9

Funcions i gràfiques

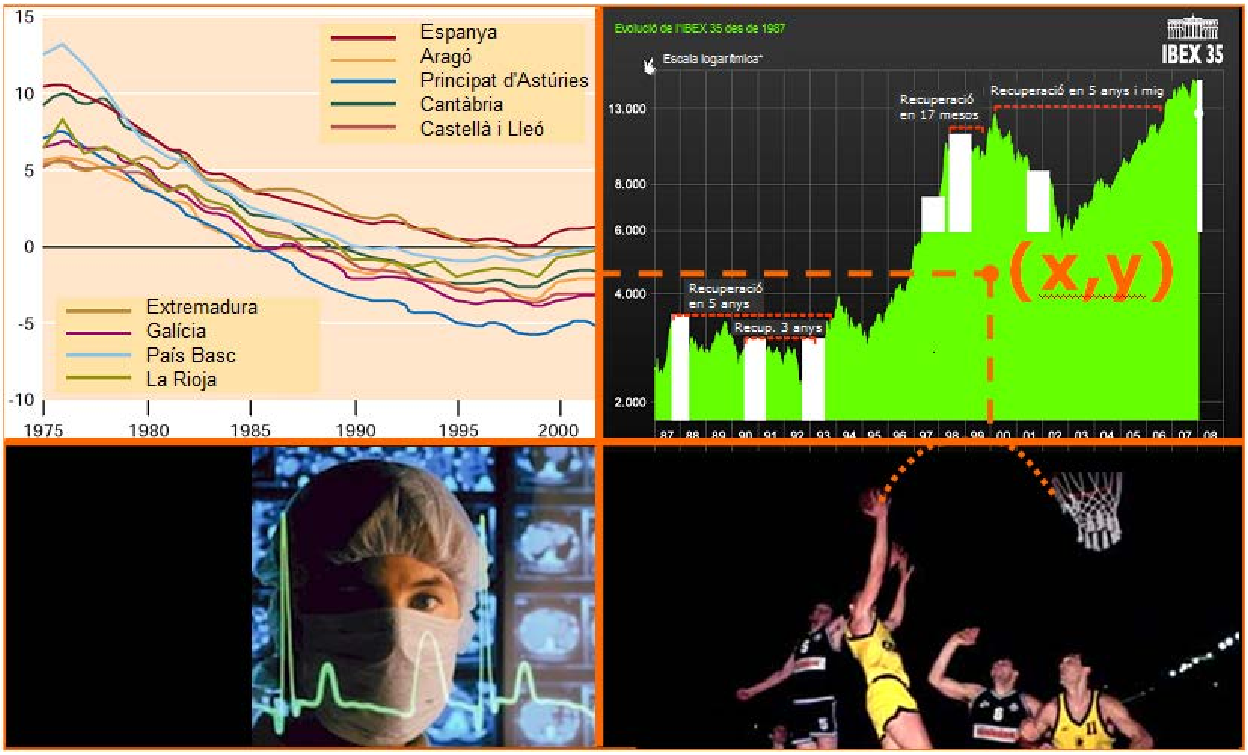
Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Conèixer i interpretar les funcions i les diferents formes de representar-les.
- Reconèixer el domini i el recorregut d'una funció.
- Determinar si una funció és contínua o discontínua.
- Trobar la taxa de variació mitjana d'una funció en un interval.
- Determinar el creixement o decreixement d'una funció i trobar els seus màxims i mínims.
- Investigar el comportament a llarg termini d'una funció.
- Comprovar la simetria d'algunes funcions respecte a l'origen i a l'eix OY.
- Reconèixer si una funció és periòdica.

Abans de començar

El llenguatge de les gràfiques



De les diferents formes en què pot representar-se una funció, mitjançant un enunciat, una taula, una expressió algebraica o una gràfica, aquesta última és la que ens permet veure d'una sola ullada el seu comportament global, d'aquí la seva importància. En aquest tema aprendràs a reconèixer i interpretar les seves característiques principals.

Investiga

Imagina que puges en una sínia el radi de la qual mesura 30 m i per entrar a la cabina taronja s'ha de pujar 5 m.

La sínia comença a girar, com seria la gràfica de la funció que dóna l'altura a què et trobes segons l'angle de gir?.

Tu vas a la cabina taronja i uns amics a la verda, com és la seva gràfica?

1. Funcions

Concepte de funció

Una funció és una **correspondència** entre dos conjunts numèrics, de tal forma que a cada element del conjunt inicial li correspon **un element i només un** del conjunto final, la imatge.

