5

Inequacions

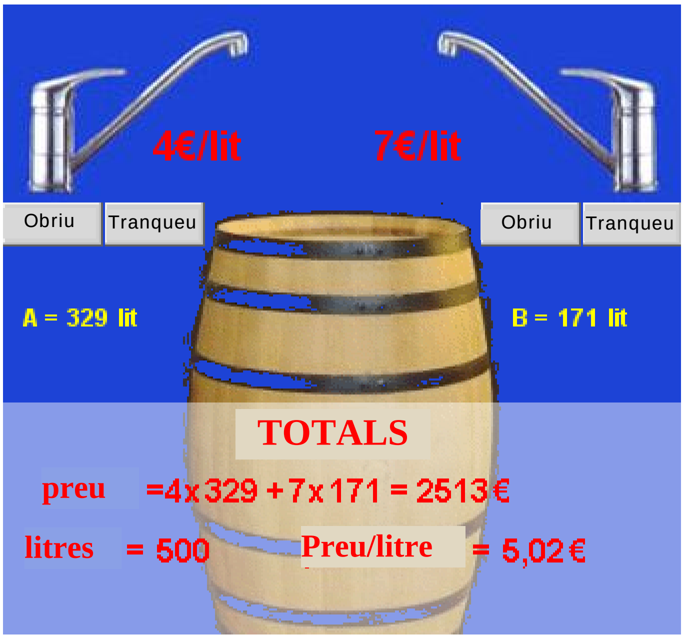
Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Resoldre inequacions de primer i segon grau amb una incògnita.
- Resoldre sistemes d'equacions amb una incògnita.
- Resoldre de manera gràfica inequacions de primer grau amb dues incògnites.
- Resoldre de manera gràfica sistemes d'inequacions de primer grau amb dues incògnites.
- Plantejar i resoldre problemes amb inequacions.

Abans de començar

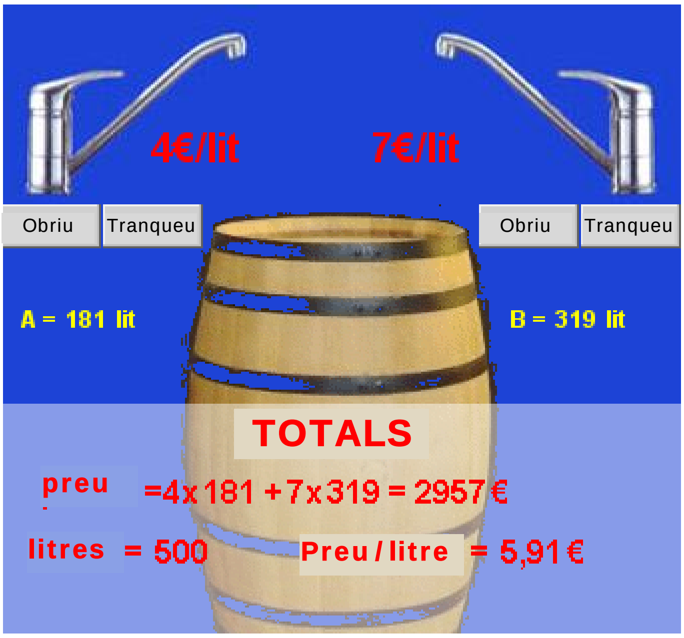
Per situar-vos



Les inequacions s'utilitzen amb freqüència per resoldre problemes de mescles. Aquí se us planteja un problema perquè aneu investigant pel vostre compte. En el capítol 4 trobareu la solució si no heu aconseguit trobar-la vosaltres sols.

Un vinater disposa al seu magatzem de dos tipus de vi: un a 4€ el litre i un altre a 7€ el litre. Vol barrejar-los per omplir un barril de 500 litres de capacitat i vol que la barreja no costi més de 6€ ni menys de 5€ el litre. Esbrineu entre quins valors s'ha de situar la quantitat de litres del primer tipus de vi perquè el preu final se situï a l'interval desitjat.

Les imatges adjuntes us presenten dues situacions pròximes a la solució del problema. Useu la calculadora per intentar aproximar més els resultats al valor real de la solució.



1. Inequacions de 1r grau amb una incògnita

Definicions

Una **desigualtat** és qualsevol expressió en la qual s'utiliza algún dels símbols següents:

< (menor que), > (major que)
≤ (menor o igual que), ≥ (major o igual que)

Per exemple:

$2<3$ (dos es menor que 3)
$7>\pi$ (set és major que pi)
$x\leq 5$ (x és menor o igual que 5)

Una **inequació** és una **desigualtat** entre expressions algebraiques. Aquí estudiem només les de primer grau.

Una **inequació de primer grau** és una inequació en la qual els dos membres són polinomis de grau menor o igual a 1.

Les **solucions** d'una inequació són tots els nombres reals que fan que la inequació esmentada sigui certa.

Inequacions equivalents

El procés de resolució d'inequacions que veurem després es basa (igual que en el cas de les equacions) en la transformació de la inequació inicial en una altra d'equivalent més senzilla.

Es diu que dues inequacions són **equivalents** si tenen el mateix conjunt de solucions.

- ✓ Si als dos membres d'una inequació se'ls suma o resta la mateixa quantitat, s'obté una inequació equivalent.
- ✓ Si es multipliquen o divideixen els dos membres d'una inequació per una mateixa quantitat, s'obté una inequació equivalent amb el mateix sentit de la desigualtat si aquesta quantitat és positiva, i amb el sentit contrari si aquesta quantitat és negativa.

Les desigualtats poden ser **certes** o **falses.**

Per exemple:

$2 < 2$ és una desigultat certa.
$2 > 3$ és una desigultat falsa

$X < 5$ és una desigualtat que pot ser certa per a alguns valors de x, i falsa per a altres.

Els nombres o les expressions que apareixen en tots dos costats dels símbols de la desigualtat reben el nom de **membres** de la desigualtat.

Recordeu que també s'usa aquest nom en les igualtats i en les equacions.

Una **inequació** és una desigualtat els membres de la qual són expressions algebraiques.

Per exemple:

$3x + 7y < 5$, $x^2 - 3x + 5 \geq 0$, $\dfrac{3-x}{2+x+y} < 5- xy$

Si els dos membres de la inequacío són polinomis parlarem d'una **inequació polinòmica**.

Els dos primers exemples són d'aquests tipus, en canvi el tercer no ho és..

Si els dos polinomis són de grau no superior a 1 parlem d'una **inequació de primer grau.**

El primer exemple és d'aquest tipus.

