13 Probabilitat

Continguts

Objectius

- Trobar els esdeveniments d'un experiment aleatori i realitzar operacions amb ells.
- Determinar si dos esdeveniments són compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilitat d'un esdeveniment mitjançant la regla de Laplace.
- Conèixer les propietats de la probabilitat.
- Trobar la probabilitat d'un esdeveniment en un experiment compost.
- Trobar probabilitats d'esdeveniments dependents i independents.
- Aplicar la probabilitat a situacions de la vida quotidiana.

Autora: Mª Isabel Hermida Rodríguez
Adaptació a Descartes JS: Xosé Eixo Branco
Versió en català: Joan Carles Fiol Colomar

Abans de començar

Investiga

Imagina't que estàs en un concurs de televisió en el qual t'ofereixen tres portes i n'has de triar una.
Darrera d'una de les portes hi ha un cotxe i darrera de cada una de les altres, un burro.
Tries una porta, però abans d'obrir-la, el presentador, que sap el que hi ha darrera de cada una, obre una de les dues que no has triat, darrera la qual, per suposat hi ha un burro, i aleshores, et dóna l'oportunitat de canviar la teva tria.
Naturalment vols emportar-te el cotxe, què faries, canviar de porta o no canviar?
Abans de decidir, anem a experimentar jugant. Pots jugar tu o bé fer que jugui automàticament; després de diferents intents escriu els resultats:

Manual	***Canviant***	***Mantenint***	***Total***
Intents			
Cotxes			
% encerts			

Automàtic	***Canviant***	***Mantenint***	***Total***
Intents			
Cotxes			
% encerts			

CONTESTA	RESPOSTA
Quan tries tu, com aconsegueixes més cotxes, canviant o mantenint?	
Quan es tria automàticament, com s'aconsegueixen més cotxes, canviant o mantenint?	
Després de lo vist, si vols emportar-te el cotxe, què faries, canviar de porta o no canviar?	

Si fas una aposta a la Bonoloto, quina probabilitat tens d'encertar els 6 números?
____

I tres?___________________________________

Clica per anar a la pàgina següent.

1. Introducció: Combinatòria

1.a. Combinatòria

Llegeix atentament l'explicació de la pantalla i contesta la següent pregunta:

Què és la combinatòria?

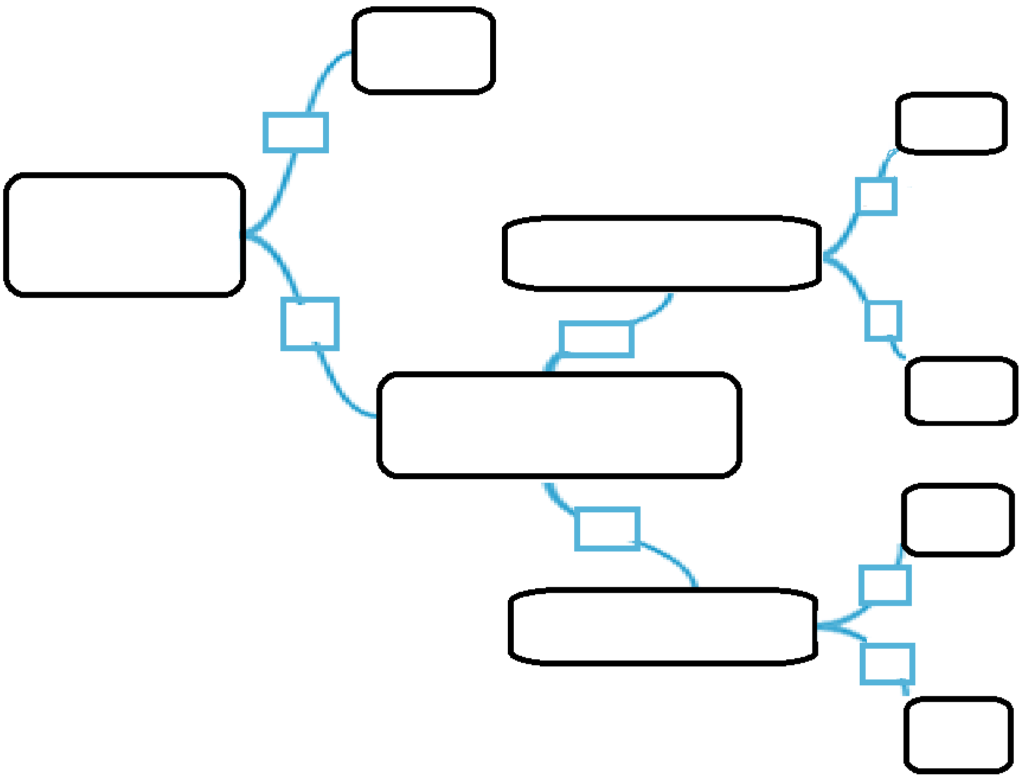
____

____

Associa, mitjançant una fletxa, cada frase amb el tipus d'agrupació corresponent:

Determinar de quantes formes es poden ordenar tots els elements d'un conjunt	Combinacions
Quan, en lloc de voler ordenar tots els elements disponibles, ens interessa només ordenar-ne alguns	Permutacions
Quan no ens importa l'ordre en el qual es trien els elements, només volem veure de quantes maneres en podem seleccionar uns quants d'entre el total	Amb Repetició
Quan en cada grup es poden repetir elements	Variacions

Copia l'esquema que apareix a la dreta de la pantalla:



Clica per anar a la pàgina següent

1.b. Permutacions

Llegeix a la pantalla i completa:

Permutacions de **n** elements són ____
____.

Ho escrivim

Fórmula per a calcular les Permutacions de n elements:

P_n =

En la escena de la dreta clica: Permutacions

Apareix un exemple. Escriu l'enunciat i la seva resolució a continuació:

Volem comptabilitzar de quantes maneres diferents es pot asseure l'alumnat d'una classe de _____ persones.	
	Tenim n = ____ persones que s'han d'asseure en les ____ taules de classe. És a dir, hem d'ordenar aquest alumnat. Es tracta de __________________________
	Observa com es calcula el nombre de maneres diferents d'asseure's a la classe: P_n = _______________________________________ = ____________________

Permutacions amb repetició de **n** elements en les que ___________________________
____
____
____.

Ho escrivim:

Fórmula per a calcular les Permutacions amb Repetició de n elements:

$PR_{a,b,\ldots k}$ =

A l'escena de la dreta clica: Permutacions amb Repetició

Apareix un exemple. Escriu l'enunciat i la seva resolució a continuació:

Volem descobrir de quantes formes diferents es pot fer un collar amb boles de colors vermell, verd, blau i groc, si tenim: ___ boles vermelles, ___ verdes, ___ grogues i ___ blaves.	
	Hem d'ordenar un total de __+ __+ __+ __ = ___ boles per formar un collar. Si totes les boles fossin diferents, les diferents formes de fer el collar serien Permutacions de ___ elements. Però són moltes menys, ja que hi ha repeticions, doncs, per exemple, és el mateix començar per la primera bola roja que per la segona. Es tracta de Permutacions de __,__,__ i __ elements.

	Observa com es calcula el nombre de possibles collars **PR**__,__,__,__ **=** ______________ = ______________ = ___________ =

Clica el botó per a fer uns exercicis.

