# 3

# Polinomis

## Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Trobar l'expressió en coeficients d'un polinomi i opereu-hi.
- Calcular el valor numèric d'un polinomi.
- Reconèixer algunes identitats notables, el quadrat i el cub d'un binomi.
- Regla de Ruffini i teorema del residu.
- Trobar la descomposició factorial d'alguns polinomis.

# Abans de començar


## Utilitat dels polinomis

Els polinomis no només es troben en la base de la informàtica, en economia els càlculs d'interessos i durada de les hipoteques es realitzen amb expressions polinòmiques, així, el capital C a un percentatge x en 3 anys es converteix en C·(1+x)3 que és el cub d'un binomi.

La medicina i altres branques de la ciència avancen ajudades d'aquesta eina algebraica. Investigueu en la web les utilitats dels polinomis.

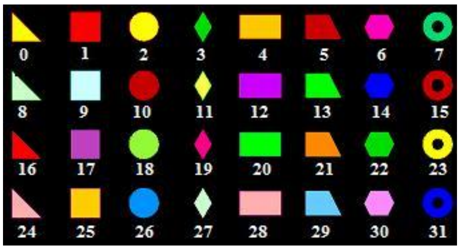
# 1. Polinomis

## Grau i coeficients

El polinomi $\mathbf{x^3+4x+2}$ està format per la suma de tres monomis: $x^3$, 4x y 2; el seu grau, o màxim exponent de x, és 3 i **els coeficients d'aquest polinomi són 1 0 4 2.**

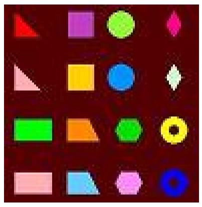
1 és el coeficient de grau 3
0 és el coeficient de grau 2
4 és el coeficient de grau 1
2 és el coeficient de grau 0

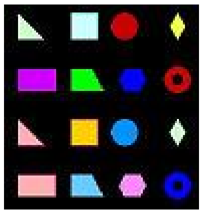
Es pretén que s'identifiqui
$x^3+4x+2$
amb la seva expressió en coeficients
1 0 4 2

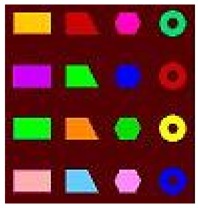


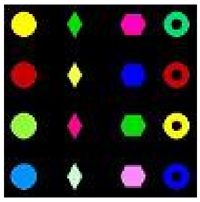

Demaneu a un company que memoritzi una d'aquestes figures però que no digui quina. Vosaltres per telepatia ho endevinareu.

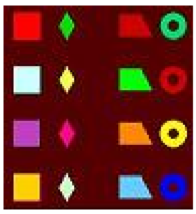
Pregunteu-li si la figura escollida és a cada una de les targetes següents

SI =1


NO =0


NO =0


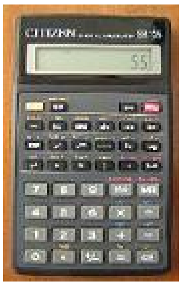
SI =1


NO =0


Amb cada resposta afirmativa escriviu 1, per a la negativa, un 0, per al resultat **10**010, la figura és **la**$1^2$1 · **2**4 +1 · 2 =18, el cercle verd. Només cal calcular el valor en 2 del polinomi els coeficients del qual s'obtenen amb 1 o 0, amb Sí o No.

## Valor numèric

Al sustituir la variable x de un polinomio por un número se obtiene el valor numérico del polinomio. Así **el valor numérico en 3** del polinomio



$P(x)=2x^3-x+4$

**és P(3)=** $2\cdot3^3-3+4=55$

Podeu utilitzar la calculadora per trobar el valor numèric d'un polinomi. Recordeu que per realitzar la potència $7^4$ s'utilitza la tecla $\boxed{x^y}$ ,

**7** $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{=}$ → 2041

El valor numèric en 10 del polinomi de coeficients 2 4 6 és 246 aquesta coincidència del valor en 10 amb els coeficients és perquè el nostre sistema és de base 10 i **246** és igual a **2** · $10^2$ +**4** · 10 +**6**.

Si el número **347** està expressat **en base 8,** la seva expressió en el nostre sistema usual, el decimal, és **3** · $8^2$ +**4** · 8 + **7** =231 que és el valor en 8 del polinomi de coeficients 3 4 7.

En el sistema binari les xifres emprades són 0 i 1 aquí el valor decimal de **1**000**1**1**0** en binari és

$$1\cdot2^6+1\cdot2^2+1\cdot2=70$$

La quantitat de color se sol expressar en sistema hexadecimal o de base 16, aquest sistema té 16 xifres
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 i en aquest sistema la quantitat **38** de color blau equival a **3** · 16 + **8** =56 en decimal.

## EXERCISIS resolts

**1.** Trobeu l'expressió en coeficients dels polinomis $P(x)=5x^2+2x+1$; $Q(x)=x^3-3x$; $R(x)=0,5x^2-4$

Les respectives expressions en coeficients són

$P(x) \rightarrow 5\ \ 2\ \ 1$;  $Q(x) \rightarrow 1\ \ 0\ \ -3\ \ 0$;  $R(x) \rightarrow 0,5\ \ 0\ \ -4$

**2.** Escriviu les expressions polinòmiques dels polinomis l'expressió dels quals en coeficients és:

$P(x) \rightarrow 2\ \ 1\ \ 3\ \ -1$;  $Q(x) \rightarrow 1\ \ 3\ \ 0\ \ 0$;  $R(x) \rightarrow 3/4\ \ -1\ \ 0\ \ 2$

$P(x)=2x^3+x^2+3x-1$;  $Q(x)=x^3+3x^2$;  $R(x)=3/4\ x^3-x^2+2$

**3.** Completeu la taula:

| EXPRESSIÓ POLINÒMICA | EXPRESSIÓ EN COEFICIENTS | GRAU |
|---|---|---|
| $-2x^3+x^5-3x^2$ | | |
| $x^2/3-1$ | | |
| | $-2\ \ \pi\ \ 0\ \ 0$ | |
| | $-2\ \ 1,3\ \ 0\ \ -1/7$ | |
| $3-\sqrt{2}\ x^2$ | | |
| Aquests polinomis són polinomis en una variable, x, amb coeficients al cos dels nombres reals. El conjunt d'aquests polinomis es designa per IR[x]. | | |

| POLINÒMICA | COEFICIENTS | GRAU |
|---|---|---|
| $-2x^3+x^5-3x^2$ | $1\ \ 0\ \ -2\ \ -3\ \ 0\ \ 0$ | 5 |
| $x^2/3-1$ | $1/3\ \ 0\ \ -1$ | 2 |
| $\pi x^2-2x^3$ | $-2\ \ \pi\ \ 0\ \ 0$ | 3 |
| $-2x^3+1,3x^2-1/7$ | $-2\ \ 1,3\ \ 0\ \ -1/7$ | 3 |
| $3-\sqrt{2}\ x^2$ | $-\sqrt{2}\ \ 0\ \ 3$ | 2 |