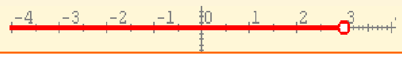
El segon exemple té una **incògnita;** els altres en tenen dues.

Resoldre una inequació és trobar tots els nombres reals que fan que sigui certa. A aquests nombres els anomenarem **solucions** de la inequació.

A diferència de les equacions, és freqüent que una inequació tingui infinites solucions, per això per representar el conjunt d'aquestes solucions se sol utilizar la notació d'intervals que vam utilizar al primer capítol d'aquestes lliçons.

Per exemple, si ens donen la inequació $2x < 6$, les solucions s'expressen de qualsevol d'aquestes formes: **{xεR/x<3}**
Conjunt de tots els nombres reals menors que 3,
ó **{xε(-∞,3)}**
Nombres que pertanyen a l'interval indicat

O de forma gràfica:



Resolució

Aquest procés consisteix a anar transformant la inequació inicial en altres d'equivalents més simples fins que el resultat final sigui d'algun dels tipus següents:

$$x < k\,, x \leqslant k\,, x > k\,, x \geqslant k$$

o fins que el resultat final sigui contradictori; en aquest cas, la inequació no té solucions.

EXEMPLE: $\mathbf{x + 2 \leq 1}$

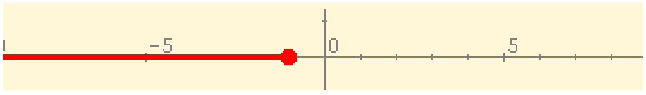
Restem 2 als dos membres i queda: $\mathbf{x \leq -1}$

El conjunt de solucions es representa de qualsevol de les maneres següents:

a) Com a conjunt: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -1\}$

b) Com a interval: $(-\infty, -1]$

c) De forma gràfica:



$-2x - 2 \geq -3$

Sumem 2 als dos membre i queda

$-2x \geq -1$

Divideixen els dos membres per -2 i queda

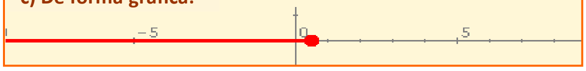
$x \leq \frac{-1}{-2} = 0{,}50$

Solucions

a) Com a conjunt: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 0{,}50\}$

b) Com a interval: $(-\infty, 0{,}50]$ (*interval tancat*)

c) De forma gràfica:



$-1x + (-1) \geq -1x + (-3)$

Restem -1 i -1 x als dos membres i queda:

$0 \geq -2$

Com que això sempre és cert,
les solucions són tots els nombres reals

Solucions:
a) Com a conjunt: {xεR}
b) Com a interval: $(-\infty, +\infty)$

Un **sistema d'inequacions de primer** grau és un conjunt de 2 o més inequacions de primer grau.

Sistemes d'inequacions

Per resoldre un sistema d'inequacions amb una incògnita es resol cada inequació separadament. Les solucions del sistema les formen tots els nombres reals que satisfacin absolutament totes les inequacions del sistema.

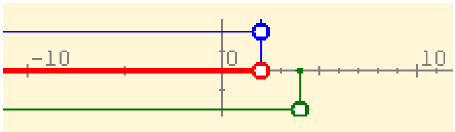
Cada inequació del sistema s'ha de resoldre de manera independent fins que quedi en alguna de les formes següents:

$$x < k\,, x \leqslant k\,, x > k\,, x \geqslant k$$

En el marge podeu veure alguns exemples de resolució de sistemes d'inequacions de primer grau amb una incògnita.

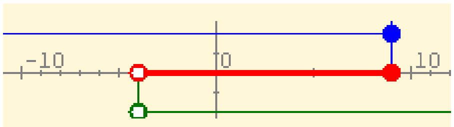
$\begin{cases} x < 2 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in (-\infty, 2) \\ x \in (-\infty, 4) \end{matrix}$

Solucions del sistema: $x \in (-\infty, 2)$



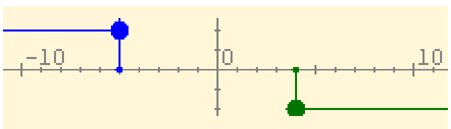
$\begin{cases} x \leq 9 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in (-\infty, 9] \\ x \in (4, +\infty) \end{matrix}$

Solucions del sistema: $x \in (4, 9]$



$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in (-\infty, -5] \\ x \in [4, +\infty) \end{matrix}$

Solucions del sistema: **No en té**



Exercicis resolts

1. En cada cas indiqueu quina de les inequacions, I, II, III, IV és equivalent a la donada:

a) Donada la $-4x \le -3x-5$ inequació, indiqueu quina de les inequacions següents és equivalent a aquesta: I) $-x \ge -5$ II) $x \le -5$ III) $x \le 5$ IV) $-x \le -5$

b) Donada la $-9x \le 6$ inequació, indiqueu quina de les inequacions següents és equivalent a aquesta: I) $x \ge -\frac{6}{9}$ II) $x \le -\frac{6}{9}$

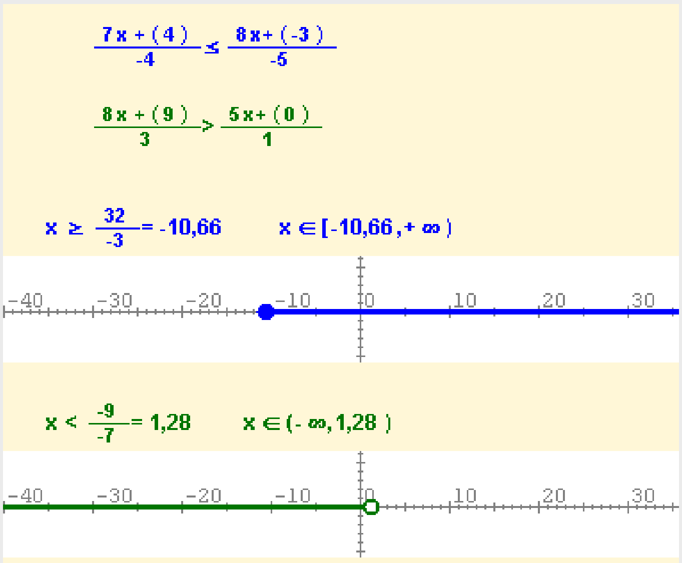
c) Donada la $\frac{-6x-5}{9} \le 5$ inequació, indiqueu quina de les inequacions següents és equivalent a aquesta: I) $x \ge -\frac{50}{6}$ II) $x \le -\frac{50}{6}$

2. Resoleu la inequació $\frac{-6x+7}{-3} > \frac{8x-4}{2}$

$$\frac{-6x+7}{-3} > \frac{8x-4}{2} \Leftrightarrow -12x+14 < -24x+12 \Leftrightarrow 12x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$$

3. Resoleu el sistema d'inequacions següent mostrant les solucions en les formes indicades en l'explicació:



Les solucions comunes són els punts que són alhora majors o iguals que –10,66 i menors estrictament que 1,28.