Es relacionen així dues variables numèriques que solen anomenar-se **x** i **y**,

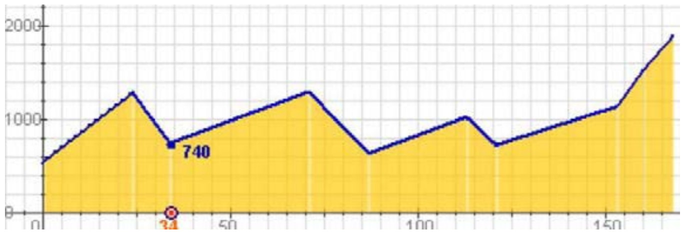
f: x→y=f(x)

x és la variable **independent**

y és la variable **dependent**

El gràfic descriu el recorregut de la 9a etapa de la Vuelta Ciclista 2007, indicant els km totals i l'altitud en els punts quilomètrics principals del trajecte.

A l'esquerra apareix la gràfica anterior traçada sobre uns eixos cartesians, per simplificar-la s'han unit els punts principals mitjançant segments. Es tracta d'una funció que dóna l'**altitud** segons els **km** recorreguts, observa la taula de valors.



km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

Gràfica d'una funció

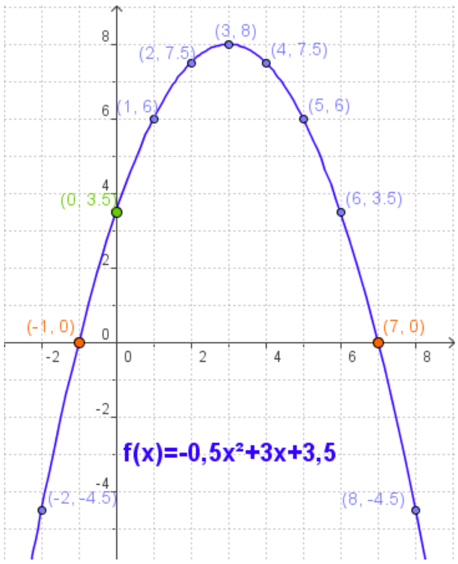
Per veure el comportament d'una funció, **f: x → y**, estudiem la seva **representació gràfica** sobre els eixos cartesians, en l'eix d'abscisses (OX) la variable independent i en el d'ordenades (OY) la independent; essent les coordenades de cada punt de la gràfica: **(x, f(x))**.

A la figura està representada la funció:

$$f(x)= 0,5x_2+3x+3,5$$

Fent una taula de valors, es representen els punts obtinguts, x en l'eix d'abscisses (OX), f(x) en el d'ordenades (OY).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5



Hi ha uns punts que tenen especial interès, en els quals la gràfica talla els eixos de coordenades.

Per calcular-los:

- Tall amb l'eix OY:
  Els punts de l'eix d'ordenades tenen abscissa 0,per tant n'hi ha prou fent **x=0** en la fórmula de la funció.
- Talls amb l'eix OX:
  Els punts de l'eix d'abscisses tenen y=0. Cal, doncs, resoldre l'equació **f(x)=0.**

Talls amb els eixos

EIX OY: f(0)=3,5 Punt (0, 3,5)

EIX OX: Resolent l'equació

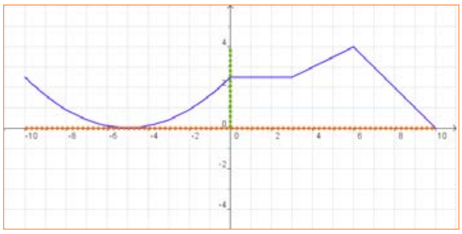
$0,5x^2 + 3x + 3,5 = 0$

Resulta:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+7}}{-2\cdot 0,5}=3\pm 4=\begin{cases}7\\-1\end{cases}$$

Punts: (7, 0) , (-1, 0)

Domini i recorregut



Dom f=[-10, 10]

Donada una funció y=f(x)

- S'anomena **domini** de f al conjunt de valors que pren la variable independent, **x**. S'indica com **Dom f**. El domini està format, per tant, pels valors de x per als quals existeix la funció, és a dir, per als quals hi ha un f(x).

- El **recorregut** és el conjunt de valors que pot prendre la variable dependent, **y**, això és el conjunt de les imatges. Es representa com **Im f**.

Calcular dominis

- Si l'expressió analítica de la funció és un polinomi, el domini són tots els nombres reals.