**4.** Trobeu el valor numèric en 1, 0 i –2 dels polinomis de l'exercici anterior

| POLINOMI | Valor en 1 | Valor en 0 | Valor en -2 |
|---|---|---|---|
| $x^5-2x^3-3x^2$ | -4 | 0 | -28 |
| $x^2/3-1$ | -2/3 | -1 | 1/3 |
| $-2x^3+\pi x^2$ | $-2+\pi$ | 0 | $16+4\pi$ |
| $-2x^3+1,3x^2-1/7$ | -59/70 | -1/7 | 737/35 |
| $-\sqrt{2}\ x^2+3$ | $-\sqrt{2}+3$ | 3 | $-4\sqrt{2}+3$ |

# 2. Operacions

Per operar amb polinomis pot resultar còmode passar les seves expressions a coeficients, operar-hi i donar el resultat en forma polinòmica.

### Suma

$P(x)=8x^4+x^2-5x-4$
$Q(x)=3x^3+x^2-3x-2$

Se sumen els coeficients d'gual grau:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| P(x)→ | 8 | 0 | 1 | -5 | -4 |
| Q(x)→ | | 3 | 1 | -3 | -2 |
| P(x)+Q(x)→ | 8 | 3 | 2 | -8 | -6 |

$P(x)+Q(x)=8x^4+3x^3+2x^2-8x-6$

### Multiplicació

$P(x)=3x^3+5x-4$
$Q(x)=x^2-x+2$

Es multiplica coeficient a coeficient:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x)→ | | | 3 | 0 | 5 | -4 |
| Q(x)→ | | | | 1 | -1 | 2 |
| | | | 6 | 0 | 10 | -8 |
| | | -3 | 0 | -5 | 4 | |
| | 3 | 0 | 5 | -4 | | |
| P(x)·Q(x)→ | 3 | -3 | 11 | -9 | 14 | -8 |

$P(x)\cdot Q(x)=3x^5-3x^4+11x^3-9x^2+14x-8$

### Divisió

$P(x)=3x^3-x^2+5x-4$
$Q(x)=x^2-3x+2$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | -1 | 5 | -4 | \| | 1 | -3 | 2 |
| -3 | 9 | -6 | | | 3 | 8 | |
| | 8 | -1 | -4 | | | | |
| | -8 | 24 | -16 | | | | |
| | | 23 | -20 | | | | |

Quocient=3x+8 Residu=23x-20

$P(x)=12x^3+6x-5$
$Q(x)=4x^2+3$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 0 | 6 | -5 | \| | 4 | 0 | 3 |
| -12 | 0 | -9 | | | 3 | 0 | |
| | 0 | -3 | -5 | | | | |
| | | 0 | 0 | | | | |
| | | -3 | -5 | | | | |

Quocient=3x Residu=-3x-5

### Diferència

$P(x)=3x^3+x^2+5x+4$
$Q(x)=3x^3+3x+2$

Es resten els coeficients d'gual grau:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| P(x)→ | 3 | 1 | 5 | 4 |
| Q(x)→ | 3 | 0 | 3 | 2 |
| P(x)-Q(x)→ | | 1 | 2 | 2 |

$P(x)-Q(x)=x^2+2x+2$

Observeu el grau del resultat:
**$gr(P \pm Q) \leq max(gr(P), gr(Q))$**

**$gr(P\cdot Q)=gr(P)+gr(Q)$**

Dividir dos polinomis D(x), dividend, entre d(x), divisor, és trobar un quocient c(x) i una resta r(x) que compleixin

- Dividend=divisor·quocient +residu
- grau de r(x)<grau de d(x)

**$gr(c)=gr(D)-gr(d)$**

Un exemple operand amb la variable, comencem dividint les potències de major grau

$$x^3+2x^2-3x+5 \quad | \; 3x^2+x$$

$$\frac{x^3}{3x^2}=\frac{1}{3}x$$

continuem

$$x^3+2x^2-3x+5 \quad | \; 3x^2+x$$

$$x^3+\frac{1}{3}x^2 \qquad \frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$$

**quocient**

$$\frac{5}{3}x^2-3x+5$$

$$\frac{5}{3}x^2+\frac{5}{9}x$$

$$-\frac{32}{9}x+5$$

**residu**

## EXERCICIS resolts

**5.** Trobeu P(x)+Q(x) y 2·P(x)-Q(x)

$P(x)=x^4+x^3+3x$ $\qquad$ $Q(x)=2x^3+x^2-4x+5$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| P(x)→ | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |
| Q(x)→ | | 2 | 1 | -4 | 5 |
| P(x)+Q(x)→ | 1 | 3 | 1 | -1 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2·P(x)→ | 2 | 2 | 0 | 6 | 0 |
| Q(x)→ | | 2 | 1 | -4 | 5 |
| 2·P(x)-Q(x) → | 2 | 0 | -1 | 10 | -5 |

**$P(x)+Q(x)=x^4+3x^3+x^2-x+5$** $\qquad$ **$2\cdot P(x)-Q(x)=2x^4-x^2+10x-5$**

**6.** Quin és el grau del quocient en dividir un polinomi de grau 5 entre un altre de grau 2?

El grau del quocient és el grau del dividend, 5, menys el del divisor, 2, o sigui, 3.

**7.** Multiplica $P(x)^{)=}x^3+6x^2+4x-6$ per $Q(x)=\ x^3+3x^2+5x-2$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x)→ | | | | 1 | 6 | 4 | -6 |
| Q(x)→ | | | | 1 | 3 | 5 | -2 |
| | | | | -2 | -12 | -8 | 12 |
| | | | 5 | 30 | 20 | -30 | |
| | | 3 | 18 | 12 | -18 | | |
| | 1 | 6 | 4 | -6 | | | |
| P(x)·Q(x)→ | 1 | 9 | 27 | 34 | -10 | -38 | 12 |

**$P(x)\cdot(Q(x)=x^6+9x^5+27x^4+34x^3-10x^2-38x+12$**

**8.** Fes en cada cas la divisió de P(x) entre Q(x)

$P(x)=\ 2x^3+4x^2+7x+3$

$Q(x)=2x^2+x+3$

| P(x) Dividint | | | | Q(x) Divisor | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | | 1 | 1,5 | |
| | 3 | 4 | 3 | quocient | | |
| | 3 | 1,5 | 4,5 | x+1,5 | | |
| | | 2,5 | -1,5 | | | |

residu

2,5x-1,5

$P(x)=7x^2-2x+5$

$Q(x)=8x+7$

| P(x) Dividint | | | Q(x) Divisor | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | -2 | 5 | 8 | 7 |
| 7 | $\frac{49}{8}$ | | $\frac{7}{8}$ | $\frac{65}{-64}$ |
| | $\frac{65}{-8}$ | 5 | quocient | |
| | $\frac{65}{-8}$ | $\frac{455}{-64}$ | | |
| | | $\frac{775}{64}$ | | |

residu

$\frac{7}{8}x-\frac{65}{64}$

# 3. Identitats notables

## Suma al quadrat

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & +2ab+ & b^2 \end{array}$$

La suma al quadrat és igual a
quadrat de l'1º
+doble de l'1º pel 2º
+quadrat del 2º