Per tant, les solucions del sistema són els punts de l'interval

[-10'66,1'28)

2. Inequacions de 2n grau amb una incògnita

RECORDEU

Les solucions d'una equació de segon grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

vénen donades per la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sempre que el discriminant, b^2-4ac, sigui major o igual que zero. I si anomenem r1 i r2 a les possibles solucions,aleshores:

$$ax^2 + bx + c = a(x-r1)(x-r2)$$

Si el discriminant és nul, només hi ha una solució, r, y

$$ax^2 + bx + c = a(x-r)^2$$

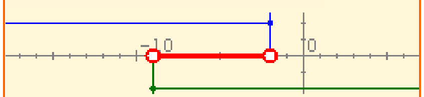
EXEMPLES CAS 1:

4(x+2)(x+9)<0

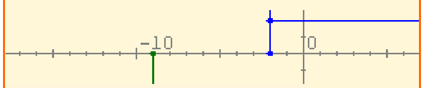
equival als sistemes:

$$\begin{cases} x < -2 \\ x > -9 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x > -2 \\ x < -9 \end{cases}$$

Solució del primer: (–9, –2)



El segon no té solució



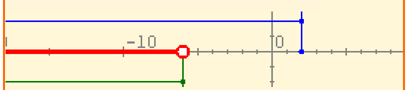
SOLUCIÓ: (-9, -2)

-8(x-2)(x+6)<0

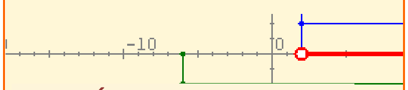
equival als sistemes:

$$\begin{cases} x < 2 \\ x < -6 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x > 2 \\ x > -6 \end{cases}$$

Solució del primer: (–∞, –6)



Solució del segon: (2,+ ∞)



SOLUCIÓ: (- ∞, -6) ∪ (2, + ∞)

Resolució per descomposició

Una **inequació de segon grau** és qualsevol inequació equivalent a una de les següents:

$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c<=0$

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c>=0$

on *a*, *b* i *c* són nombres reals.

Si el polinomi que caracteritza la inequació té arrels reals, es pot emprar la descomposició en factors per resoldre-la com un sistema d'equacions de primer grau. Es poden donar els casos següents:

CAS 1: a (x-r1) (x-r2) <0

Perquè el producte de tres factors sigui negatiu, un o tres d'aquests han de ser negatius.

- Si a>0, només un dels factors pot ser negatiu i la inequació anterior és equivalent als dos sistemes segünts:

$$\left.\begin{matrix} x - r1 < 0 \\ x - r2 > 0 \end{matrix}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{matrix} x - r1 > 0 \\ x - r2 < 0 \end{matrix}\right\}$$

- Si a<0, els altres factors han de ser ambdós negatius o ambdós positius i la inequació anterior és equivalent als dos sistemes següents:

$$\left.\begin{matrix} x - r1 < 0 \\ x - r2 < 0 \end{matrix}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{matrix} x - r1 > 0 \\ x - r2 > 0 \end{matrix}\right\}$$

CAS 2: a (x-r1) (x-r2) ≤ 0

L'única diferència amb el cas anterior és que ara els intervals són tancats.

CAS 3: a (x-r1) (x-r2) > 0

Similar al cas 1.

CAS 4: a (x-r1) (x-r2) ≥ 0

Similar al cas 2.

CAS 5: $a\,(x-r)^2 < 0$

Si a>0 mai no és cert i no té solucions. Si a<0 sempre és cert i les solucions són tots els nombres reals.

CAS 6: $a\,(x-r)^2 \leq 0$

Si a>0 només és cert si x=r, aleshores el conjunt solució té un únic element. Si a<0 sempre és cert i les solucions són tots els nombres reals.

CAS 7: $a\,(x-r)^2 > 0$

És com el 5 però amb les situacions a l'inrevés.

CAS 8: $a\,(x-r)^2 \geq 0$

És com el 6, però amb les situacions a l'inrevés.

Resolució general

El procediment emprat en l'apartat anterior és vàlid si el polinomi de segon grau resultant té arrels reals. En cas contrari no ens serveix.

En aquest apartat veurem un procediment general que és vàlid per a qualsevol inequació de segon grau, tingui arrels reals o no.

Aquest procediment es basa en saber si la representació gràfica del polinomi (una paràbola) està oberta cap a dalt o cap a baix i si talla o no a l'eix d'abscisses.

Considerem el polinomi

$$ax^2 + bx + c$$

Ja heu vist que la seva gràfica és una paràbola oberta cap amunt si a és positiva i cap avail si a és negativa.

El **discriminant** del polinomi és

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si Δ>0, la gràfica talla l'eix X en dos punts (x1 i x2, que s'obtenen amb la fórmula de l'equació de segon grau); si Δ=0, la gràfica talla l'eix X en un sol punt i si Δ<0, la gràfica no talla l'eix X.

A l'esquerra podeu veure alguns exemples que il·lustren aquest procediment de resolució gràfica.

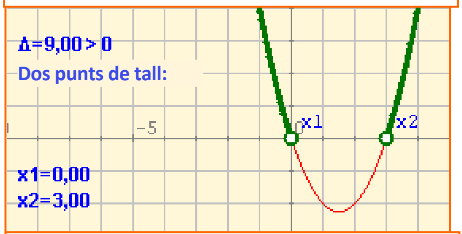
El quadrat d'un nombre diferent de 0 sempre és positiu, (x-3)$_2{}^3$0.