S'obre una escena en la qual pots escollir

Permutacions o **Permutacions amb repetició**

Escriu en la següent taula tres exemples de cada tipus:

Permutacions	Permutacions amb repetició
1. Volem calcular **Permutacions** de ___ elements	1. Volem calcular **Permutacions amb repetició** de ___ elements, havent-ne de cada un d'ells ____________, respectivament
2. Volem calcular **Permutacions** de ___ elements	2. Volem calcular **Permutacions amb repetició** de ___ elements, havent-ne de cada un d'ells ____________, respectivament

Clica per anar a la pàgina següent

1.c. Variacions

Llegeix la pantalla i completa:

Variacions amb repetició de **m** elements agafats de **n** en **n** són ___________________

____

____.

Ho escrivim:

Fórmula per a calcular les **Variacions amb repetició** de **m** elements agafats de **n** en **n**:

$VR_{m,n}$ =

En l'escena de la dreta clica: Variacions amb repetició

Apareix un exemple. Completa l'enunciat i la seva resolució a continuació:

Volem comptabilitzar quantes paraules de ___ lletres, amb o sense sentit, podríem crear amb un alfabet de ____ lletres diferents.	
	Tenim un alfabet format per m = ___ lletres diferents. Volem formar paraules de mida n = __, podent-se repetir cada lletra totes les vegades que vulguem. Es tracta de Variacions amb repetició de __ elements agafats de __ en __.
	Vegem com es calcula la quantitat de paraules: **VR**__,__ **=**

Variacions de **m** elements agafats de **n** en **n** són ________________________________
____.

Ho escrivim:

Fórmula per a calcular les **Variacions amb repetició** de **m** elements agafats de **n** en **n**:

$\mathbf{V_{m,n}} =$

En l'escena de la dreta clica: Variacions

Apareix un exemple. Completa l'enunciat i la seva resolució a continuació:

Volem comptabilitzar de quantes formes diferents es poden classificar els ___ primers participants d'una carrera amb un total de ____ atletes.	
	Tenim una carrera en la qual participen m = ___ atletes. Volem determinar de quantes formes possibles poden quedar classificats els ___ primers atletes. Es tracta de Variacions de __ elements agafats de __ en __.
	Vegem com es calcula el nombre de possibles classificacions: **V**__,__ **=**

Clica el botó per a fer uns exercicis.

S'obre una escena en la que pots triar: **Variacions amb repetició** o **Variacions**

Escriu en la taula següent tres exemples de cada tipus:

Variacions amb repetició	Variacions
1. Volem calcular **Variacions amb repetició** de ___ elements diferents que seleccionem de manera ordenada ___ vegades	1. Volem calcular **Variacions** de ___ elements diferents seleccionant-ne ___ d'ells de manera ordenada i sense repetir
2. Volem calcular **Variacions amb repetició** de ___ elements diferents que seleccionem de manera ordenada ___ vegades	2. Volem calcular **Variacions** de ___ elements diferents seleccionant-ne ___ d'ells de manera ordenada i sense repetir

Clica per anar a la pàgina següent

1.d. Combinacions

Llegeix la pantalla i completa:

Anomenem **Combinacions** de **m** elements agafats de **n** en **n** ________________________
____
____.

Ho escrivim:

Si importés l'ordre, es tractaria de ____________, però donat que no importa, per a calcular quants casos hi ha, dividim les Variacions entre el nombre de formes d'ordenar aquests elements, és a dir:

Fórmula per a calcular les **Combinacions** de **m** elements agafats de **n** en **n**:

$$C_{m,n} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

A l'escena de la dreta clica: Combinacions

Apareix un exemple. Completa l'enunciat i la seva resolució a continuació:

Volem comptabilitzar de quantes formes diferents es poden escollir a ___ persones per a participar en una activitat en un grup que té un total de ____ persones.

	Tenim un total de m = ___ persones i n'hem d'escollir a n = __. Observa que no importa qui triem primer i qui després. Totes les persones escollides són participants en l'activitat. És a dir, no importa l'ordre. Es tracta de Combinacions de __ elements agafats de __ en __.
	Vegem com es calcula el nombre de formes diferents d'escollir a aquestes persones: **C**$_{\_\_,\_\_}$ **=**

Clica el botó per a fer uns exercicis.

S'obre una escena amb l'enunciat d'un exercici. Escriu-lo en el següent requadre, resol-lo i després comprova si l'has fet bé clicant en "Veure solució".

Després clica en "un altre exercici" i repeteix la mateixa operació un altre cop.

1. Volem calcular **Combinacions** de ___ elements agafats de ___ en ___, és a dir, de quantes formes es pot escollir ___ elements d'un total de ___ sense que importi l'ordre d'elecció.	2. Volem calcular **Combinacions** de ___ elements agafats de ___ en ___, és a dir, de quantes formes es pot escollir ___ elements d'un total de ___ sense que importi l'ordre d'elecció.

EXERCICIS

1. Calcula:

a) P_5

b) P_{10}

c) $PR_{4,2,4,2}$

d) $PR_{2,4}$

2. Calcula

a) $VR_{10,5}$

b) $VR_{5,7}$

c) $V_{10,5}$

d) $V_{5,3}$

3. Calcula

a) $C_{17,5}$

b) $C_{13,3}$

Clica per anar a la pàgina següent.

2. Experiments aleatoris

2.a. Espai mostral i esdeveniments

Llegeix les definicions de la pantalla i completa:
Són experiments **aleatoris,** aquells en els quals ____________________________________
S'anomena espai **mostral** ____
Un **esdeveniment elemental** és ____
Un **esdeveniment** és ____
Hi ha un esdeveniment que es verifica sempre ___________________________ i coincideix amb el ______________________________

Fixa't en l'escena. Podem extreure de forma aleatòria una carta de la baralla. Apareixen diversos esdeveniments, i si mous el ratolí per sobre d'ells, apareixen els esdeveniments elementals que els formen. Amb l'ajuda de l'escena, completa aquesta taula:

ESDEVENIMENT	***ESDEVENIMENTS ELEMENTALS***
Treure el rei d'oros	
Treure oros o rei	
Treure una figura	

Clica per anar a la pàgina següent.

2.b. Operacions amb esdeveniments

Llegeix les definicions de la pantalla i completa:
Amb els esdeveniments d'un experiment aleatori es poden realitzar diferents operacions. Donats dos esdeveniments A i B:

- La **unió** de A i B, **AUB**, és l'esdeveniment format per _____________________________ _______________________ Ocorre quan ____
- La **intersecció**, **A∩B**, és l'esdeveniment format pels __________________________________ __________________________ Ocorre quan ______________________________________
- La **diferència** de A i B, **A\B**, és l'esdeveniment format per __________________________ ________________________ Ocorre quan ____
- L'**esdeveniment contrari** a un de donat A, **Ā**, és l'esdeveniment format per __________ __________________________ Ocorre quan ______________________________________
- L'esdeveniment contrari del **segur** és l'esdeveniment _______________, que no es verifica mai, i que s'indica amb **Ø**.

A l'escena pots veure un exemple de diferents esdeveniments i els seus contraris:
En una urna hi ha 12 boles numerades del 1 al 12. Es treu una bola i es mira el número, i considerem els esdeveniments: A= "sortir parell" i B= "sortir múltiple de 3". Escriu a continuació els esdeveniments elementals que formen els esdeveniments indicats a la taula:

A		$\overline{A}$	
B		$\overline{B}$	
AUB		$\overline{A\ U\ B}$	
A∩B		$\overline{A\ I\ B}$	
A\B		$\overline{A \setminus B}$	
B\A		$\overline{B \setminus A}$	

Clica per anar a la pàgina següent.