  $f(x)=-x^4+4x^2+1$

  Dom f = $\mathbb{R}$
  Im f = $(-\infty, 5]$

- Si l'expressió analítica de la funció és un quocient, el domini són tots els reals excepte els que anul·len el denominador.

  $$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

  Dom f = $\mathbb{R}$ - {1}
  Im f = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

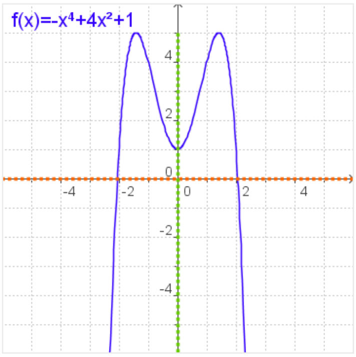
- Si l'expressió analítica de la funció és una arrel quadrada, el domini està format pel nombres reals per als que el radicand és positiu o zero.

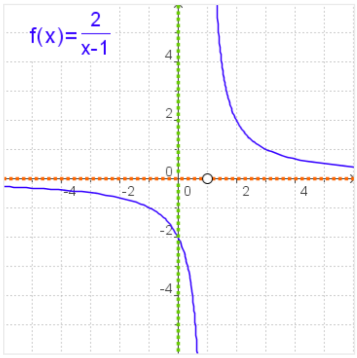
  $$f(x) = \sqrt{x+3}$$

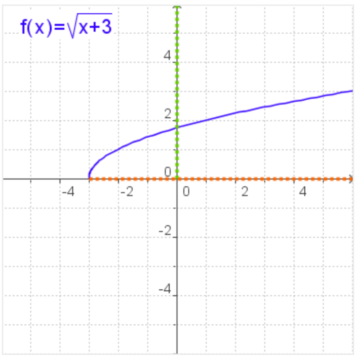
  Dom f = $[-3, +\infty)$
  Im f = $[0, +\infty)$

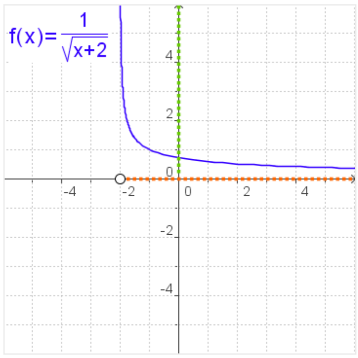
  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

  Dom f = $(-2, +\infty)$
  Im f = $(0, +\infty)$



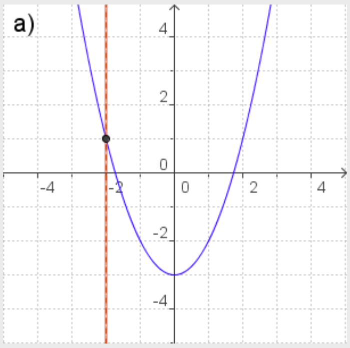


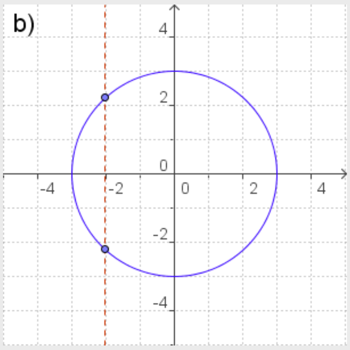


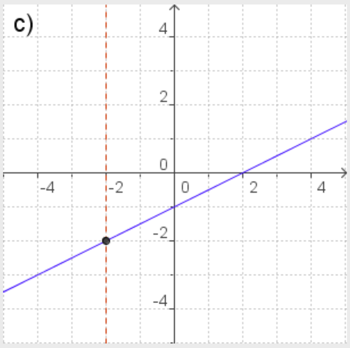


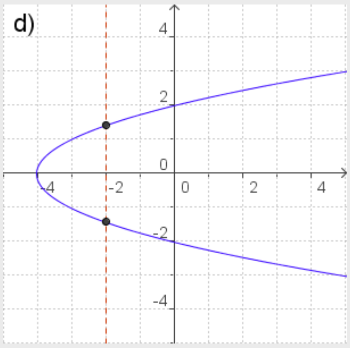
EXERCICIS resolts

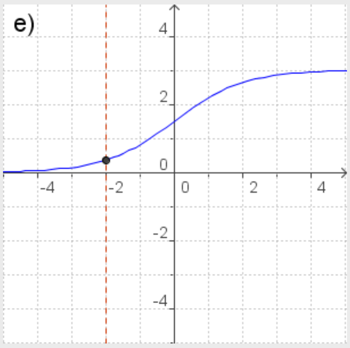
1. De les següents gràfiques indica les que corresponen a una funció i les que no.