- **$-2(x-3)^2<0$** Solució: IR
- **$2(x-3)^2 \leq 0$** Solució: x=3
- **$2(x-3)^2>0$** Solució: IR
- **$-2(x-3)_2>0$** No té solució

$x^2-3x>0$

$y=x^2-3x$

a>0 la paràbola està cap a baix

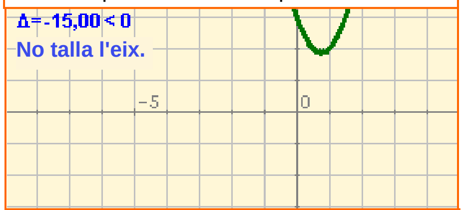


Solució: (-∞,0) U (3,+ ∞)

$2x^2-3x+3>0$

$y=2x^2-3x+3$

a>0 la paràbola està cap a dalt

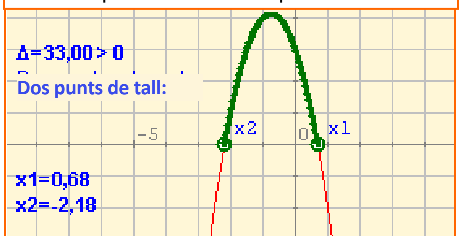


Sense solució

$-2x^2-3x+3>0$

$y=-2x^2-3x+3$

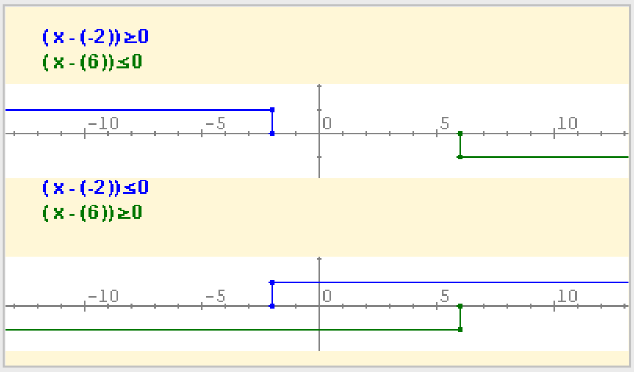
a<0 la paràbola està cap a baix



Solució: (-2,18 , 0,68)

Exercicis resolts

4. Resoleu la inequació següent per descomposició: $2x^2-8x-24 \leq 0$



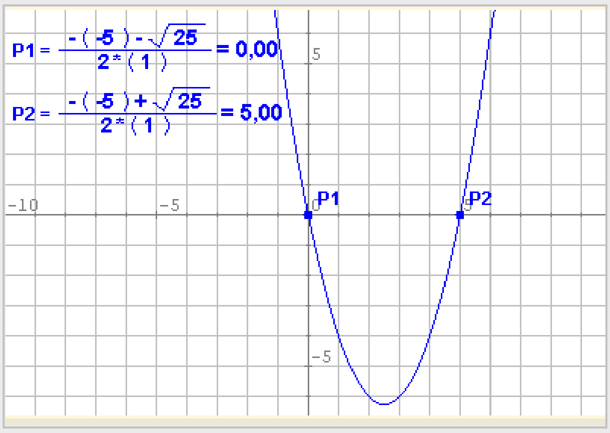
Trobem les arrels del polinomi:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+192}}{4} = \begin{matrix} 6 \\ -2 \end{matrix}$$

Descomponem la inequació en factors: $2(x-6)(x+2) \leq 0$.

La inequació és equivalent a tots dos sistemes de l'esquerra. El primer no té solucions i les solucions del segon i de la nostra inequació són els punts de l'interval tancat **[–2,6]**

5. Resoleu la inequació següent en forma gràfica: $x^2-5x>0$



Trobem les arrels del polinomi:

$$x\,(x-5) = 0$$

Es tracta d'una paràbola oberta cap a a dalt (coeficient principal 1 > 0) que talla l'eix d'abscisses en els punts $x = 0$ i $x = 5$. Després la solució de la inequació és

$$(-\infty,0) \cup (5,+\infty)$$

3. Inequacions de 1r grau amb dues incògnites

Definicions

Una **inequació de primer grau amb dues incògnites** és qualsevol inequació equivalent a alguna d'aquestes:

$ax+by+c<0$ $\quad$ $ax+by+c \le 0$

$ax+by+c>0$ $\quad$ $ax+by+c \ge 0$

En aquest cas, les solucions no són conjunts de nombres, sinó conjunts de parelles de nombres, per la qual cosa no es poden representar sobre una línia recta: s'han de representar com a subconjunts del pla.

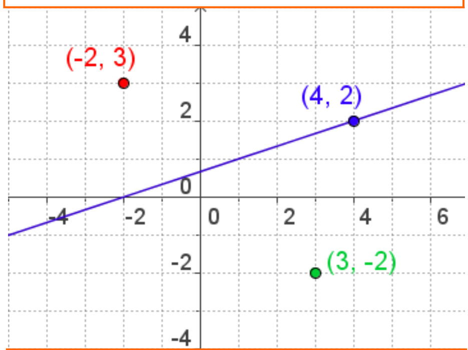
RECORDEU

$$ax + by + c = 0$$

és l'**equació general d'una recta** en el pla.

Usarem aquest fet per resoldre les inequacions de primer grau amb dues variables.

La recta **x-3y+2=0** divideix en pla en dos semiplans.
Esbrineu a quines zones del pla els valors que s'obtenen en substituir les coordenades d'un punt qualsevol en l'equació de la recta són positius, negatius o nuls.



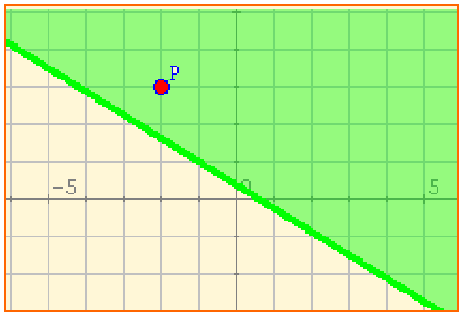
A(4,2)	$4\cdot3\cdot2+2=0$
el punt és en la recta	
B(-2,3)	$-2\text{-}3\cdot3+2=-7<0$
C(2,-3)	$2\text{-}3\cdot(-3)+2=13>0$

Resolució gràfica

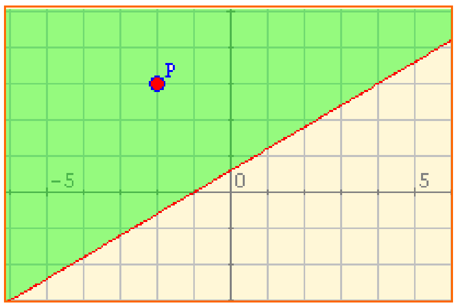
Una solució d'una inequació de dues variables és una parella de nombres (x0,y0) que, en substituir els seus valors a les incògnites de la inequació, fan que la desigualtat sigui certa. Cada parella de nombres reals es pot representar com un punt del pla.

Per tant**, resoldre la inequació equival a obtenir tots els punts del pla, les coordenades del qual fan que es verifiqui la desigualtat.**

Per a això es procedeix de la manera següent: es dibuixa la recta, s'escull un punt que no hi pertanyi i es comprova si les coordenades del punt compleixen la desigualtat o no; si la compleixen la zona on hi ha el punt elegit és la solució de la inequació, si no la compleixen la solució és l'altra zona.