2.c. Esdeveniments compatibles e incompatibles

Llegeix les definicions de la pantalla i completa:
En un experiment aleatori hi ha esdeveniments que poden ocórrer alhora i d'altres que no.

- Dos esdeveniments es diuen **compatibles** si ______________________________________ __________. En aquest cas, $A\cap B\neq\emptyset$, ___________________ ocórrer alhora.
- Dos esdeveniments es diuen **incompatibles** si no __________________________________ __________, en aquest cas, $A\cap B=\emptyset$, ___________________ ocórrer alhora.

Un esdeveniment i el seu contrari són sempre ______________________, però dos esdeveniments incompatibles no sempre són _____________________.

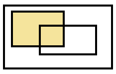
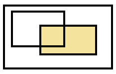
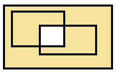
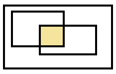
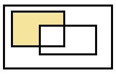
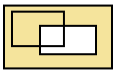
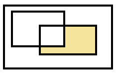
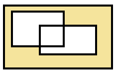
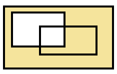
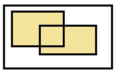
Donat l'**Espai mostral**={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, i els esdeveniments: **Vermell**={1, 4, 7, 10}, **Verd**={1, 2, 3}, **Blau**={3, 6, 9, 12}, **Gris**={7, 8, 9} i **Taronja**={3, 5, 7}, amb l'ajuda de l'escena digués si són compatibles o no els esdeveniments:

ESDEVENIMENTS	***COMPATIBLES /INCOMPATIBLES***	***ESDEVENIMENTS***	***COMPATIBLES /INCOMPATIBLES***
Verd i vermell		Vermell i blau	
Verd i blau		Verd i groc	
Blau i gris		Vermell i groc	
Verd i gris		Groc i gris	
Vermell i gris		Groc i blau	

Clica el botó per fer uns exercicis.

Observa els dibuixos i raona quin conjunt és cada un d'ells. Quan els tinguis tots clica "Comprovar"

Completa els resultats en aquesta taula:

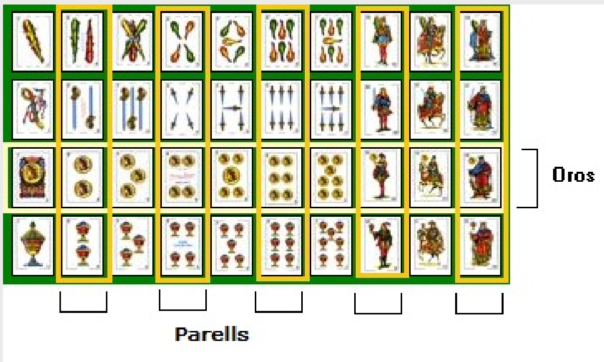
A = 		B = 	
1 		 2	
3 		 4	
5 		 6	
7 		 8	

Clica per anar a la pàgina següent.

EXERCICIS

4. En una bossa tenim tres boles numerades com a 1, 2 i 3. Considerem l'experiment d'extreure una bola i anotar-ne el número. Escriu tots els esdeveniments possibles. Indica quins d'ells són els elementals.

5. En una baralla, sota l'experiment d'extreure una carta, considera els esdeveniments: a) parell, b) oros, c) parell i oros, d) parell o oros, e) parell menys oros, f) oros menys parell i g) no parell. Escriu els esdeveniments elementals que els formen.



6. En tirar un dau considerem els esdeveniments: A={parell}, B={més gran que 3}, i C={senar}. Dels tres parells d'esdeveniments possibles AB, AC y BC, indica quins són compatibles i/o incompatibles.

Clica per anar a la pàgina següent.

3. Probabilitat d'un esdeveniment

3.a. La regla de Laplace

Llegeix les definicions de la pantalla.

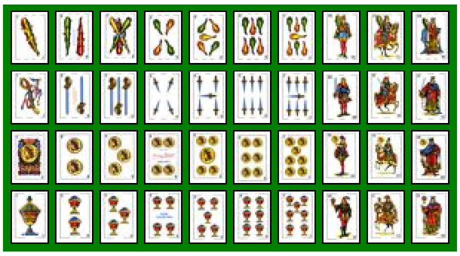
CONTESTA AQUESTES QÜESTIONS:	RESPOSTES
Quan diem que un experiment aleatori és **regular**?	
Què significa que els esdeveniments elementals són **equiprobables**?	
Donat un esdeveniment A, a què anomenem **casos favorables**? I **casos possibles**?	
Podem aplicar sempre la **regla de Laplace**? Si la resposta és negativa, indica quan es pot aplicar.	

A continuació escriu la fórmula de la **Regla de Laplace**

$$P(A) = \frac{\text{nre. casos}}{\text{nre. casos}}$$

Amb l'ajuda de l'escena de la dreta, calcula les següents probabilitats

Extraiem una carta d'una baralla de 40



ESDEVENIMENTS	*PROBABILITAT*
Que sigui d'un coll determinat	
Que sigui d'un núm. determinat	
Que sigui un as o un basto	
Que sigui un as i un basto	
Que no sigui ni as ni basto	

Clica el botó per fer uns exercicis.

Considerant els experiments, calcula les probabilitats:

Llançar un dau		Treure una carta de la baralla (40 cartes)	
P(parell)=	P(senar)=	P(oros o espases)=	P(3 de bastos)=
P(>4)=	P(2 o 6)=	P(oros)=	P(bastos)=
P(3)=	P(>2 i <5)=	P(rei)=	P(bastos o copes)=
P(<5 i parell)=	P(>2 o <5)=	P(rei d'oros)=	P(figura)=
P(3 o parell)=	P(>3 i <5)=	P(un 3)=	P(figura de bastos)=

Clica per anar a la pàgina següent.

3.b. Freqüència i probabilitat

Llegeix les definicions de la pantalla i completa:
La **freqüència absoluta** d'un esdeveniment és ______________________________________ ______________. La **freqüència relativa** és _______________________________________ ____.
La **llei dels grans nombres** diu que quan repetim un experiment _____________________ ____ ____
Com a conseqüència de la llei dels grans nombres, tenim una nova **definició de probabilitat** d'un esdeveniment com ____ ____

A l'escena de la dreta es simula el llançament de tres monedes; a partir dels resultats dels llançaments, compara les probabilitats i les freqüències dels esdeveniments:

Nre. de llançaments	>100	>200	>500	>1000		
fr(0 cares)=					P(0 cares)=	
fr(1 cares)=					P(1 cares)=	
fr(2 cares)=					P(2 cares)=	
fr(3 cares)=					P(3 cares)=	

CONTESTA AQUESTES QÜESTIONS:	RESPOSTES
Com és la probabilitat d'obtenir zero cares, major o menor que la seva freqüència?	
Com és la probabilitat d'obtenir dues cares, major o menor que la seva freqüència?	
Quan s'assemblen més les freqüències, amb 100 llançaments o amb més de 1000? Per què?	

Clica el botó per fer uns exercicis.