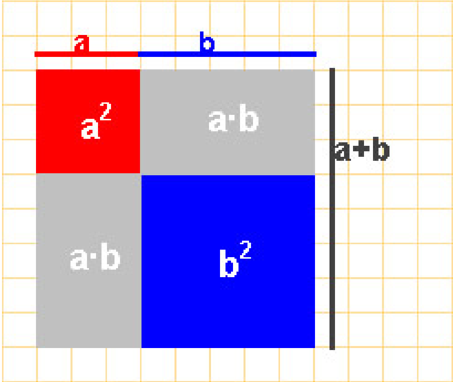
## Diferència al quadrat

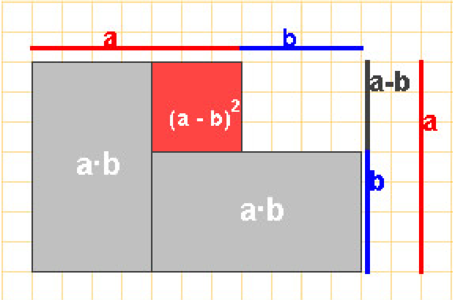
$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2 & -2ab+ & b^2 \end{array}$$

La diferència al quadrat és igual a
quadrat de l'1º
+doble de l'1º pel 2º
+quadrat del 2º



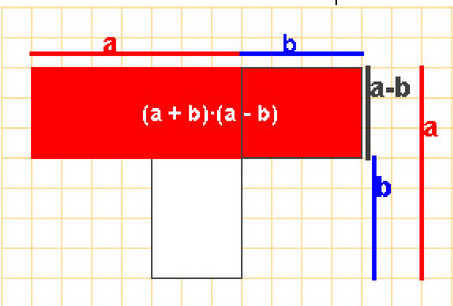

## Suma per diferència

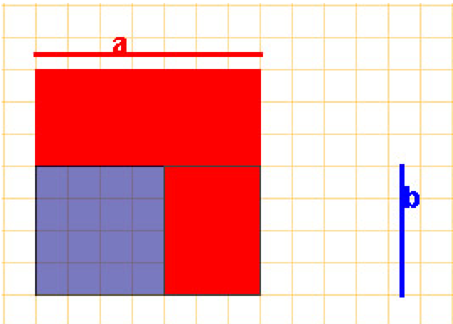
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

La suma per diferència és igual a la diferència de quadrats.

Demostració

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$

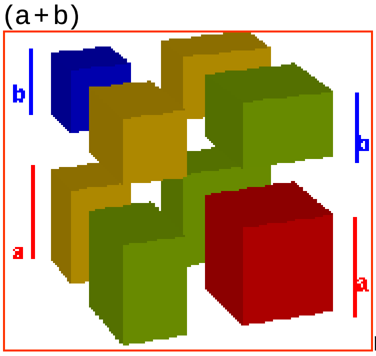


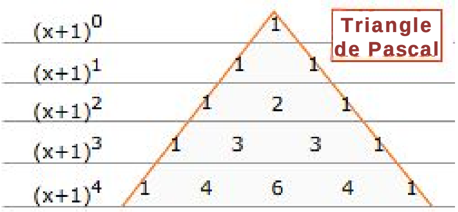

## El cub d'un binomi

$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

Aquesta igualtat es dedueix fàcilment en observar a la figura les 8 peces en què descompon el cub de costat (a+b)




r




Cada terme d'aquest triangle s'obté sumant els dos superiors.
Les files d'aquest triangle són els coeficients de les potències de (x+1)
Així la tercera fila 1 3 3 1 són els coeficients de (x+1)3

## EXERCICIS resolts

**9.** Observeu com s'apliquen les identitats notables

Per desenvolupar (x+3)2
Quadrat del 10→x $^2$ Doble de l'1º pel →202·x·3=6x Quadrat del 2º→3$^2$ =9
per tant (x+$^{3)}$2=x$^2$+6x+9

Per descompondre el polinomi x$^2$-10x+25,
s'intenta veure un dels membres d'una identitat notable,
en ser els signes dels coeficients alternatius, + - +, es compara amb la diferència al quadrat.
25 =5$^2$ i 10x=doble de x per 5→ x$^2$-10x+25=(x-5)$^2$

Per descompondre el polinomi 4 x 2-25
s'intenta veure si és una identitat notable, a l'ésser 0 el coeficient de grau u es compara amb la diferència de quadrats
$4x^2=(2x)^2$; $25=5^2$ → $4x^2-25=(2x+5)\cdot(2x-5)$

**10.** Desenvolupeu les següents expressions

| Expressió | Solució | Expressió | Solució |
|---|---|---|---|
| $(x+4)^2$ | $x^2+8x+16$ | $(x-2)^2$ | $x^2-4x+4$ |
| $(4x+3)^2$ | $16x^2+24x+9$ | $(3-2x)^2$ | $4x^2-12x+9$ |
| $(2x/3+5)^2$ | $4x^2/9+20x/3+25$ | $(x/2-3)^2$ | $x^2/4-3x+9$ |
| $(\sqrt{2}x+1)^2$ | $2x^2+2\sqrt{2}x+1$ | $(x-\sqrt{3})^2$ | $x^2-2\sqrt{3}x+3$ |

**11.** Trobeu l'expressió en coeficients dels següents productes

| Productes | Solució | Productes | Solució |
|---|---|---|---|
| $(x+4)\cdot(x-4)$ | $x^2-16$; 1 0 -16 | $(x-1/2)\cdot(x+1/2)$ | 1 0 -1/4 |
| $(2x+5)\cdot(2x-5)$ | 4 0 -25 | $(3+\sqrt{2}x)\cdot(3-\sqrt{2}x)$ | -2 0 9 |

**12.** Resoleu aplicant les identitats notables l'equació $x^2+10x+16=0$

Es compara la primera part, $\mathbf{x^2+10x}$, amb una identitat notable, amb $(x+5)^2$
Per tant, $(x+5)^2=$ $\mathbf{x^2}$+10x+25, per tant, $x^2+10x=(x+5)^2-25$
i el primer membre de l'equació és $\mathbf{x^2+10x}+16\mathbf{=(x+5)^2-25}+16$,

$(x+5)^2-9=0$→ $(x+5)^2-3^2=0$→ $(x+5+3)\cdot(x+5-3)=0$ → Solucions x=-8 y x=-2

**13.** Calcula el cubo de un binomio

| Binomi al cub | Solució | Binomi al cub | Solució |
|---|---|---|---|
| $(x+2)^3$ | $x^3+6x^2+12x+8$ | $(x-1)^3$ | $x^3-3x^2+3x-1$ |
| $(2x-3)^3$ | $8x^3-36x^2+18x-27$ | $(3+x/3)^3$ | $x^3/27+x^2+9x+27$ |

**14.** Trobeu la fila 5 del triangle de Pascal, i calculeu $(x+1)^5$

**15.** La fila 5 del triangle és 1 5 10 10 5 1, que són els coeficients de $(x+1)^5$, per tant, $(x+1)^5=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

# 4. Divisió per x–a

## Regla de Ruffini

La regla de Ruffini és útil per dividir polinomis entre x-a.