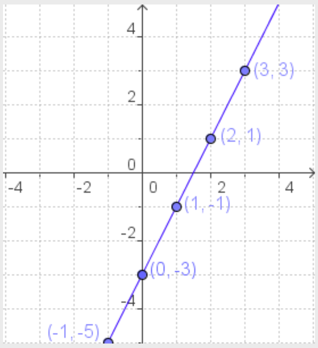


- Són gràfiques d'una funció a), c) i e), ja que a cada x del domini li correspon un únic valor de y.
- No són gràfiques d'una funció b) i d)

2. Fes una taula de valors, dibuixa els punts obtinguts i representa la funció.

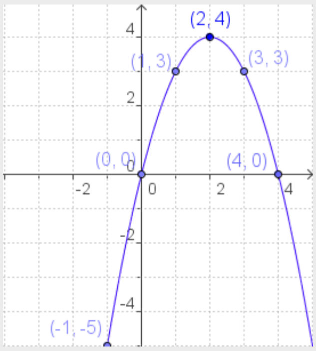
a) $f(x)=2x-3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



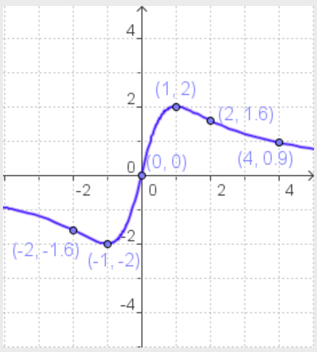
b) $f(x)=-x^2+4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



- RECORDA

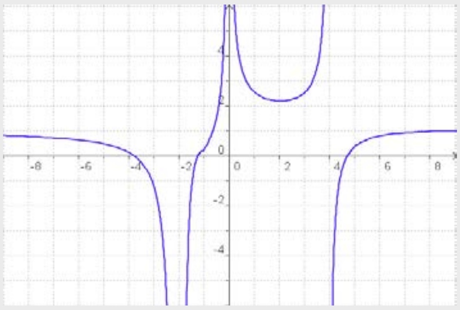
  Per fer una taula de valors, a partir de l'expressió d'una funció, substitueix en la fórmula la x pels valors que vulguis, opera i calcula els corresponents de y=f(x). En general procura alternar valors positius i negatius.

  Dibuixa els punts (x,y) així obtinguts, i uneix-los.

EXERCICIS resolts

3. Calcula el domini de les següents funcions.

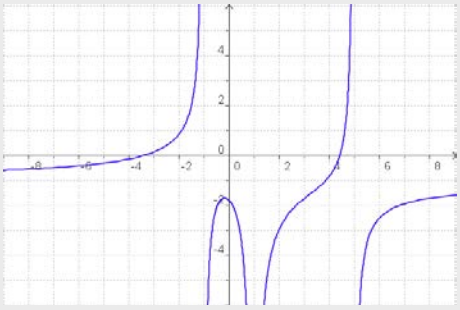
a)



Dom f = $\mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$

En aquests punts, no es pot trobar f(x) en la gràfica.

b)



Dom f = $\mathbb{R} - \{-1, 1, 5\}$

En els punts indicats, no es poden trobar f(x) en la gràfica.

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$ — Dom f = $\mathbb{R}$ ja que és un polinomi

d) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ — Dom f = $\mathbb{R} - \{2\}$

No es pot calcular f(2) perquè el denominador es fa 0.

e) $f(x) = \sqrt{x-5}$ — $x-5 \geq 0$, $x \geq 5$ $\Rightarrow$ Dom f = $[5, +\infty)$

f) $f(x) = \sqrt{5-x}$ — $5-x \geq 0$, $5 \geq x$ $\Rightarrow$ Dom f = $(-\infty, 5]$

g) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x+4}}$ — $x+4 > 0$, $x > -4$ $\Rightarrow$ Dom f = $(-4, +\infty)$

-4 no és del domini perquè anul·la el denominador.

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ — $2-x > 0$, $2 > x$ $\Rightarrow$ Dom f = $(-\infty, 2)$

2 no és del domini perquè anul·la el denominador.