Tires tres daus i sumes els resultats.
En una aposta, quin és el resultat més avantatjós?
Seguint les indicacions de l'escena, fes més de 3000 tirades, i observant els resultats, calcula les següents probabilitats:

P(3)=	P(4)=	P(5)=	P(6)=
P(7)=	P(8)=	P(9)=	P(10)=
P(11)=	P(12)=	P(13)=	P(14)=
P(15)=	P(16)=	P(17)=	P(18)=

Clica per anar a la pàgina següent.

3.c. Propietats de la probabilitat

Vista la relació entre freqüència relativa i probabilitat, es compleix que:

- La probabilitat d'un esdeveniment és un nombre ____________________.
- La probabilitat de l'**esdeveniment segur** és ______ i la de l'**esdeveniment impossible** és _______.
- La probabilitat de la **unió de dos esdeveniments incompatibles** és ______________

I d'aquestes es dedueix a més que:

- La probabilitat de l'**esdeveniment contrari** és **p($\bar{A}$)**= ________________
- La probabilitat de la **unió de dos esdeveniments compatibles** és __________________

Si cliques a **Aplicacions** veuràs un exemple en el qual es calcula la probabilitat de la intersecció de dos esdeveniments i un altre en el qual s'aplica la probabilitat de l'esdeveniment contrari.

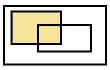
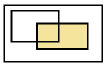
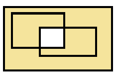
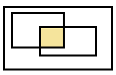
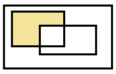
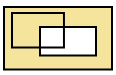
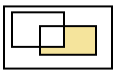
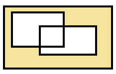
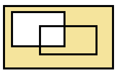
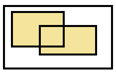
A l'escena de la dreta hi ha un exemple resolt:
En una urna hi ha 10 boles numerades del 1 al 10.
Es treu una bola i es mira el número.
Considerem els esdeveniments: A= {1, 2, 3, 4} i B={4, 5, 6, 7, 8}.

Amb l'ajuda de l'escena escriu la probabilitat dels esdeveniments de la taula:

p(A)	p(A∩B)	p($\overline{A}$)	p($\overline{A \cap B}$)
p(B)	p(A\B)	p($\overline{B}$)	p($\overline{A \setminus B}$)
p(AUB)	p(B\A)	p($\overline{A \cup B}$)	p($\overline{B \setminus A}$)

Clica el botó per fer un exercici.

Si p(A)=0.5, p(B)= 0.4 i p(A∩B)= 0.2; calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:

A = 		**B** = 	
1 		 **2**	
3 		 **4**	
5 		 **6**	
7 		 **8**	

Clica per anar a la pàgina següent.

3.d. Calcular probabilitats

En aquesta pàgina apareixen dues escenes per a que practiquis calculant les probabilitats que es proposen amb la diana i la ruleta.

Clica el botó per fer uns exercicis.

Fes exercicis fins que el nombre d'encerts sigui superior a 10.

EXERCICIS

7. Tenim un dau de 20 cares {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6} perfectament equilibrat. Quina és la probabilitat d'obtenir cada un dels resultats possibles?

8. Si llancem el dau anterior 1000 cops, quantes vegades s'espera que surti cada resultat aproximadament?

9. Per al dau {1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5} de 20 cares, calcula les probabilitats següents:

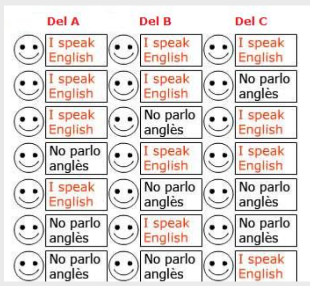
a) P(parell)=
b) P(més gran que 3)=
c) P(parell i més gran que 3)=
d) P(parell o més gran que 3)=
e) P(parell menys més gran que 3)=
f) P(més gran que 3 menys parell)=
g) P(no parell)=

10. En una bossa tenim 7 boles vermelles, 9 boles blaves i 4 verdes. Extraiem una bola, calcula la probabilitat que:

a) No sigui vermella
b) Sigui verda
c) Sigui vermella o blava

11. En un grup, el 40% juga a bàsquet i el 60% a futbol, sabent que el 85% practica algun de los dos esports, quin percentatge juga a tots dos?

12. En el grup A hi ha 18 persones, de les quals 10 parlen anglès i 8 no; en el B hi ha 12 persones, de les quals 3 parlen anglès i 9 no; i en el C hi ha 10 persones, 3 que parlen anglès i 7 que no. Triem al atzar una persona de cada grup, calcula la probabilitat que de les tres, al menys una parli anglès.



Clica per anar a la pàgina següent.

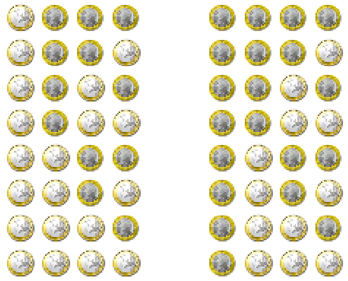
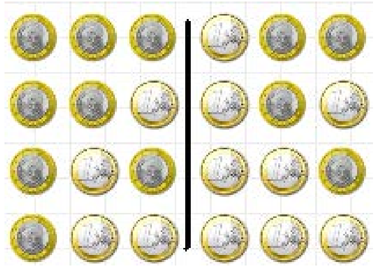
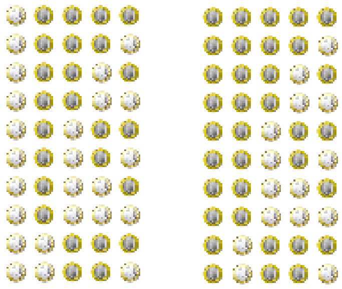
4. Experiments compostos

4.a. Esdeveniments compostos

Un **experiment compost** és el que ____
____

Per a calcular l'espai mostral d'un experiment compost convé, en moltes ocasions, fer un diagrama d'arbre que representi totes les opcions. Cada resultat ve donat per un camí del diagrama. Observa a l'escena com es construeix el diagrama d'arbre de l'exemple i com s'utilitza per a calcular la probabilitat de cada esdeveniment.

Clica el botó per fer un exercici.

PROBABILITAT AMB N MONEDES EXPERIMENT: Llançar N monedes equilibrades. Calcula la probabilitat en cada cas:	
CAS 1: 2 Monedes 	CAS 3: 4 Monedes 
CAS 2: 3 Monedes 	CAS 4: N Monedes 

Clica per anar a la pàgina següent.

4.b. Regla de la multiplicació

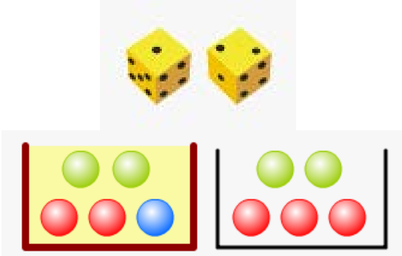
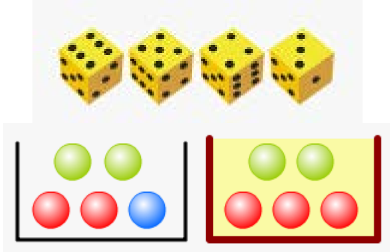
Si et fixes en l'exemple anterior, en indicar la probabilitat de cada branca del camí, s'obté la probabilitat de cada esdeveniment compost calculant el producte dels respectius esdeveniments simples.