En l'exemple de la dreta es divideix $3x^3-5x^2+1$ entre x-2, obtenint de quocient $3x^2+x+2$ i de residu, 5.La regla explicada per a **a=2**, val també quan **a** és un nombre racional o real, en l'exemple següent es pren **a=-3/2** i representa la divisió de $4x^2+5x+2$ entre x+3/2

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 2 |
| **-3/2** | | -6 | 3/2 |
| | **4** | **-1** | **7/2 residu** |

**quocient**
**4x-1**

## Teorema del residu

**Exemple**
Dividend=**$x^4$-2**; divisor=**x-4**
Feu la divisió en el quadern

Resulta, cociente=**$x^3+4x^2+16x+64$** y resto=**254**
Escriviu la igualtat, dividend = divisor·quocient+residu

**$x^4-2=(x-4)\cdot(x^3+4x^2+16x+64)+254$**
Substituïm la x per 4

**$4^4-2=(4-4)\cdot(4^3+4\cdot 4^2+16\cdot 4+64)+254$**
$4^4-2=0\cdot(4^3+4\cdot4^2+16\cdot4+64)+254$
$4^4$-2=0·(________________)+254
$4^4-2=0+254$

Conclusió, **en substituir la x pel 4 dividend ens dóna el residu de la divisió per x-4**

**Teorema del residu.** Per calcular el residu de la divisió d'un polinomi P(x) entre x–a només s'ha de substituir en P(x) la x per a.

Recordeu-ho

**P(x) és divisible entre x-a <=> P(a)=0**

Sovint, per trobar el residu d'una divisió entre x–a, resulta més còmode aplicar la regla de Ruffini que substituir la x. El teorema del residu ens serveix per resoldre problemes com el següent,trobeu m perquè el polinomi

$$P(x)=x^3+mx-4$$

sigui divisible per x-2, que es decideix substituintla x per 2, igualant-ne 0 i aïllant m, així m=-2.

Observeu la divisió i com es realitza la regla de Ruffini pas per pas

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | -5 | 0 | 1 | 1 | -2 |
| -3 | 6 | | | 3 | 1 2 |
| | 1 | 0 | | quocient | |
| | -1 | 2 | | | |
| | | 2 | 1 | | |
| | | -2 | 4 | | |
| | | | 5 | residu | |

Regla de Ruffini

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | -5 | 0 | 1 |
| 2 | ↓ | | | |
| | 3 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | -5 | 0 | 1 |
| 2 | | 6 | | |
| | 3 | | | |

Es multiplican

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | -5 | 0 | 1 |
| 2 | | 6 | | |
| | 3 | 1 | | |

Se sumen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | -5 | 0 | 1 |
| 2 | | 6 | 1 | |
| | 3 | | | |

Es multiplican

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | -5 | 0 | 1 |
| 2 | | 6 | 2 | |
| | 3 | 1 | 2 | |

Se sumen

Es torna a multiplicar i sumar obtenint

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | -5 | 0 | 1 | |
| 2 | | 6 | 2 | 4 | |
| | 3 | 1 | 2 | 5 | residu |

quocient

### Amb la calculadora

Per calcular el valor numèric d'un polinomi amb la calculadora, valor de $P(x)=3x^{3-5x2}+1$ en x=2
Podem aplicar la regla de Ruffini, per a això teclegeu la següent seqüència:

**2** $\boxed{\text{M in}}$ $\boxed{\text{x}}$ 3 → 3
$\boxed{-}$5 $\boxed{=}$ → 1
$\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+0}$ → =2
$\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+1}$ $\boxed{=5}$

Obtenim: $\boxed{5}$ que és la resta de dividir P(x) per a x-2 i el valor numèric en x=2.
De passada han anat sortint els coeficients del quocient cada vegada que es premia $\boxed{=}$.

## EXERCICIS resolts

**16.** Apliqueu la regla de Ruffini per dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ i $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre $x-3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | -2 | 1 |
| 3) | | 3 | 24 | 66 |
| | 1 | 8 | 22 | 67 |

Quocient $x^2+8x+22$

Resta 67

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | 0 | 0 | -5 |
| 3) | | 6 | 18 | 54 | 162 |
| | 2 | 6 | 18 | 54 | 157 |

Quocient $2x^3+6x^2+18x+54$

Resta 157

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -4 | 0 |
| 3) | | 3 | 18 | 42 |
| | 1 | 6 | 14 | 42 |

Quocient $x^2+6x+14$

Resta 42

**17.** Apliqueu la regla de Ruffini per dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ i $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre $x+1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 1 |
| -1) | | -1 | -2 | 4 |
| | 1 | 2 | -4 | 5 |

Quocient $x^2+2x-4$

Resta 5

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | -2 |
| -1) | | -1 | 1 | -1 | 1 |
| | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 |

Quocient $x^3-x^2+x-1$

Resta -1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -4 | -1 | 0 |
| -1) | | -1 | 5 | -4 |
| | 1 | -5 | 4 | -4 |

Quocient $x^2-5x+4$

Resta -4

**18.** Apliqueu la regla de Ruffini per dividir $P(x)=3x^3+5x^2-2x+1$ y $Q(x)=6x^4-2$ i entre $x+2/3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 5 | -2 | 1 |
| -2/3) | | -2 | -2 | 8/3 |
| | 3 | 3 | -4 | 11/3 |

Quocient $3x^2+3x-4$

Resta 11/3

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 0 | 0 | 0 | -2 |
| -2/3) | | -4 | 8/3 | -16/9 | 32/27 |
| | 6 | -4 | 8/3 | -16/9 | -22/27 |

Quocient $6x^3-4x^2+\frac{8}{3}x-\frac{16}{9}$

Resta $-22/27$

**19.** Si el valor numèric d'un polinomi en 2 és igual a 3 i el quocient de la seva divisió d'entre $x-2$ és $x$. Sabeu de quin polinomi es tracta?