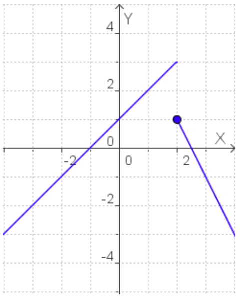
2. Propietats de les funcions

Continuïtat

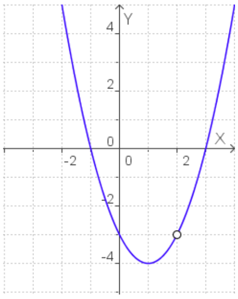
La primera idea de funció **contínua és** la que pot ser representada d'un sol traç, sense aixecar el llapis del paper.

Quan una funció no és contínua en un punt es diu que presenta una **discontinuïtat**.

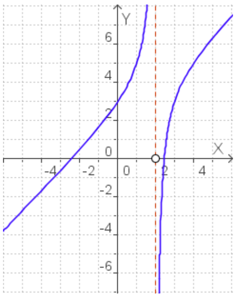
Las tres funcions dibuixades a sota són discontínues en x=2, però tenen diferents tipus de discontinuïtat.



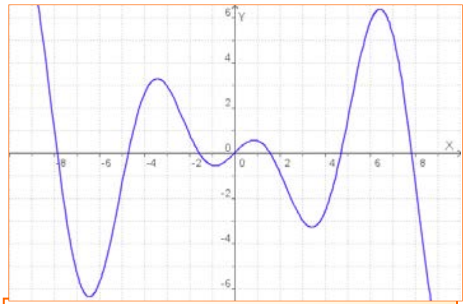
Salt finit



Discontinuïtat evitable



Salt infinit



Una funció y=f(x) es diu que és contínua en **x=a** si:

- La funció està definida en **x=a**,és a dir, existeix **f(a)=b**.
- Les imatges dels valors propers a **a** tendeixen a **b**.

Hi ha diverses raons per les quals una funció no és contínua en un punt:

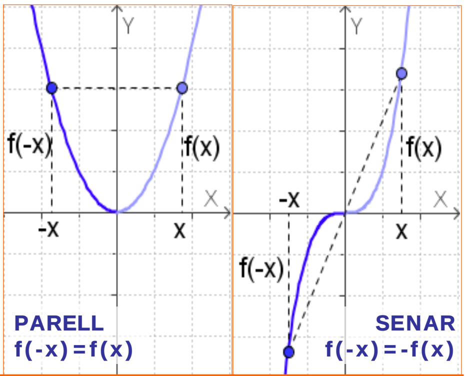
- Presenta un salt.
- La funció no està definida en el punt, o si ho està queda separat, hi ha un "forat" a la gràfica.
- La funció no està definida i el seu valor creix (o decreix) indefinidament quan ens apropem al punto.

Simetries

La gràfica d'algunes funcions pot presentar algun tipus de simetria que si s'estudia prèviament, facilita el seu dibuix.

- Una funció és **simètrica** respecte l'**eix OY**, si **f(-x)=f(x)**. En aquest cas la funció s'anomena **PARELL**.
- Una funció és **simètrica** respecte l'**origen de coordenades,** si **f(-x)=-f(x)**. En aquest cas la funció s'anomena **SENAR**.

Observa les gràfiques per reconèixer-les.



Quan es plega la gràfica per l'eix d'ordenades les dues parts es superposen.	Quan es plega la gràfica per els dos eixos les dues parts es superposen.

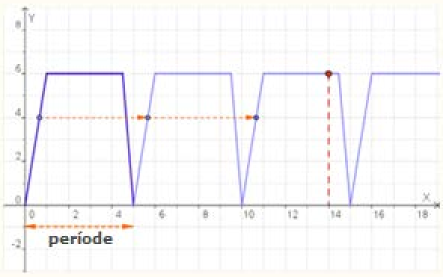
Periodicitat

A la natura i en el teu entorn habitual hi ha fenòmens que es repeteixen a intervals regulars, com el cas de les marees, els pèndols i ressorts, el so...

Les funcions que descriuen aquest tipus de fenòmens s'anomenen **periòdiques**

Una **funció** és **periòdica** quan el seu valor es repeteix cada cop que la variable independent recorre un determinat interval. El valor d'aquest interval s'anomena **període**.

$$f(\,x + \text{període}\,) = f(\,x\,)$$



Una cisterna s'omple i es buida automàticament expulsant ***6*** *litres d'aigua cada* ***5*** *minuts, seguint el ritme de la gràfica. Quan el dipòsit està buit comença a omplir-se,s'omple en* ***1*** *minut, roman ple durant* ***3,5*** *minuts i es buida en* ***0,5*** *minuts. Aquest procés es repeteix* ***periòdicament*** *cada* ***5 minuts****.*

Per conèixer el volum d'aigua en el dipòsit en cada instant només cal conèixer el que passa aquests primers 5 minuts.