La probabilitat d'un **esdeveniment** en un experiment **compost** és ____________________
____

A les escenes de la dreta pots practicar aquest resultat, observa, en primer lloc, l'exemple i després practica en l'altra escena. Escriu a continuació dos dels exercicis que hagis resolt bé:

EXERCICI 1	**EXERCICI 2**
p(**A**)= p(**N**)= p(**V**)=	p(**A**)= p(**N**)= p(**V**)=

Clica el botó per fer un exercici.

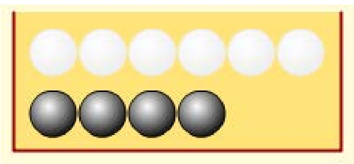
Tenim dues urnes, A i B, amb boles vermelles, verdes i blaves. Llancem un dau, si surt 1 o 2 traiem una bola de A, i si surt 3, 4, 5 o 6 de B		
		
p(A i R) = —— . —— = ——	p(A i V) = —— . —— = ——	p(A i A) = —— . —— = ——
p(B i R) = —— . —— = ——	p(B i V) = —— . —— = ——	p(B i V) = —— . —— = ——

Clica per anar a la pàgina següent.

4.c. Extraccions amb i sense devolució

Un exemple d'experiment compost el trobem en l'extracció successiva de cartes o de boles d'una urna... En aquests casos s'ha de considerar si es torna la carta, bola, etc. abans de treure la següent o no.
A la pàgina hi ha dues escenes que es corresponen amb dos exemples diferents, un d'extracció de boles i un altre d'extracció de cartes; practica amb elles abans de fer l'exercici.

Clica el botó per fer un exercici.

En una urna hi ha 6 boles blanques i 4 negres. Traiem dues boles, una després l'altra. Fes el diagrama d'arbre en cada cas:		
	Amb devolució	***Sense devolució***
		

Calcula les següents probabilitats:	***Amb devolució***	***Sense devolució***
quina és la probabilitat que les dues siguin blanques?		
quina és la probabilitat que la 1a sigui blanca i la 2a negra?		
quina és la probabilitat que les dues siguin negres?		

Clica per anar a la pàgina següent.

5. Probabilitat condicionada

5.a. Esdeveniments dependents i independents

Quan es realitzen observacions de diversos esdeveniments pot ser que un depengui de l'altre.

S'anomena **probabilitat condicionada**, de B a A, i s'escriu **p(B/A)** a la probabilitat que ____

$$P(B / A) = \frac{\qquad}{\qquad}$$

Si cliques l'enllaç **Per què?**, veuràs la demostració d'aquesta fórmula.

Donats dos esdeveniments, es diu que són **independents** si ____________________________ ____.

Donats dos esdeveniments, es diu que són **dependents** si ______________________________ ____.

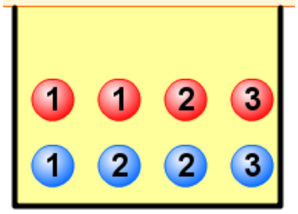
- A i B **independents**: P(B/A)=_____________
- A i B **independents**: P(A∩B)=_____________

A l'escena de la dreta tens un exemple d'esdeveniments dependents; segueix les instruccions per veure l'explicació.

Clica el botó per fer l'exercici.

Primer fes tu els càlculs i comprova a l'escena després.

Fixa't bé en les boles numerades que conté l'urna. Anem a extreure una bola, volem esbrinar si tindràs premi.
Segueix les instruccions de l'escena per veure la teva probabilitat de premi.



Número	*Vermella*	*Blau*
p(1)=	p(1/vermella)=	p(1/blau)=
p(2)=	p(2/vermella)=	p(2/blau)=
p(3)=	p(3/vermella)=	p(3/blau)=

Explica a continuació quins esdeveniments són independents i per què:

Explica a continuació quins esdeveniments són dependents i per què:

Clica per anar a la pàgina següent.

5.b. Diagrames d'arbre

Tal com has vist, en els experiments compostos es pot fer un diagrama en arbre, i cada resultat ve donat per un camí d'aquest arbre.
Per a calcular una probabilitat només cal dibuixar el camí corresponent, i el producte de les probabilitats de totes les branques que el formen serà el valor buscat.

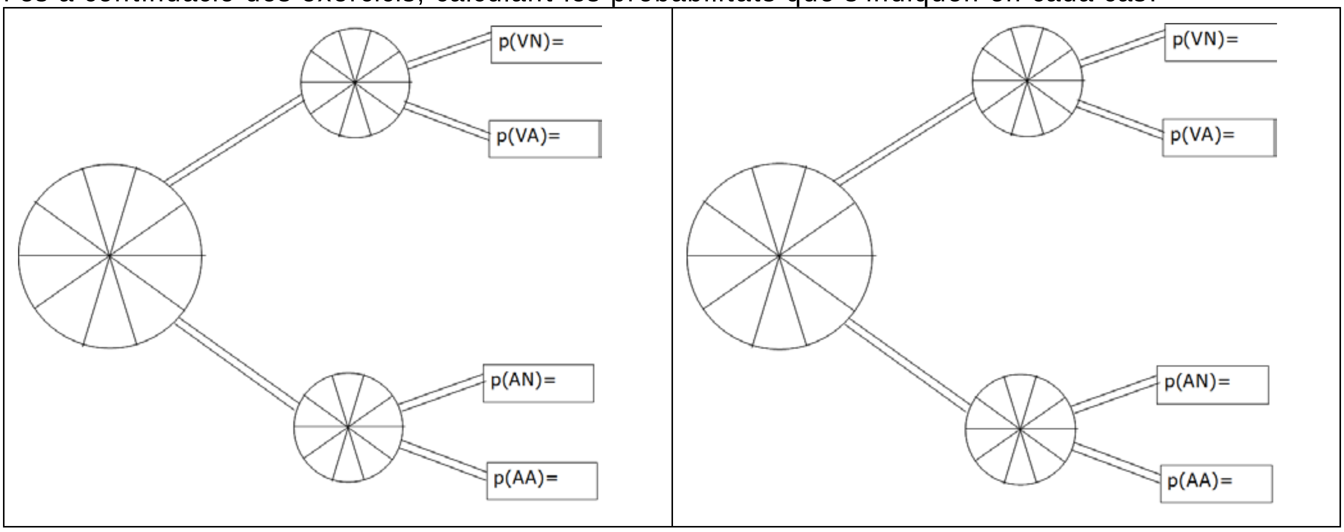
- Si ocorre A i després B: P(A i B)=________________
- La suma de les probabilitats de tots els camins és igual a ______

En l'exemple de l'escena de la dreta pots comprovar aquest darrer resultat, juga i observa la suma total.

Clica el botó per fer un exercici.

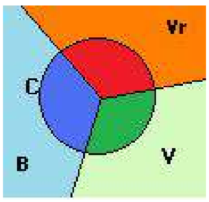
A l'esquerra tens una ruleta que determina quin camí triem entre dos, i una ruleta en cada camí per triar el color; cada cop que cliques Ruletes noves, tens un exercici diferent, i cada cop que cliques Girar ruletes, es realitza l'experiment i es calculen les freqüències absoluta i relativa.

Fes a continuació dos exercicis, calculant les probabilitats que s'indiquen en cada cas:



Clica per anar a la pàgina següent.

5.c. Probabilitat total



Considerem els esdeveniments representats a la imatge. Vr=Vermell, V=Verd i B=Blau són tres esdeveniments incompatibles i tals que la unió forma tot l'espai mostral. Sigui C=Cercle un esdeveniment qualsevol.