Dividend = divisor·cociente +resta, el divisor és $x-2$, el quocient $x$ i la resta 3, per tant el polinomi és $x^2-2x+3$

**20.** Trobem m perquè $mx^2+2x-3$ sigui divisible entre $x+1$

El polinomi serà divisible entre $x+1$ si el seu valor en -1 és 0, després ha de ser

$m-2-3=0$, és a dir, $m=5$

**21.** Existeix algun valor de m perquè el polinomi $x^3+mx^2-2mx+5$ sigui divisible per $x-2$?

Pel teorema de la resta n'hi ha prou amb resoldre l'equació $23+m^{\cdot 2}2-2m\cdot 2+5=0$, cosa que dóna una igualtat impossible $13=0$, per tant no hi ha cap valor de m per al qual el polinomi sigui divisible per $x-2$

# 5. Descomposició factorial

### Treure el factor comú d'una potència de x

S'anomenen divisors impropis d'un polinomi P(x), amb coeficients en IR, els nombres reals i els polinomis obtinguts de multiplicar P(x) per un nombre real.

> Els primers de IR[x] són els polinomis de grau u i els polinomis de grau dos, $ax^2+bx+c$, amb $b^2-4ac<0$

Un polinomi és **primer** si no té divisors propis i el seu grau és més gran que zero (els polinomis de grau zero es diuen unitats o invertibles, perquè tenen invers).

El primer pas per descompondre un polinomi en factors primers és treure el factor comú d'una potència de x, quan sigui possible. Això s'explica en l'animació de la dreta.

**Exemples de descomposició factorial**

$x^5-5x^4+6x^3=x^3\cdot(x^2-5x+6)=x^3\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

S'ha tret factor comú $x^3$ de tots els sumands o monomis, per al segon pas s'ha resolt l'equació de segon grau $x^2-5x+6=0$, ja que segons el teorema de la resta, $x^2-5x+6$ és divisible per (x-a) si $a^2-5a+6$ val zero, per tant, a és solució de l'equació

$x^2-5x+6=0$

$x^2-6x+9=(x-3)^2$ S'ha aplicat una identitat notable per descompondre'l.

$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$ L'equació x2+x+1=0 no té solució real, per tant, el polinomi és primer

$2x^2+3x+1=2\cdot(x+1)\cdot(x+1/2)$ Les solucions de l'equació 2x2+3x+1=0 són -1 i -1/2. **Cal anar amb compte**, en factoritzacions d'aquest tipus, **de no oblidar el factor de $x^2$**.

### Arrels d'un polinomi

Si x–a és un divisor del polinomi P(x), es diu que **a és arrel** de P(x), pel teorema del residu sabem que això equival a dir que P(a)=0.

$P(x)=p_n x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1 x+p_0$ y **a arrel** de P(x),

$$p_n a^n+p_{n-1}a^{n-1}+\ldots+p_1 a+p_0=0,$$

i aïllant $p_0$

$$p_0=-p_n a^n-p_{n-1}a^{n-1}-\ldots-p_1 a$$

Per tant, si els coeficients de P(x) són nombres enters i a també, $p_0$ és múltiple de **a**.

> Les **arrels** no nul·les d'un polinomi amb coeficients sencers, són **divisors del coeficient de menys grau** del polinomi.

La descomposició d'un polinomi de tercer grau amb arrels 4, 1 y -2 és a·(x-4)·(x-1)·(x+2).

S'anomena **multiplicitat** d'una arrel el nombre de vegades que apareix en la descomposició.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=2\cdot x^4\cdot x^5+x^4\cdot x^2-3\cdot x^4$$

**X4 és a tots els sumands.**

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=x^4\cdot(2x^5+x^2-3)$$

**S'ha tret factor comú una potència de x.**

| Arrel 2 | Arrel -2 |
|---|---|
| Divisor x-2 | Divisor x+2 |

**Descomposició factorial de $x^4-15x^2+10x+24$**

Les possibles arrels racionals d'aquest polinomi són els divisors de 24

±1 ±2 ±3 ±4 ±6 ±8 ±12 ±24

Amb la regla de Ruffini anem veient quins divisors són arrels

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -15 | 10 | 24 |
| -1) | | -1 | 1 | 14 | -24 |
| | 1 | -1 | -14 | 24 | 0 |
| 2) | | 2 | 2 | -24 | |
| | 1 | 1 | -12 | 0 | |
| 3) | | 3 | 12 | | |
| | 1 | 4 | 0 | | |

$x^4-15x^2+10x+24=$
$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$

## EXERCICIS resolts

**21.** Traieu factor comú d'una potència de x en cada un dels següents polinomis:
$P(x)=2x^3+3x$ $Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solució: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $Q(x^{)}=x4\cdot(2x^2-3x+1)$ $R(x^{)}=2x^{3\cdot(x3}+3x^{2+}4)$, en en aquest últim cas s'ha pogut treure factor comú també d'un nombre.

**22.** Trobeu la descomposició factorial de $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. S'ha tret factor comú $x^4$.
Les possibles arrels senceres de $x^3–x^2$**–4** són els **divisors de –4**:

1,-1, 2,-2, 4,-4

Vegem per la regla de Ruffini si 1 és arrel de P

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | 0 | -4 |
| 1) | | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | **$-4\neq 0$,** |

1 no és arrel de P

Vegem per la regla de Ruffini si -1 és arrel de P

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | 0 | -4 |
| -1) | | -1 | 2 | -2 |
| | 1 | -2 | 2 | **$-6\neq 0$** |

**-**1 no és arrel de P

Vegem per la regla de Ruffini si 2 és arrel de P

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | 0 | -4 |
| **2**) | | 2 | 2 | 4 |
| | 1 | 1 | 2 | **0** |

2 és arrel de P

1 1 2 = $x^2+x+2$ L'equació $x^2+x+2=0$ no té solucions reals, per tant és primer

$\boxed{\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x\mathbf{-2})\cdot(x^2+x+2)}$

**23.** Trobeu la descomposició factorial de $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$

Les possibles arrels senceres de $x^4+x^3–x^2–2x$**–2** són els **divisors de –2**:

1,-1, 2,-2

Vegem per la regla de Ruffini si 1 és arrel de P

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | -1 | -2 | -2 |
| 1) | | 1 | 0 | -1 | -3 |
| | 1 | 0 | -1 | -3 | **-5 diferent de 0,** |

1 no es raíz de P

Vegem per la regla de Ruffini si -1 és arrel de P

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | -1 | -2 | -2 |
| -1) | | -1 | 2 | -1 | 3 |
| | 1 | -2 | 1 | -3 | **1 diferent de 0,** |

-1 no es raíz de P

Vegem per la regla de Ruffini si 2 és arrel de P

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | -1 | -2 | -2 |
| 2) | | 2 | 2 | 2 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 | **-2 diferent de 0,** |

2 no és arrel de P

Vegem per la regla de Ruffini si 1 és arrel de P

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | -1 | -2 | -2 |
| -2) | | -2 | 6 | -10 | 24 |
| | 1 | -3 | 5 | -12 | **22 diferent de 0,** |

-2 no és arrel de P

$\boxed{\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}\text{ No té arrels senceres}}$

No podem trobar la descomposició factorial d'aquest polinomi.