De manera que als 14 minuts, la quantitat d'aigua és:

$$f(14)=f(4+2\cdot 5)=f(4)=6$$

Al dividir 14:5, quocient=2 residu=5

En general, si el període és **t**:

$$\mathbf{f(x+nt)=f(x)}$$

Tendència d'una funció

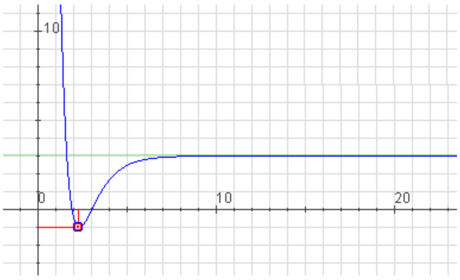
En ocasions el que ens interessa d'una funció és el seu ***comportament a llarg termini***, és a dir, els valors que pren la funció quan la x es fa cada cop més gran. Quan aquest comportament és clarament definit diem que la funció té una determinada **tendència**.

A l'apartat anterior hem vist que algunes funcions presenten un comportament periòdic: repeteixen els seus valors a intervals regulars. Aquí anem a veure altres tipus de tendències.

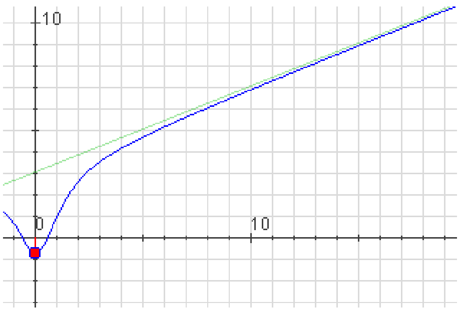
1. Una funció té una **asímptota horitzontal** si a mesura que la variable independent va prenent valors cada cop més grans, la variable dependent es va estabilitzant entorn a un valor concret, k. La asímptota és una línia recta d'equació y=k.

2. Una funció té **tendència lineal** si a mesura que la variable independent va prenent valors cada cop més grans la seva gràfica s'assembla cada cop més a la d'una línia recta, a la que anomenarem ***asímptota obliqua***.

3. Una funció té **tendència quadràtica** si a mesura que la variable independent va prenent valors cada cop més grans, la seva gràfica s'assembla cada cop més a una corba que estudiarem en el proper capítol que s'anomena ***paràbola*** i que té per equació un polinomi de segon grau.



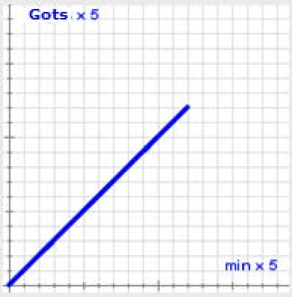
Funció amb asímptota horitzontal



Funció amb tendència lineal

EXERCICIS resolts

4. La imatge adjunta representa el rellotge d'aigua del museu dels nens d'Indianàpolis (Estats Units). El seu funcionament és el següent: a la columna de la dreta hi ha 60 gots que es van omplint d'aigua a poc a poc. Quan s'omple la que fa el pis 60 es buida de cop tota la columna i s'omple una de les boles de la columna esquerra (que té un total de 12 boles). Com pots suposar, la columna esquerra representa les hores i la columna de la dreta els minuts. Indica si la funció que relaciona l'altura de l'aigua a la columna de la dreta amb el temps transcorregut és contínua i fes un esbós de la seva gràfica.

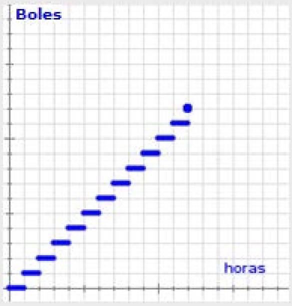


Al llarg d'una hora la columna de la dreta es va omplint de forma quasi constant, es tracta d'una funció **contínua** i té l'aspecte que s'indica al costat.

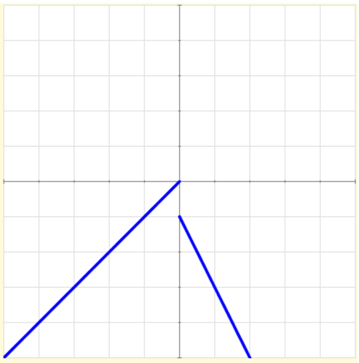
Si anomenem **x** al temps en minuts, i **y** al nombre de gots plens d'aigua (el que equival a l'altura), l'expressió algebraica d'aquesta funció és **y = x**.