Escriu la fórmula de la probabilitat total per aquest exemple:

p(C) =

En l'exemple de l'escena de la dreta pots practicar aquest resultat.

Clica el botó per fer un exercici.

La probabilitat d'encertar el groc a la diana de la figura és p(A)= ______, el taronja p(N)= _________ i el verd p(V)= _____. Aquestes probabilitats sumen 1. Les probabilitats de llum o foscor són: • Si impacta en groc: ______ llum i ____ foscor. • Si impacta en taronja: ______ llum i ____ foscor. • Si impacta en verd: ______ llum i ____ foscor. Quina és la probabilitat d'encertar a llum?	p(A)·p(B/A)= p(N)·p(B/N)= p(V)·p(B/V)= p(B)=

Clica per anar a la pàgina següent.

5.d. Probabilitat "a posteriori"

A vegades interessa conèixer la **p(A/E)**, és a dir, quan ja sabem que ha ocorregut E en la segona experiència, ens preguntem la probabilitat que s'hagi produït a través de A.
Es tracta d'una probabilitat condicionada coneguda com **Fórmula de Bayes**:

$$p(A/E)=\frac{}{}$$

Observa a l'exemple de l'escena com es desenvolupa aquesta fórmula i completa la taula següent de probabilitats:

	2a verda	**2a negra**	**Total**
1a verda	p(VV)=	p(VN)=	p(1aV)=
1a negra	p(NV)=	p(NN)=	p(1aN)=
Total	p(2aV)=	p(2aN)=	

A partir de la taula, calcula les següents probabilitats condicionades

p(V/V)=---------------------------= p(V/N)= ---------------------------=

p(N/V)=---------------------------= p(N/V)= ---------------------------=

Clica el botó per fer un exercici.

La probabilitat d'encertar el groc a la diana de la figura és p(A)= ______, el taronja p(N)= _________ i el verd p(V)= _____. Aquestes probabilitats sumen 1. Les probabilitats de llum o foscor són: • Si impacta en groc: ______ llum i ____ foscor. • Si impacta en taronja: ______ llum i ____ foscor. • Si impacta en verd: ______ llum i ____ foscor. Si es va encertar en llum, quina és la probabilitat que fos sobre groc?	p(A)·p(B/A)= p(N)·p(B/N)= p(V)·p(B/V)= p(B)= p(A/B)=

Clica per anar a la pàgina següent.

EXERCICIS

13. Llancem un dau de 4 cares {1,2,3,4} i un altre de 10 {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Quina és la probabilitat d'obtenir dos tresos. I dos quatres?

14. En una bossa tenim 5 boles numerades del 1 al 5. Extraiem dues boles,

a) quina és la probabilitat d'obtenir un 2 i un 3 si no retornem les boles tretes?

b) i quina si les retornem?

15. En tirar dos daus, quina és la probabilitat d'obtenir al menys 10 punts?

16. Tirem una moneda trucada en la que P(C)=0,6 i P(X)=0,4. Si surt cara tirem un dau {1,2,3,4} de 4 cares i si surt creu, un {1,2,3,4,5,6} de sis. Tenim la mateixa probabilitat que surti 1 després que surti cara o creu? Quant val en cada cas? Quina és la probabilitat que surti 1?

17. Tenim un dau {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 cares. Si traiem un 1 tirem una moneda, i dues si traiem un 2. Quina és la probabilitat d'obtenir una cara?

18. Tenim un dau {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 cares. Tirem el dau, si surt 1, traiem una bola de {RRNNN} i si surt un 2, en traiem una de {RRRRN}. Ha sortit N, quina és la probabilitat que fos amb un 1 del dau?

19. La probabilitat d'encertar el groc a la diana de la figura és 0,3, el verd 0,4 i el taronja 0,3. A més, si s'encerta el groc, la probabilitat que sigui en llum, és 0,7; la probabilitat de llum en verd és 0,6 i en taronja 0,3.

a) Quina és la probabilitat d'encertar en la zona de llum?

b) Si s'ha encertat en la zona de llum, quina és la probabilitat que fos en groc?

Recorda el més important – RESUM

Experiments aleatoris

Un experiment aleatori és aquell en el qual ____ el resultat per molt que l'hàgim experimentat.

Si llancem un dau:

Espai **mostral** _______________________
____

Esdeveniments **elementals**: _____________
____

Un esdeveniment A: ____________________
____

Dos esdeveniments són **compatibles** si ____
____

Esdeveniment **segur**: __________________
____

Esdeveniment **impossible**: ______________
____

Esdeveniment **contrari** a un esdeveniment A:
____

Dos esdeveniments són **incompatibles** si __
____

Operacions amb esdeveniments

Unió A U B : es verifica quan

Intersecció A ∩ B : es verifica quan

Diferència A–B: es verifica quan

Regla de Laplace

Es pot aplicar només quan els esdeveniments elementals són ______________________

$$p = \frac{\text{Nre. casos}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}{\text{Nre. casos}}$$

Propietats de la probabilitat

	A i B són **incompatibles**	A i B **compatibles**
p(E. segur) = P(E) = ______ p(E. impossible) = P(Ø) = _____ _____ ≤P(esdeveniment)≤ _____ p(Ā)= 1- p(____)	p(A U B) =____________	p(A U B) =_____________

Experiments compostos

Estan formats per ____.
Per a calcular la probabilitat ____

Probabilitat condicionada

En esdeveniments consecutius poden produir-se dues situacions:

Independents

Dependents

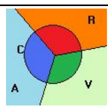
Fórmula de Bayes

$p(B/A) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$

Probabilitat total

Si es compleix que P(A)+P(V)+P(R)=1, aleshores es compleix que

P(C)=____



Clica per anar a la pàgina següent.

Per practicar

Ara practicaràs resolent diferents EXERCICIS. En les següents pàgines trobaràs EXERCICIS de:

Combinatòria
Aplicació de la regla de Laplace i propietats de la probabilitat
Probabilitat condicionada, probabilitat total i Bayes

Completa l'enunciat amb les dades de cada EXERCICI en la pantalla i després resol-lo.
És important que primer el resolguis tu i després comprovis a l'ordinador si ho has fet bé.

Combinatòria

Equips

1. Una classe té ___ persones. Si volem dividir-la en dos equips amb el mateix nombre de persones, de quantes maneres se pot fer?	

Comunitat de veïns

2. Una comunitat de veïns formada per __ persones ha d'escollir un president, un secretari i un tresorer. De quantes maneres es pot fer aquesta elecció?	

Quiniela

3. De quantes formes diferents es pot fer una quiniela? Recorda que una quiniela està formada per 14 partits en els que se poden posar 3 resultats (1 X 2) i un ple al 15 en el qual s'ha d'endevinar el nombre de gols de local i visitant entre 4 valors (0 1 2 M) per a cada equip.	

Prova ciclista

4. En una prova ciclista amb ___ participants s'entreguen 3 mallots. De quantes maneres es poden repartir tenint en compte que una mateixa persona en pot guanyar més d'un?	

Biblioteca

5. Volem col·locar ___ llibres en una estanteria. Calcula de quantes maneres es pot fer si: a) Tots els llibres són diferents. b) Només hi ha tres llibres diferents: __ del primer tipus, __ del 2n i __ del 3r. c) A més a més, tots els que són iguals han de quedar junts.	