## EXERCICIS resolts

**25.** Si els coeficients de $P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1x+p_0$ són nombres enters, les possibles arrels racionals de P(x) són de la forma

$$\frac{\text{divisor de } p_0}{\text{divisor de } p_n}$$

Trobeu la descomposició factorial de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$

Les possibles arrels en de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$ són els quocients dels divisors de 6 entre els divisors de 12,

$$\frac{\text{divisors de } 6}{\text{divisors de } 12};\quad \frac{\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm6}{\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm12}$$

$$\pm1 \quad \pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{1}{3} \quad \pm\frac{1}{4} \quad \pm\frac{1}{6} \quad \pm\frac{1}{12} \quad \pm2 \quad \pm\frac{2}{3} \quad \pm3 \quad \pm\frac{3}{2} \quad \pm\frac{3}{4} \quad \pm6$$

És fàcil veure amb la regla de Ruffini que ni 1, ni–1 són arrels de P.

Vegem per la regla de Ruffini si 1/2 és arrel de P

|  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
|  | 12 | 4 | -17 | 6 |
| 1/2) |  | 6 | 5 | -6 |
|  | 12 | 10 | -12 | **0** |

1/2 és arrel de P.

En resoldre l'equació $12x^2+10x-12=0$, s'obté que -3/2 i 2/3 són arrels de P.

$$\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}=12\cdot(x-1/2)\cdot(x+3/2)\cdot(x-2/3)$$

**26.** Trobeu la descomposició factorial de $\mathbf{x^4-4}$

Busquem les arrels racionals de $\mathbf{x^4-4}$. Les possibles arrels en Q són els quocients dels divisors de -4 (coeficient de menor grau) entre els divisors de 1 (coeficient de major grau),

$$\frac{\text{divisors de } -4}{\text{divisors de } 1};\quad \frac{\pm1 \quad \pm2 \quad \pm4}{\pm1}$$

$$\pm1 \quad \pm2 \quad \pm4$$

És fàcil veure amb la regla de Ruffini que cap dels valors possibles no són arrels de $x^4–4$. El polinomi no té arrels racionals.

Si es reconeix $x^4–4$ com una diferència de quadrats $(\mathbf{x^2})^2–\mathbf{2}^2$ resultarà fàcil la descomposició factorial:
$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
El primer factor és primer, però el segon torna a ser una diferència de quadrats $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$$

## EXERCICIS resolts

**27.** Trobeu la descomposició factorial de $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$

Les possibles arrels racionals d'aquest polinomi són els divisors de 12

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ±1 | ±2 | ±3 | ±4 | ±6 | ±12 |

Amb la regla de Ruffini mirem quins divisors són arrels del polinomi

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -7 | 4 | 12 |
| **-1)** | | -1 | 8 | -12 |
| | **1** | **-8** | **12** | **0** |
| **2)** | | 2 | -12 | |
| | 1 | -6 | **0** | |

$$\boxed{\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)}$$

**28.** Trobeu la descomposició factorial de $\mathbf{(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2}$

S'apliquen les **identitats notables**:
diferència de quadrats=suma per diferència

$$(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2=(3x^3+6x)\cdot(x^3-4x+3)$$

El primer factor $(3x^3+6x)$ es descompon traient el **factor comú** $3x$, $(3x^3+6x)=3x\cdot(x^2+2)$; $x^2+2$ és primer, ja que l'equació de segon grau $x^2+2=0$ no té arrels reals.

Per $(x^3-4x+3)$ **es busquen les seves arrels racionals**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 3 | -3 |

Veiem que 1 és arrel

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -4 | 3 |
| 1) | | 1 | 1 | -3 |
| | 1 | 1 | -3 | **0** |

$(x^3-4x+3)=(x-1)\cdot(x^2+x-3)$
Per descompondre $x^2+x-3$ es resol l'**equació de segon grau** $x^2+x-3=0$ que té per solucions

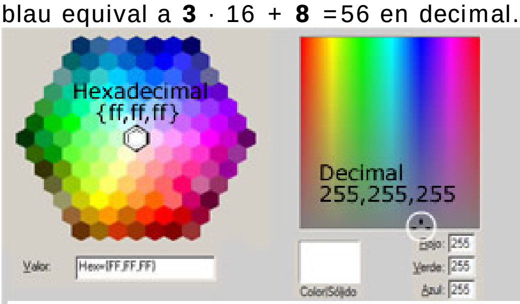
$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \quad y \quad \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{(2x^3+x+\tfrac{3}{2})^2-(x^3+5x-\tfrac{3}{2})^2}=3x\cdot(x^2+2)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)}$$

## Per practicar

**1.** El número 5352 és en base 7. Quin és el seu valor en el sistema decimal? S'ha de trobar el valor numèric en 7 del polinomi de coeficients 5 3 5 2.

**2.** La quantitat de color se sol expressar en sistema hexadecimal o de base 16, aquest sistema té 16 xifres: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 i en aquest sistema la quantitat **38** de color blau equival a **3** · 16 + **8** =56 en decimal.




Aquestes imatges les podue veure quan escolliu color a Word. La quantita de vermell.

Expresseu en decimal les quantitats hexadecimals 62 i 5d de color blau.

**3.** Trobeu P(x)-5·Q(x) quan $P(x)=4x^2+4x$ i $Q(x)=6x^2+2x$.

**4.** Multipliqueu els polinomis $P(x)=4x^2-7x+3$ y $Q(x)=-x^2+5$.

**5.** Trobeu el quocient i el residu de la divisió de $-4x^3+7x^2-x-5$ entre $-2x^2-5x-2$.

**6.** Feu la divisió de $3x^3+x-4$ entre x+2 aplicant la regla de Ruffini.

**7.** Apliqueu el teorema de la resta per calcular la resta de la divisió de $3x^{3-5x2}+7$ entre x-5.

**8.** a) Trobeu m perquè $x^3+mx^2-3mx+3$ sigui divisible per x+5

b) Troba m per a que $x^3+mx^2-5mx+6$ sigui divisible per x-5.