5. Indica si la funció que relaciona l'altura de l'aigua a la columna de l'esquerra amb el temps transcorregut és contínua i fes un esbós de la seva gràfica.

Quan cau l'aigua de la columna dreta s'omple una bola de la columna esquerra de forma quasi instantània, i durant una hora l'altura de la columna esquerra no canvia. Les variacions són sobtades, i indiquen **que la funció no és contínua**.



Si anomenem **x** al temps en hores i **y** al nombre de boles plenes d'aigua(el que representa l'altura de l'aigua) l'expressió algebraica d'aquesta funció és **y = ent(x)** (*La part entera de x*)



6. Indica si les gràfiques adjuntes són contínues o discontínues.

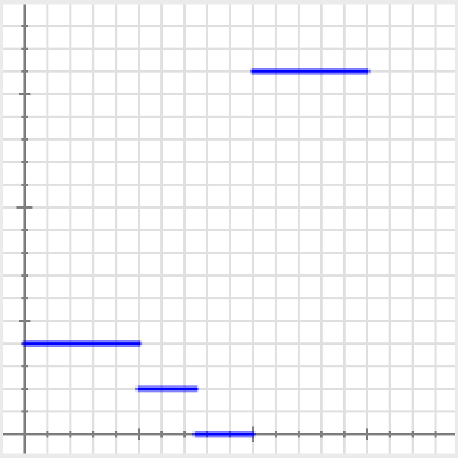
La primera és discontínua perquè no es pot dibuixar sense aixecar el llapis del paper. La segona és contínua.

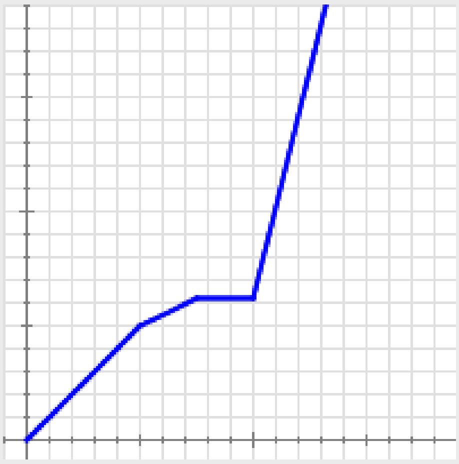
EXERCICIS resolts

7. En Joan té avui una excursió a l'escola. Com viu lluny normalment ve en bicicleta. Només arribar a l'escola surt tot l'alumnat caminant fins l'estació de trens i allà esperen una estona a què arribi el tren. Pugen al tren i a la fi arriben al destí.

A sota pots veure dues gràfiques: una representa la distància que recorre en Joan des de casa seva respecte al temps transcorregut i l'altra representa la velocitat de desplaçament en cada instant, també en funció del temps transcorregut.

Indica de forma raonada quina gràfica correspon a cadascuna de les dues situacions i indica en cada cas si la funció representada és contínua o no.





La primera gràfica és la que indica les velocitats:

Comença amb la bicicleta a velocitat constant(per això la gràfica és horitzontal). En arribar a l'escola comença a caminar (segueix sent horitzontal, però està més baixa, el que significa que caminat va més a lent que en bicicleta). Arriba a l'estació i queda parat una estona(la velocitat és zero). Puja al tren (la velocitat és constant però la gràfica més alta indica que van molt més de pressa).

La gràfica és **discontínua** i els salts es produeixen al canviar el mètode de locomoció.

La segona gràfica representa les distàncies a la seva casa.

Al començar la distància va augmentant de forma constant (va en bicicleta), després segueix augmentant però la gràfica està menys inclinada (això significa que la velocitat és menor: va caminant). Durant una estona, la distància no augmenta (la gràfica és horitzontal, està parat). Finalment torna a augmentar molt de pressa (a més inclinació més velocitat: viatge en tren).

En aquest cas no hi ha salts en la gràfica (de manera que és **contínua**), però sí que hi ha canvis sobtats de velocitat que es corresponen amb els canvis d'inclinació de la gràfica.