Regals

6. Quan has aconseguit ___ punts en un concurs, pots escollir __ regals d'un catàleg de premis entre un total de ___ regals. De quantes maneres diferents pots realitzar la teva elecció?	

Aplicació de la regla de Laplace i propietats de la probabilitat

1 daus

7. Llancem un dau de 10 cares, quina probabilitat hi ha de treure un nombre parell?	

2 daus

8. Llancem dos daus de 6 cares. Quina probabilitat hi ha de treure més de 9 punts?	

3 daus

9. En llançar dos daus, quina probabilitat hi ha de treure igual?	

4 cartes (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

10. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat d'extreure un ____ és?	
11. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat d'extreure un ____ és?	

5 cartes

12. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat d'extreure un 2 o un 5 és?	

6 cartes (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

13. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat de no treure ni un ____ ni un basto és?	
14. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat de no treure ni un ____ ni un basto és?	

7 monedes

15. Si llancem 3 monedes, la probabilitat d'obtenir una cara és?	

8 monedes

16. Si llancem una moneda tres cops, la probabilitat d'obtenir una cara és:	

9 monedes

17. Llancem una moneda trucada tres cops. La probabilitat de cara és ___ i la de creu és ___. Quina és la probabilitat d'obtenir una cara?	

10 urnes

18. En una urna tenim ___ boles blanques i ___ negres. Troba la probabilitat d'extreure una blanca en treure una bola.	

11 urnes

19. En una urna tenim ___ boles blanques i ___ negres. Troba la probabilitat d'extreure'n dues de blanques al treure dues boles amb reposició.	

12 urnes

20. En una urna tenim ___ boles blanques i ___ negres. Troba la probabilitat d'extreure una bola blanca i una negra al treure dues boles amb reposició.	

Clica per anar a la pàgina següent.

Probabilitat condicionada, probabilitat total i Bayes

Dos encreuaments de camins (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

21. Tenim dos camins I i II amb p(I)=___ i p(II)= ___. El camí I pot acabar en turquesa o en rosa amb probabilitats ___ i ____ respectivament. El camí II porta directament a verd. Calcula les probabilitats de les tres destinacions.	
22. Tenim dos camins I i II amb p(I)=___ i p(II)= ___. El camí I pot acabar en turquesa o en rosa amb probabilitats ___ i ____ respectivament. El camí II porta directament a verd. Calcula les probabilitats de les tres destinacions.	

Tres encreuaments de camins (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

23. Tenim dos camins I i II amb p(I)=___ i p(II)= ___. El camí I pot acabar en turquesa o en rosa amb probabilitats ___ i ____ respectivament. El camí II en rosa o en verd amb probabilitats ___ i ____ respectivament. Calcula les probabilitats de les tres destinacions.	
24. Tenim dos camins I i II amb p(I)=___ i p(II)= ___. El camí I pot acabar en turquesa o en rosa amb probabilitats ___ i ____ respectivament. El camí II en rosa o en verd amb probabilitats ___ i ____ respectivament. Calcula les probabilitats de les tres destinacions.	

Camins i Bayes (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

25. Dos camins I i II amb p(I)=___ i p(II)= ___ El primer pot acabar en turquesa o rosa amb probabilitats ___ i ____ respectivament. El segon camí pot acabar en rosa o verd amb probabilitats ___ i ____ respectivament. Si s'ha acabat en rosa, quina és la probabilitat d'haver seguit el primer?	
26. Dos camins I i II amb p(I)=___ i p(II)= ___ El primer pot acabar en turquesa o rosa amb probabilitats ___ i ____ respectivament. El segon camí pot acabar en rosa o verd amb probabilitats ___ i ____ respectivament. Si s'ha acabat en rosa, quina és la probabilitat d'haver seguit el primer?	

Platja sud (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

27. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb ______ va al camp. I amb una probabilitat ___ va al nord i amb la contrària, al sud. Quina és la probabilitat d'anar a una platja del sud?	

28. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb ______ va al camp. I amb una probabilitat ___ va al nord i amb la contrària, al sud. Quina és la probabilitat d'anar a una platja del sud?	

Camp nord (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

29. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb ______ va al camp. I amb una probabilitat ___ va al nord i amb la contrària, al sud. Quina és la probabilitat d'anar al camp del nord?	
30. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb ______ va al camp. I amb una probabilitat ___ va al nord i amb la contrària, al sud. Quina és la probabilitat d'anar al camp del nord?	

Camp platja i Bayes (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

31. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb ______ va al camp. I amb una probabilitat ___ va al nord i amb la contrària, al sud. Sabem que en Felip ha anat a la platja, quina és la probabilitat que a més sigui del nord?	
32. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb ______ va al camp. I amb una probabilitat ___ va al nord i amb la contrària, al sud. Sabem que en Felip ha anat a la platja, quina és la probabilitat que a més sigui del nord?	

Clica per anar a la pàgina següent.

Autoavaluació

Completa aquí cada un dels enunciats que van apareixent a l'ordinador i resol-lo, després introdueix el resultat per comprovar si la solució és correcta.

1. Tirem un dau de 10 cares. P(obtenir <____)=

2. En una bossa tenim ______ boles vermelles, ___ boles blaves i ____ boles verdes. Extraiem una bola, quina és la probabilitat d'obtenir una bola vermella?

3. Disposem d'una baralla de 100 cartes de quatre colors numerades de 1 al 25. Quina és la probabilitat d'obtenir un _____?

4. Esdeveniments elementals={1, 2, 3, 4, 5, 6, ...48, 49, 50} A={1, 2, 3, 4, 5}, B={4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} i C={1, 2, 3, 4, ..., 23, 24, 25}. Calcula p(A ∪ C)=

5. Llancem dos daus normals i sumem. Quina probabilitat hi ha d'obtenir menys de 5?

6. Quina probabilitat hi ha de no treure ni bastos ni figures en extreure una carta d'una baralla espanyola?

7. Extraiem una carta, la retornem i n'extraiem una altra, d'una baralla espanyola. Quina probabilitat hi ha de treure un oro?

8. Tirem dues monedes. Si surten dues cares extraiem una bola d'una urna amb ____B i ____N, i, en cas contrari, d'una urna amb ____B i ____N, quina és la probabilitat de treure una B?

9. Tirem un dau de 10 cares. Si surt més petit que ____, extraiem una carta, i en cas contrari, dues, retornant la primera abans de treure la segona. Quina probabilitat hi ha d'obtenir almenys un oro?

10. En un col·legi el _____% de l'alumnat practica futbol, el ___% bàsquet i el ____% un o l'altre. Quina probabilitat hi ha que un estudiant practiqui els dos esports?

Per practicar més

1. Una classe té 20 persones. Si volem dividir-la en dos equips amb el mateix nombre de persones, de quantes maneres es pot fer?

2. Una comunitat de veïns formada per 36 persones ha d'escollir una persona per fer de president, una altra de secretari i una altra de tresorer. De quantes maneres es pot fer?

3. De quantes formes diferents es pot fer una quiniela?

Recorda que una quiniela està formada per 14 partits en els que se poden posar 3 resultats (1 X 2) i un ple al 15 en el qual s'ha d'endevinar el nombre de gols de local i visitant entre 4 valors (0 1 2 M) per a cada equip.

4. En una prova ciclista amb 53 participants s'entreguen 3 mallots. De quantes maneres es poden repartir tenint en compte que una mateixa persona en pot guanyar més d'un?