$-5x-8y+3\le0$ $\qquad$ P(-2,3)
$5\cdot(-2)\text{-}8\cdot3+3=-11<0$
La zona verda és la solució, inclosa la recta, ja que la desigualtat és £

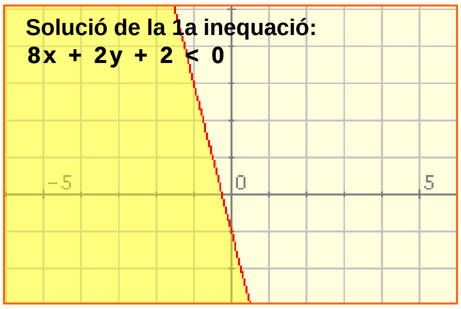


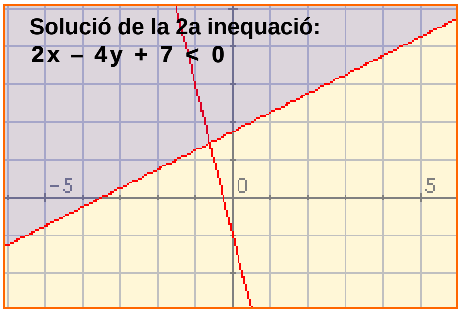
$3x-5y+3<0$ $\qquad$ P(-2,3)
$3\cdot(-2)\text{-}5\cdot3+3=-18<0$
La zona verda és la solució.

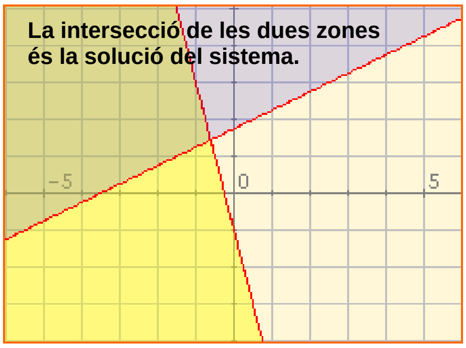
Sistemes d'inequacions

Un **sistema d'inequacions de primer grau amb dues incògnites** és un conjunt format per dues o més inequacions de primer grau amb dues incògnites.

$$8x + 2y + 2 < 0$$
$$2x - 4y + 7 < 0$$







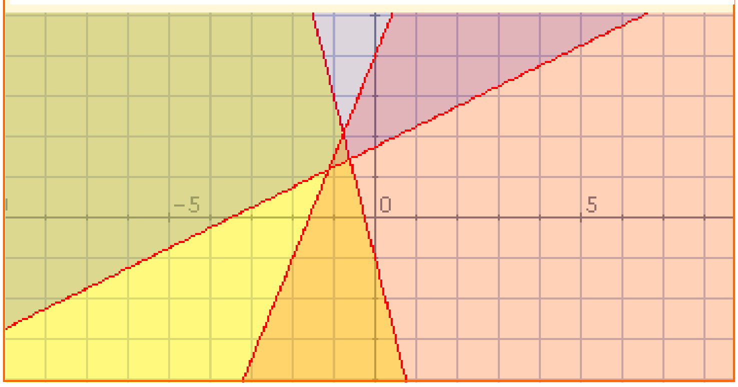
Com en el cas dels sistemes amb una incògnita, es resol cada inequació separadament i el conjunt de totes les solucions comunes a totes les inequacions del sistema és el conjunt solució.

Fixeu-vos en els exemples desenvolupats i observeu que poden donar-se situacions sense solució.

Si afegim una tercera inequació:

$$8x + 2y + 2 < 0$$
$$2x - 4y + 7 < 0$$
$$5x - 2y + 8 < 0$$

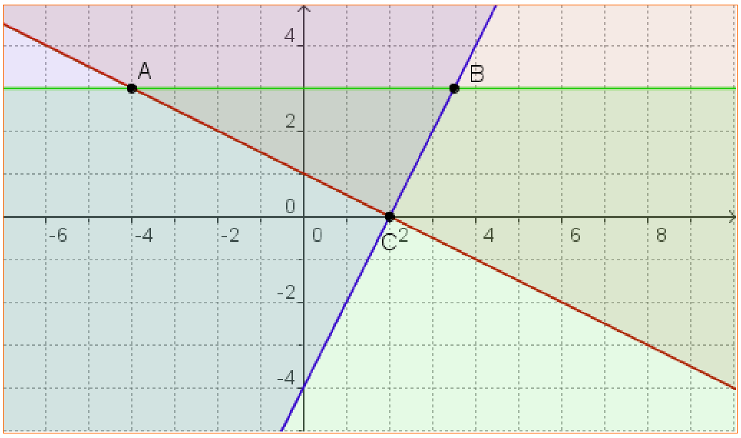
La solució és el triangle comú a les tres zones



UN ALTRE EXEMPLE

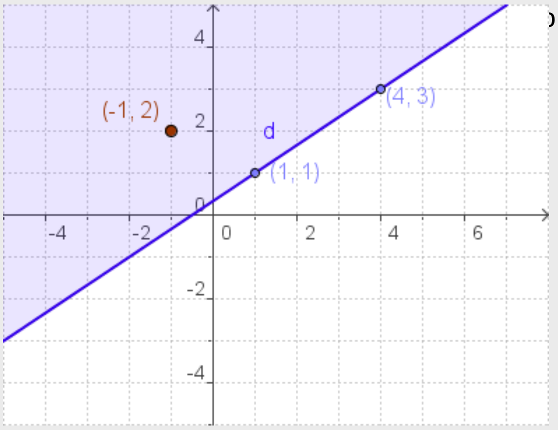
$$x + 2y - 2 \geq 0$$
$$2x - y - 4 \leq 0$$
$$y - 3 \leq 0$$

La solució és el triangle de vèrtexs ABC, comú a les tres zones



Exercicis resolts

6. Esbrineu si el punt P(–1, –2) és una solució de la inequació $-2x + 3y \leq 1$ i dibuixe
...) no a la recta $-2x + 3y = 1$



Podem dibuixar la recta donant dos valors a *x* i obtenint els valors corresponents de y.

$x=1 \quad y=1 \qquad x=-2 \quad y=-1$

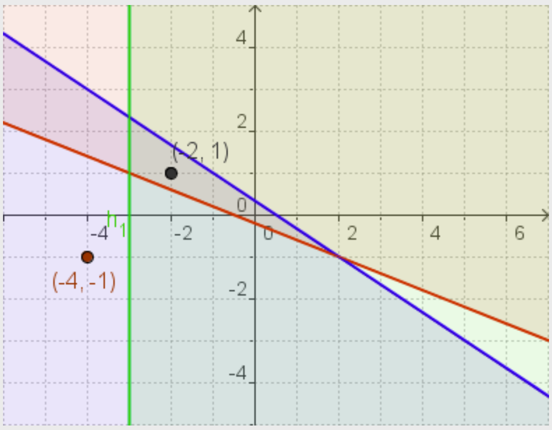
A continuació substituïm les coordenades de *P* en el polinomi i veiem que la desigualtat és certa.

