dos triangles rectangles.

TRAPEZI



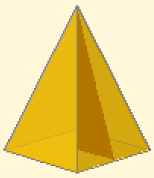
L'altura, el costat oblic i la seva projecció sobre la base major formen un triangle rectangle.

POLÍGON REGULAR



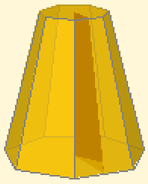
L'altura, la meitat del costat i el segment que uneix el centre i un vèrtex formen un triangle rectangle.

PIRÀMIDE



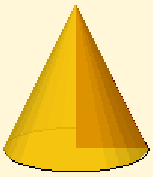
L'altura de la piràmide, l'altura d'una cara i l'apotema de la base formen un triangle rectangle.

TRONC DE PIRÀMIDE



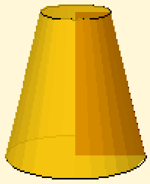
L'altura del tronc de piràmide, l'altura d'una cara i les apotemes de les bases formen un trapezi rectangle.

CON



L'altura del con, la generatriu i el radi de la base formen un triangle rectangle.

TRONC DE CON



L'altura del tronc de con, la generatriu i els radis de les bases formen un trapezi rectangle.

Autoavaluació

1. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de 4 metres de costat.

2. Calcula l'àrea d'un rombe de 3,8 metres de costat sabent que el menor dels angles que formen el seus costats mesuren 74º.

3. Calcula l'àrea d'un octògon regular inscrit en una circumferència de 7,9 metres de costat.

4. Calcula el volum d'un prisma pentagonal de 3 metres d'altura i 4,2 metres d'aresta de la base.

5. Calcula l'àrea total d'una piràmide hexagonal de 6,9 metres d'aresta lateral i 4,9 metres d'aresta de la base.

6. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide quadrangular sabent que les arestes de les bases mesuren respectivament 8,8 i 13,3 metres i l'aresta lateral 8 metres.

7. Calcula l'àrea total d'un cilindre de 2,5 metres d'altura i 6,7 metres de radi de la base.

8. Calcula el volum d'un con sabent que la generatriu mesura 1,8 metres i l'angle que forma la generatriu amb l'altura mesura 28º.

9. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de con l'altura del qual mesura 7,2 metres i els radis de les bases mesuren respectivament 3,1 i 7,1 metres.

10. Una esfera de 10,3 metres de radi s'introdueix en un cub de 20,9 metres d'aresta. Calcula el volum de l'espai que queda lliure en el cub.

Solucions dels exercicis per a practicar

1. P=1988,23 mm

   S=298233 mm^2
2. Triangles, quadrats i hexàgons. El hexàgon té major àrea 5,09 cm^2
3. A=158,94 m^2
4. 278,1 m^2
5. α=74º 2' 16,75''
6. V=985,82 cm^3

   AT=639,3 cm^2
7. V=1101,68 cm^3

   AT=604,44 cm^2

   AL=338,98 cm^2
8. V=621,01 mm^3
9. AT=1,73 cm^2

   V=0,12 cm^3
10. 5566,6 cm^2
11. A=3645,5 cm^2
12. 4,01 euros
13. a) 486922800 km^2
    b) 509645864 km^2
    c) 509905556,16 km^2
    d) 509904363,78 km^2

    a) 1033899412000 km^3
    b) 1082148051226,71 km^3
    c) 1082699464246,4 km^3
    d) 1082696932430 km^3

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. 6,93 m^2
2. 13,88 m^2
3. 176,52 m^2
4. 91,05 m^3
5. 157,2 m^2
6. 339,33 m^2
7. 387,3 m^2
8. 1,19 m^3
9. 263,93 m^2
10. 4552,12 m^3