**9.** Trobeu-ne les potències
a) $(2x+3)^2$
b) $(2x-1)^3$
c) $(x-3)^2$
d) $(x+2)^3$

**10.** Resoleu les següents equacions aplicant les identitats notables:
a) $x^2+4x-21=0$
b) $x^2-10x+9=0$

**11.** Trobue la fila 4ª del triangle de Pascal Calculeu el coeficient de grau 2 de $(x+1)^4$?

**12.** Simplifiqueu les següents fraccions algebraiques

a) $\dfrac{x^2+8x+16}{3x+12}$

b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$

c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{12x^2-3}$

**12.** Trobeu la descomposició en factors primers dels següents polinomis

a) $4x^7+12x^6-4x^5-12x^4$

b) $3x^8+9x^7-12x^5$

c) $12x^3-16x^2-7x+6$

d) $8x^3-20x^2+22x-7$

e) $2x^3-9x^2+5x+5$

**13.** Apliqueu les identitats notables per descompondre els següents polinomis

a) $x^4-6^4$

b) $x^4-x^2-24x-12^2$

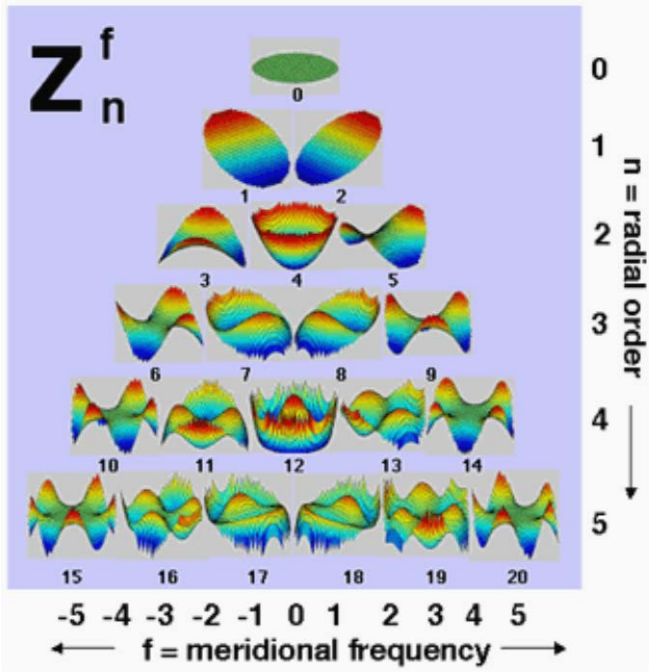
c) $x^4-98x^2+49^2$

**14.** Un polinomi de grau 3 té per arrels –1, 4 i 1. Trobeu la seva descomposició factorial sabent que el seu valor en 2 és -24.

# Per saber-ne més

## Els polinomis en altres ciències

Si vau investigar en la web, és probable que trobessiu molts polinomis amb nom propi: Polinomis de Lagrange, Hermite, Newton, Čebišev... aquí copiem un extracte d'un bloc que parla dels polinomis de Zernike i la seva aplicació en òptica per corregir defectes visuals.




...Les matemàtiques, amb els polinomis de Zernike, ens ofereixen un mètode per descompondre superfícies complexes en els components més simples. **Així, amb aquest procediment matemàtic podem jerarquitzar i definir totes les aberracions visuals.** Un esquema que és present amb molta freqüència en les consultes de cirurgia reactiva és el de les diferents aberracions agrupades i jerarquitzades:

El tema de la jerarquia és fonamental, perquè segons quin sigui el grup de l'aberració, tindrà més importància o menys, serà més fàcil o menys de corregir, etc. Per exemple, el número 4 correspon a la miopia (i el seu invers, a la hipermetropia), i el 3 i 5 corresponen a l'astigmatisme...

Extracte de la pàgina
http://ocularis.es/blog/?p=29

## Algorisme d'Euclides

La descomposició factorial de nombres o de polinomis serveix per simplificar fraccions.

| Numèriques | Polinòmiques |
|---|---|
| $\frac{18}{30} = \frac{2\cdot 3^2}{2\cdot 3\cdot 5} = \frac{3}{5}$ | $\frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)} = \frac{x}{x+2}$ |

Però no resulta fàcil amb aquest mètode simplificar qualsevol fracció, ja que la descomposició factorial pot resultar difícil de calcular. L'algorisme d'Euclides, explicat a la dreta, és un mètode segur per calcular el mcd i poder així simplificar qualsevol fracció, es basa en què el mcd del dividend i del divisor és el mcd del divisor i de la resta.

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$$

Dividend = divisor · quocient + residu
Per tant
**m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)**
Així es redueixen els elements per als quals s'ha de calcular el MCD
Recordeu aquesta igualtat

Trobeu el **m.c.d. de 1219 y 299**

$$\begin{array}{r|l} 1219 & 299 \\ \hline 23 & 4 \end{array}$$

Apliquem que el **m.c.d. (D,d) = MCD (d,r)**
Després n'hi ha prou amb calcular-ne

$$\begin{array}{r|l} 299 & 23 \\ \hline 69 & 13 \\ 0 & \end{array}$$

**m.c.d.(299,23)=m.c.d.(13,0)=13**

Trobar el **m.c.d. de $x^4+2x^3+7x^2+6x+9$ i $x^4+2x^3+6x^2+5x+6$**

Fem la divisió

$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 7\ 6\ 9 & 1\ 2\ 6\ 5\ 6 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 3 & 1 \end{array}$$

Apliquem que **m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)**
i tornem a dividir

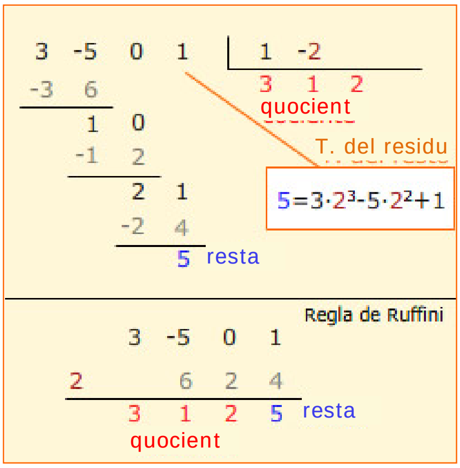
$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 6\ 5\ 6 & 1\ 1\ 3 \\ \hline 1\ 3\ 5 & 1\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 6 & \\ 0\ 0 & \end{array}$$