Per tant, la solució és el semiplà on hi ha *P*, incloent-hi la recta, perquè el símbol de desigualtat és menor o igual.

7. Esbrineu si el punt P(–4, –1) és una solució del sistema d'inequacions:

$$-2x-5y-1<0$$
$$2x+3y-1<0$$
$$-x-3<0$$

Dibuixeu el conjunt de solucions i si *P* no pertany a aquest conjunt trobeu algun punt que ho faci.



Observeu en el dibuix els valors que s'obtenen en substituir les coordenades de *P* en els tres polinomis. Els valors obtinguts compleixen les dues últimes inequacions però no la primera, per tant, *P* no és una solució del sistema.

Les solucions són els punts que estiguin per a sobre de la recta vermella (1a), per sota de la recta blava (2a) i a la dreta de la recta verda (3a). És a dir, tots els punts de l'interior del triangle que determinen les tres rectes.

Una possible solució és Q (–2, 1)

4. Problemes amb inequacions

Plantejament i resolució

Per resoldre un problema amb inequacions hem de seguir els passos següents:

1. **Assignació de variables:** posar un nom als termes desconeguts.
2. **Plantejament:** establir relacions entre les dades conegudes i les desconegudes, plantejant una o diverses inequacions (de primer o de segon grau, amb una o diverses incògnites).
3. **Resolució:** d'entre els mètodes explicats cal aplicar el que s'ajusti al nostre plantejament.

Un vinater disposa al seu magatzem de dos tipus de vi: un a 4 €/l i un altre a 7. Vol barrejar los per omplir un barril de 500 litres i vol que la barreja costi entre 5 i 6 €/l. Esbrineu entre quins valors ha d'estar la quantitat de litres del primer tipus de vi perquè el preu final de la barreja estigui en l'interval volgut.

ASSIGNACIÓ DE VARIABLES:
x=nre. de litres del primer tipus
500-x=nre. de litres del segon tipus

PLANTEJAMENT:
$4x+7(500-x)>5\cdot500$
$4x+7(500-x)<6\cdot500$

RESOLUCIÓ:
$4x+3500-7x>2500 \rightarrow -3x>-1000$
$\rightarrow x<\frac{1000}{3}=333,3...$
$4x+3500-7x<3000 \rightarrow -3x<-500$
$\rightarrow x>\frac{500}{3}=166,6...$

SOLUCIÓ:
x pot pendre qualsevol valor entre 167 i 333 litres.

Exercicis resolts

Problema 1

Un fabricant de pinsos vol obtenir una tona d'un determinat pinso, per vendre'l a 0,21 €/kg. Per obtenir-lo barrejarà dos tipus de pinso dels quals ja disposa i que costen 0,24 €/kg i 0,16 €/kg respectivament.

1) Calculeu la quantitat que ha d'entrar almenys a la barreja del pinso més barat per no perdre-hi diners.
2) Quines han de ser les quantitats de cada tipus a la barreja si vol guanyar almenys 0,03 €/kg?

Assignació de variables: x = nre. kg del tipus barat 1.000-x: nre. de kg del tipus car
Plantejament: Cost de la barreja: 0,16x+0,24(1.000-x)
Per no perdre diners ha de complir: 0,16x+0,24(1.000-x)£0,21·1.000
Per guanyar almenys 0,03 €/kg ha de ser: 0,16x+0,24(1000-x)£0,18·1.000

Resolució: a) $-0,08x\leq-30 \rightarrow x\geq30/0,08 \rightarrow x\geq375$ kg
b) $-0.08x\leq-60 \rightarrow x\geq60/0.08 \rightarrow x\geq750$ kg

Problema 2

Una biblioteca té un pressupost de 600 € per adquirir exemplars de dues novel·les noves que s'han editat. Cada exemplar de la primera costa 25 € i cada exemplar de la segona 30 €. Quants exemplars de cada una pot adquirir? Representeu el problema en forma d'un sistema d'inequacions, representeu-lo gràficament i indiqueu diverses possibles solucions.

x = nre. exemplars de la 1a y = nre. d'exemplars de la 2a
Plantejament: 25x+30y£600 x>0 y>0
Solució: Qualsevol punt de la zona ombrejada amb valors sencers és solució del problema. Si el punt està en la recta s'ajusta del tot al pressupost.
Per exemple x = 10, y = 10 o x = 6, y = 15.

Per practicar

1. Inequacions amb valor absolut.

Resoleu les inequacions següents:

a) $|x+6| < 1$

b) $|-x-4| \le 4$

c) $|-2x-1| > 3$

d) $|2x-4| \ge 5$

2. Inequacions de segon grau.

Resoleu les inequacions:

a) $2x^2 - x + 2 \le 0$

b) $-2x^2 + 6x + 1 \le 0$

c) $-x^2 + 7x - 9 \ge 0$

d) $(x-8)(x-1) < 0$

3. Inequacions racionals.

Resoleu les inequacions:

a) $\dfrac{x+4}{1-x} < 0$

b) $\dfrac{2x+4}{3+x} > 0$

c) $\dfrac{3x-5}{2x+1} \le 0$

d) $\dfrac{x+4}{1-x} \ge 0$

4. Inequacions amb dues incògnites.

Resoleu els sistemes següents:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x < 1 \\ -4x - 3y > 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y < 2 \\ -5x + 4y > 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -4x - y < 4 \\ -5x - 4y > 4 \end{array}\right\}$

EXPLICACIÓ I EXEMPLE

En el primer tema vam veure que el valor absolut de la diferència entre dos nombres reals, [x-y], equival a calcular la distància entre els punts que representen aquests nombres.

És freqüent trovar problemes en què és necessari i calcular tots els punts que la seua distància a un punt fix siga major o menor que cert valor prefixat. En aquests casos el problema equival a resoldre aquestes inequacions:

Que la distància entre x i a sigui menor que b significa que x es troba dins interval (a-b,a+b), per tant, x >a-b i, al mateix temps, x < a+b, per la qual cosa la inequaciò

[x-a]<b és equivalent al sistema $\begin{pmatrix} x-a > -b \\ x-a < b \end{pmatrix}$ y

[x-a]≤b és equivalent al sistema $\begin{pmatrix} x-a \ge -b \\ x-a \le b \end{pmatrix}$

Que la distància entre x i a sigui major que b significa que x es troba fora de l'interval (a-b,a+b), per tant, x a+b, per la qual cosa les solucions de la inequació

$|x-a|>b$

són totes les solucions de x-a< -b i todas las de x-a> b;
i les solucions de

$|x-a|\le b$

són totes les solucions de x-a≤ -b i totes les de x-a≥ b;

Observeu que en aquests casos no es tracta d'un sistema d'inequacions, sinó de totes les solucions de les dues.