5. Volem col·locar 12 llibres en una estanteria. Calcula de quantes maneres es pot fer si:

d) Tots els llibres són diferents.

e) Només hi ha tres llibres diferents: 4 del primer tipus, 3 del 2n i 5 del 3r.

f) A més a més, tots els que són iguals han de quedar junts.

6. Hi ha al mercat diversos tipus de daus, tot i que el més normal sigui el cúbic de sis cares. N'hi ha de 4, 6, 10, 12, i 20 cares. En general, van numerades del 1 al nombre de cares que tenen. Escriu l'esdeveniment "parell" per a cadascun.

7. Tenim un dau de 4 cares numerades del 1 al 4. El tirem una vegada. Escriu l'esdeveniment segur, l'impossible, i tots els possibles classificats per la seva mida.

8. Tenim un dau de 6 cares blanc, en el qual s'han escrit a les cares els següents nombres {1,1,1,2,2,3}. Escriu tots els esdeveniments possibles.

9. A l'escola municipal d'un poble hi ha classes d'esports d'equip de bàsquet, futbol i voleibol. N'hi ha 100 d'inscrits en esports d'equip, 70 van a classes de futbol, 60 de bàsquet i 40 a futbol i bàsquet. Quants van només a voleibol?

10. Determina el nombre de cartes, en una baralla espanyola de 40:

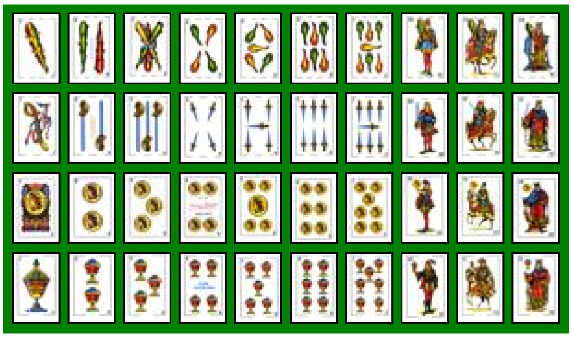
a) Amb numeració inferior a 4.

b) De bastos i més gran que 4.

c) Figures d'oros o bastos.

11. En una baralla espanyola, compta les cartes dels esdeveniments :

a) Oros i sets
b) Oros o sets
b) Set d'oros
d) Figures
c) Oros o figures
f) Oros i figures



12. Per a un dau de sis cares {1,2,3,4,5,6}, escriu els esdeveniments:

a) Parell

b) No parell

c) Parell i més gran que 3

d) Parell o més gran que 3

e) Parell menys més gran que 3

f) El contrari de (parell i més gran que 3)

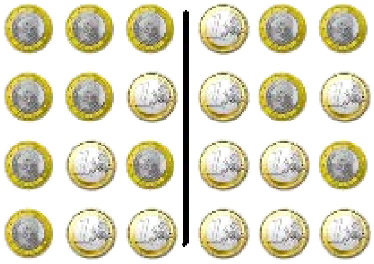
13. Tenim un dau amb els nombres {1,1,1,2}. Si el tirem 100 vegades, quina quantitat de vegades sortirà cada un dels possibles resultats?

14. Tenim un dau de deu cares numerades com {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Quina és la probabilitat de cada un dels esdeveniments elementals?.

15. Tenim una ruleta de 10 posicions, 3 vermelles, 4 verdes, 2 negres i una blava. Quina és la probabilitat que en girar-la s'obtingui cada un dels colors?

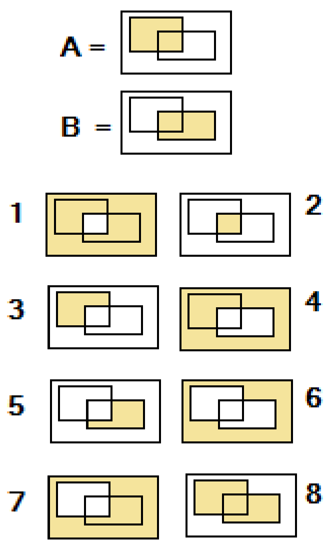
16. Si llancem dues monedes podrem obtenir un d'aquests 4 resultats {OO, XO, OX, XX}.

Pots escriure d'aquesta manera els resultats possibles per a tres monedes?

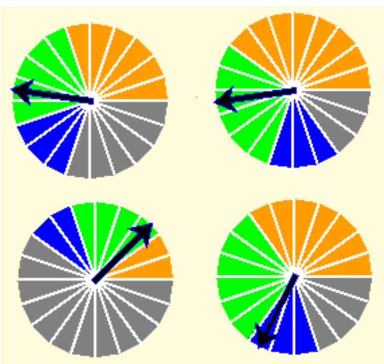


I per a 4? Quina és la probabilitat d'obtenir dues cares en cada un dels experiments?

17. Si sabem que P(A)=0.5, p(B)=0.7 i P(2)=0.3, calcula P(1), P(3), P(4), P(5), P(6), P(7) i P(8):



18. Quina és la probabilitat d'obtenir taronja, verd, blau o gris en cada una de les següents ruletes?



19. Tenim un dau de 10 cares d'aquesta forma {1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2}. I dues urnes, una A={R, R, R, V, V} i B={R, V, V, V, V}. Tirem el dau, si surt 1, extraiem una bola de A, i si surt 2, de B. Quina és la probabilitat d'extreure'n una de vermella de A? I una vermella de B? I una verda de A?.

20. En una bossa hi ha les boles següents {1,2,2,3,3}. Extraiem primer una bola, la tornem i n'extraiem una altra. Calcula les probabilitats següents: P(1,1), P(1,2), P(1,3).

21. Si abans de la segona extracció de l'exercici anterior no tornem la primera bola, quin és el valor de les probabilitats ara?

22. Calcula les probabilitats d'obtenir 2 oros en extreure dues cartes d'una baralla espanyola en els casos de tornar i de no tornar la primera carta a la baralla abans de extreure la segona.

23. Tenim un dau de 10 cares de la forma {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2}, i dues urnes, una A={R,R,R,V,V} i l'altra B={R,V,V,V,V}. Llancem el dau, si surt 1 extraiem una bola de A, i si surt 2 de B. Quina és la probabilitat d'extreure una R? I una V?

24. Tenim una urna amb boles numerades com s'indica {1,1,2,2,2} i dues urnes I={R,V} i II={N,N,R,V}. Extraiem una bola per decidir de quina urna n'escollim una altra. Quina és la probabilitat d'obtenir R o N?

25. Un cop fet l'experiment de l'exercici anterior, ha resultat ser V. Quina és la probabilitat que hagués estat extreta de la urna A? I de la B?

26. Es tiren dues monedes. Si surten dues cares es tira el dau {1,1,1,2,2,2} i si no, el dau {1,1,2,2,3,3}. Quina és la probabilitat d'obtenir un 1? Quan surt 1, amb quina probabilitat ha sortit també dues cares?

27. Deu amics organitzen un viatge i tria la destinació un d'ells per sorteig. Sis volen anar a la costa i quatre a l'interior. Dels primers, dos volen anar al nord i quatre al sud. Dels d'interior, la meitat prefereixen el nord i l'altra meitat, el sud.

a) Troba la probabilitat d'anar a la costa del nord.

b) Quina és la probabilitat d'anar al nord?

c) Si van al nord, quina és la probabilitat que sigui a la costa?