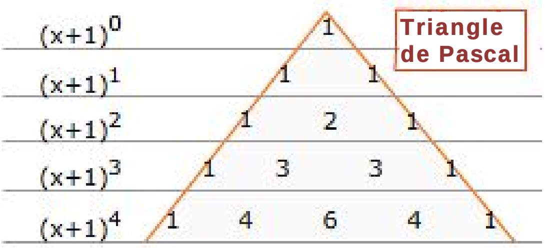
El MCD demanat és **1 1 3 = $x^2+x+3$**

# Recordeu el més important

### Operacions amb polinomis
### Regla de Ruffini i teorema de la resta

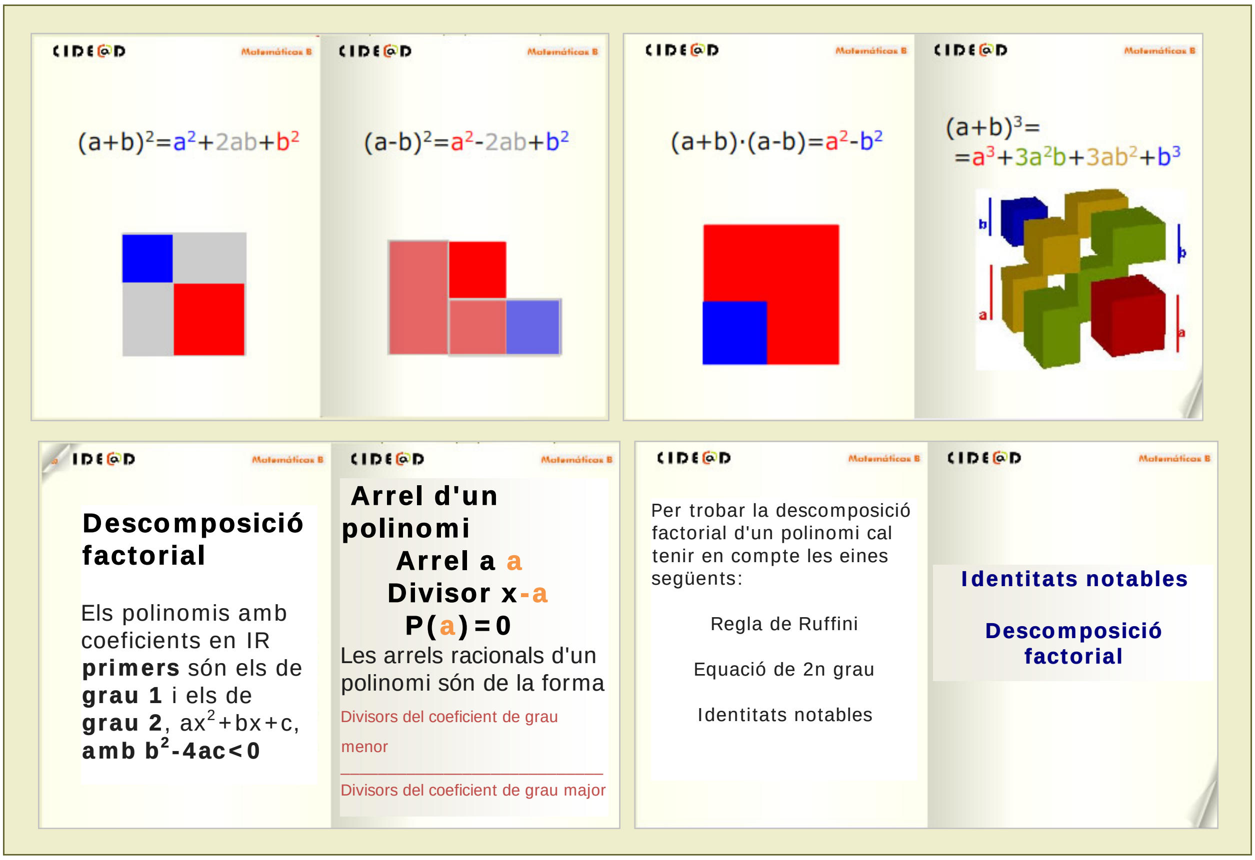
**La resta de la divisió per x-a és el valor numèric del dividend en a**




### Arrels d'un polinomi

| Arrel 2 | Arrel -2 |
|---|---|
| Divisor x - 2 | Divisor x + 2 |
| P(2) = 0 | P(-2) = 0 |



## Autoavaluació

1. Trobeu els coeficients de $P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot R(x)$ quan $P(x)=2x+1$, $Q(x)=5x^2-5$ i $R(x)=x^2+11x$.

2. Calculeu el quocient i la resta de la divisió de $6x^{3-5x2}+4$ entre $x^2+3$.

3. Quins són els coeficients de $(x+4)^3$?

4. ¿És certa la igualtat $4x^2+10x+25=(2x+5)^2$?

5. Calculeu m perqué el residu de la divisió de $8x^2+mx+3$ entre $x+2$ sigui 3.

6. Si $P(x)=ax^2+bx+5$ y $a\cdot 6^2+b\cdot 6=4$, quin és el residu de la divisió de P(x) entre x-6?

7. Trobeu una arrel sencera del polinomi $x^3+5x^2+6x+8$

8. Trobeu una arrel racional de $4x^{3+5x2}+25x+6$

9. El polinomi $5x^3+7x^2-28x-12$ té com a arrels 2 y –3 calculeu l'altra.

10. Les arrels d'un polinomi de grau 3 són –5, 0 i 6. Calculeu el valor numèric del polinomi en 7 sabent que el seu coeficient de major grau és 3.

## Solucions dels exercicis per practicar

1. 1899
2. 98, 93
3. $-26x^2-6x$
4. $-4x^5+7x^4-17x^2-35x+15$
5. Quocient $=2x-17/2$, resta= $\frac{-79}{2}x-22$
6. Quocient 3 -6 13 **resta -30**
7. $3\cdot5^3-5\cdot5^2+7=257$
8. a) $m=61/20$,
   b) No pot ser divivisible entre x-5
9. a) $4x^2+12x+9$
   b) $8x^3-12x^2+6x-1$
   c) $x^2-6x+9$
   d) $x^3+6x^2+12x+8$
10. a) $(x+2)^2-5^2=(x+2+5)\cdot(x+2-5)$;
    -7 y 3
    b) $(x-5)^2-4^2=(x-5+4)\cdot(x-5-4)$;1 y 9
11. 1 4 **6** 4 1
12. a) $\frac{x+4}{3}$
    b) $\frac{3x+6}{x-2}$
    c) $\frac{2x+1}{6x-3}$
13. a) $4x^4\cdot(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$
    b) $3x^5\cdot(x+2)^2\cdot(x-1)$
    c) $12\cdot(x+2/3)\cdot(x-3/2)\cdot(x-1/2)$
    d) $(x-1/2)\cdot(8x^2-16x+14)$
    e) $(x+\frac{1}{2})\cdot2\cdot(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2})\cdot(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2})$
14. a) $(x^2+36)\cdot(x+6)\cdot(x-6)$
    b) $(x^2+x+12)\cdot(x-4)\cdot(x+3)$
    c) $(x+7)^2\cdot(x-7)^2$
15. $4\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)$

## Solucions de l'AUTOEVALUACIÓ

1. 12 28 1 -5
2. Quocient 6x-5, resta $-18x+19$
3. 1 12 48 64
4. No, $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
5. $m=16$
6. 9
7. $-4$
8. $-1/4$
9. $-2/5$
10. 252