EXPLICACIÓ:

Anomenem inequacions racionals a les inequacions equivalentes a les de ltipus:

$$\frac{ax+b}{cx+d} < 0 \quad ó \quad \frac{ax+b}{cx+d} \le 0$$

La dificultat d'aquestes inequacions és que no sabem si cx+d és positiu o negatiu, per la qual cosa no podem treure el denominador sense més..
Per això, per resoldre aquest tipus d'inequacions hem de transformar-les prèviament en dos sistemes d'inequacions, tenint en compte que, perquè el quocient siga negatiu, si el denominador és negatiu el numerador ha de ser positiu i viceversa:

Aixi la inequació $\dfrac{ax+b}{cx+d} < 0$ És equivalent a la parella de sistemes:

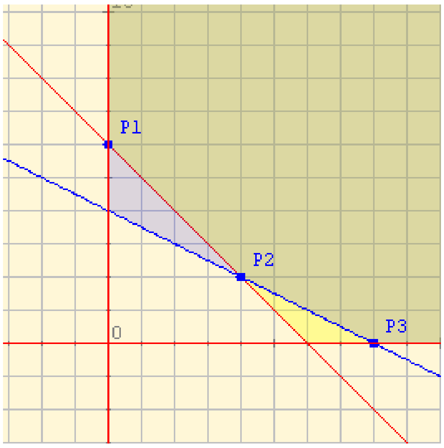
$$\begin{pmatrix} ax+b>0 \\ cx+d<0 \end{pmatrix} \quad ó \quad \begin{pmatrix} ax+b<0 \\ cx+d>0 \end{pmatrix}$$

que es decidix pels procediments coneguta i les solucions de la inequació inicial són la unió de les solucions de tots dos sistemes.

Per saber-ne més

Per què serveixen les inequacions?

Una de les principals utilitats de les inequacions és la seva aplicació als **problemes de decisió:** es tracta de programar una situació amb l'objectiu de decidir-se per una alternativa que sigui **òptima**. En general, el procés d'**optimitzar** consisteix en aconseguir un resultat **màxim** o **mínim** segons convingui al problema plantejat. Mireu l'exemple adjunt.



PROGRAMACIÓ D'UNA DIETA PER ENCEBAR ANIMALS

S'intenta programar una dieta amb dos aliments *A* i *B*.

S'intenta programar una dieta amb dos aliments *A* i *B*. Una unitat de l'aliment *A* conté 500 calories; una unitat de *B* conté 500 calories i 20 grams de proteïnes. La dieta requereix com a mínim 3.000 calories i 80 grams de proteïnes diàries. Si el preu d'una unitat d'*A* és 8 i d'una unitat *B* és 12. quina quantitat d'unitats d'*A* i de *B* s'ha de comprar per a satisfer les exigències de la dieta a un cost mínim?

L' esquema sigüent mostra les quantitats respectives en forma ordenada.

	A	B	mínim
Calories	500	500	3000
Proteínas	10	20	80
Preu	8	12	**?**

És a dir: **x** el nombre d'unitats de l'aliment *A* **i** el nombre d'unitats de l'aliment *B*. D'acord amb això, la inequació 500x + 500y >= 3.000 representa la restricció o condició relativa a les calories.
Igualment, 10x + 20y >= 80 correspon a la restricció referida a la quantitat de proteïnes. A més, es deu complir que x >= 0 i y >= 0, ja que en cap cas la quantitat d'aliments *A* o *B* no pot ser negatiu.

La regió de color verd és la intersecció dels conjunts solució de les inequacions plantejades i s'anomena **regió de solucions factibles,** ja que les coordenades de qualsevol dels seus punts satisfan les restriccions imposades.

Ara bé, no s'ha considerat encara el preu possible dels aliments. Si *x* i *y* són les quantitats dels aliments *A* i *B*, respectivament, i els preus són 8 i 12, llavors la **funció cost** és: **F = 8x + 12y.** Es pot provar que aquesta funció s'optimitza, en aquest cas prenent un valor mínim, per a aquells valors de x i y que corresponen a un vèrtex en el gràfic.

Vértices	**Valor de la función costo**
(0,6) x = 0; y = 6	F = 8 x 0 + 12 x 6 = 72
(4,2) x = 4; y = 2	F = 8 x 4 + 12 x 2 = 32 + 24 = 56
(8,0) x = 8; y = 0	F = 8 x 8 + 12 x 0 = 64

Dels tres valors de la funció cost *F*, el mínim és 56. Correspon a x = 4 i y =2, és a dir, a 4 unitats d'*A* i 2 unitats de *B*.

Aquestes quantitats d'*A* i *B* proporcionen un total de calories i proteïnes d'acord amb les exigències plantejades.
4 unitats d'*A* : 4 x 500 = 2.000 calories 2 unitats de *B*: 2 x 500 = 1.000 calories Total = 3.000 calories
4 unitats d'*A*: 4 x 10 = 40 grams de proteïnes 2 unitats de *B*: 2 x 20 = 40 grams de proteïnes
Total = 80 grams de proteïnes

El cost mínim per aconseguir-ho és 56.
Amb aquesta quantitat, es poden adquirir 4 unitats de l'aliment *A* i 2 del *B*.

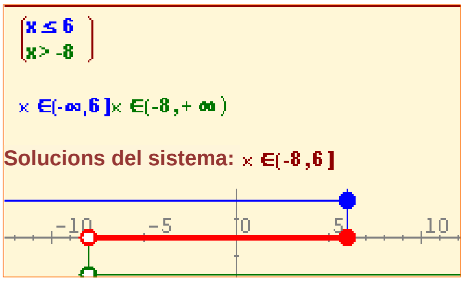
Recordeu el més important

Inequacions amb una incògnita

Les seves solucions s'expressen en forma d'intervals, oberts si les desigualtats són estrictes (<, >) i tancats en cas contrari (<=, =>).

Inequacions de dues incògnites

Les seves solucions són semiplans i es resolen de manera gràfica.



Inequacions de segon grau.

Es poden resoldre com un sistema o de manera gràfica, esbrinant si la paràbola que la representa talla a l'eix X i si s'obre cap a dalt o cap a baix.

Inecuaciones equivalentes

Si als dos membres d'una inequació se'ls suma la mateixa quantitat s'obté una inequació equivalent:

x < y <===> x+a < y+a

Si als dos membres d'una inequació se'ls multiplica per la mateixa quantitat, no nul·la, s'obté una inequació equivalent **(però compte amb el signe):**

a>0 ==> (x < y <===> ax < ay)

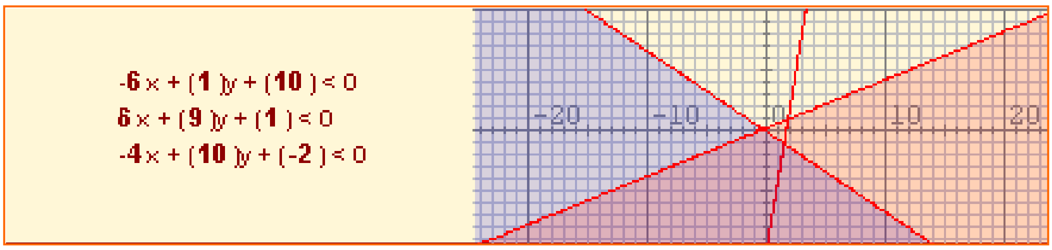
a<0 ==> (x < y <===> ax > ay)

Sistemes amb una incògnita

Cada inequació es resol de manera independent. Les solucions del sistema són les comunes a totes aquestes. S'expressen com a intervals o com a unió d'intervals.

Sistemes amb dues incògnites

Cada inequació es resol de manera independent. Les solucions del sistema són les comunes a totes aquestes.
Es resolen de manera gràfica.



Autoavaluació

1. Resoleu la inequació: $\dfrac{-2x-4}{3} < 0$

2. Un mòbil es desplaça en línia recta a una velocitat que varia entre 69 m/s i 84 m/s. Entre quines distàncies des del punt de partida es troba el mòbil al cap deu hores?

3. Resoleu el sistema $\left.\begin{matrix} x < 5 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\}$.

4. Resoleu el sistema $\left.\begin{matrix} x > 5 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\}$.

5. Resoleu la inequació - $-2x^2 - 16x - 32 \geq 0$

6. Resoleu la inequació - $-2x^2 + 14x - 20 \geq 0$

7. La imatge adjunta és la gràfica del polinomi de segon grau de la inequació $-2x^2 + 5x + 2 < 0$. Indiqueu quin és el conjunt solució d'aquesta.

a) No té solucions
b) Tots els nombres reals
c) Un inteval finit
d) La unió de dos intervals infinits

8. Indiqueu quina de les imatges següents representa el conjunt solució de la inequació $x < y$

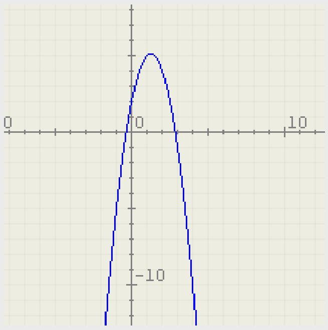
9. Indiqueu quin dels sistemes següents d'inequacions amb dues incògnites té com a conjunt solución en aquesta imatge:

a) $x<-2$ $y<3$
b) $x<-2$ $y>3$
c) $x>-2$ $y<3$
d) $x>-2$ $y>3$

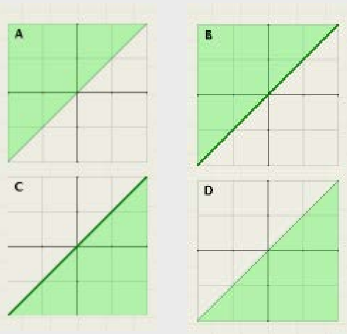
10. Indiqueu quin dels sistemes següents d'inequacions amb dues incògnites té com a conjunt solución en aquesta imatge::

a) $x>-2$ $y>3$ $x+y>6$
b) $x<-2$ $y>3$ $x+y<6$
c) $x>-2$ $y<3$ $x+y<6$
d) $x>-2$ $y>3$ $x+y<6$

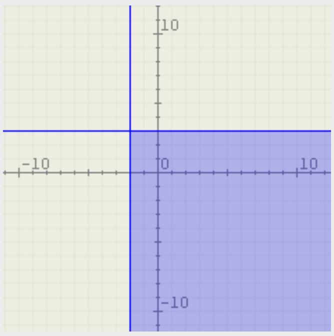
7



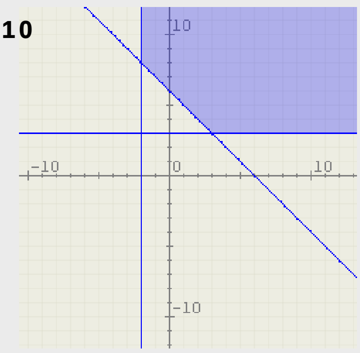
8



9



10



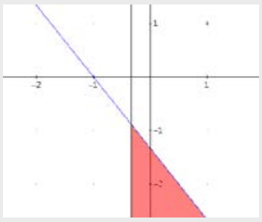
Solucions dels exercicis per practicar

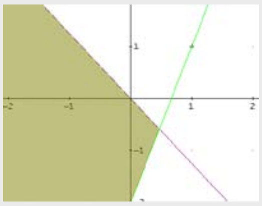
1) Inequacions valor absolut:
   a. (-7,-5)
   b. [-8,0]
   c. (-∞,-1)U(1,+ ∞)
   d. (-∞,-1/2]U[9/2,+ ∞)

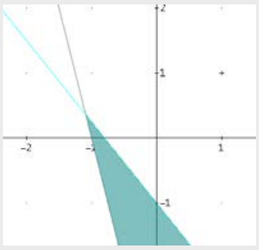
2) Inequacions 2n grau:
   a. No té solucions
   b. (-∞,-0’16]U[3’16,+ ∞)
   c. [1’7,5’3]
   d. (1,8)

3) Inequacions racionals
   a. (-∞,-4)U(1,+ ∞)
   b. (-∞,-3)U(-2,+∞)
   c. (-1/2,5/3]
   d. [-4,1)

4) Inequacions amb dues incògnites

a.


b.


c.


Solucions l’AUTOAVALACIÓ

1. (-2,+ ∞)
2. Entre 2484 i 3024 km
3. [2,5)
4. (5,+ ∞)
5. {-4}
6. (-∞ ,2) U (5,+ ∞)
7. Resposta D
8. Resposta A
9. Resposta C
10. Resposta A