3. Monotonia

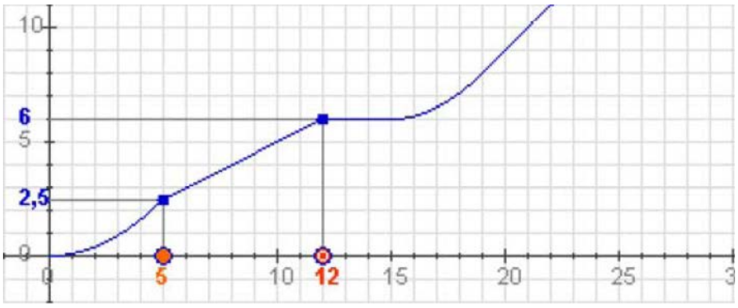
Taxa de variació mitjana

La **taxa de variació** o **increment** d'una funció és l'augment o disminució que experimenta una funció en passar la variable independent d'un valor a un altre.

$$TV[x_1,x_2]=f(x_1)-f(x_2)$$

Més útil resulta calcular l'anomenada **taxa de variació mitjana**, que ens indica la variació relativa de la funció respecte a la variable independent:

$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Creixement i decreixement

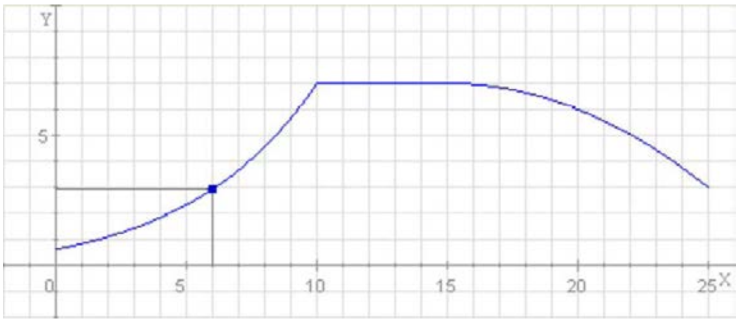
Una característica de les funcions que es pot visualitzar fàcilment en les gràfiques és la monotonia. Si quan augmentem el valor de x augmenta el valor de y=f(x), la gràfica "puja" i es diu que la funció és **creixent**. Si pel contrari quan augmentem x disminueix y, la gràfica "baixa", i la funció **decreix**. Precisant una mica:

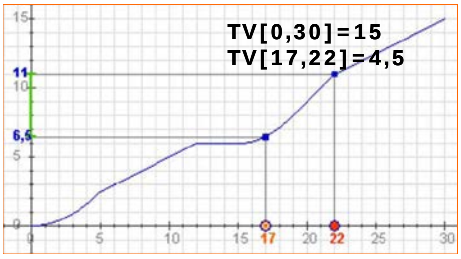
Una **funció é**s **creixent** en un interval, quan donats dos punts qualssevol del mateix

- Si **x1<x2** aleshores **f(x1)<f(x2)**

I serà **decreixent**:

- Si **x1<x2** aleshores **f(x1)>f(x2)**

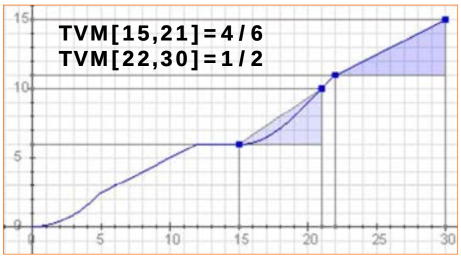


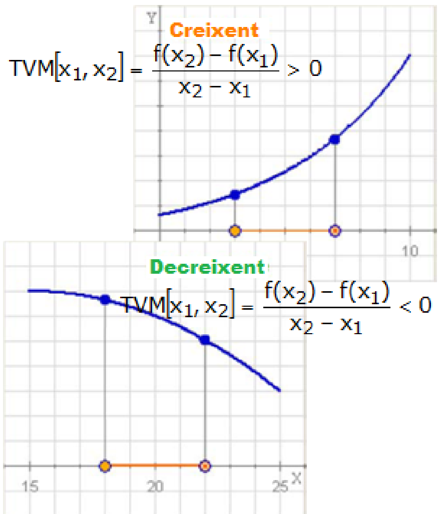


La gràfica representa la distància en km, recorreguda per un ciclista en funció del temps transcorregut,en minuts.

La TV correspon a la distància recorreguda en un interval de temps.

La TVM és la velocitat mitjana en un interval de temps determinat.



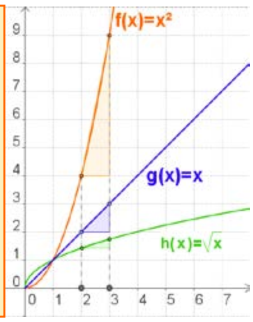


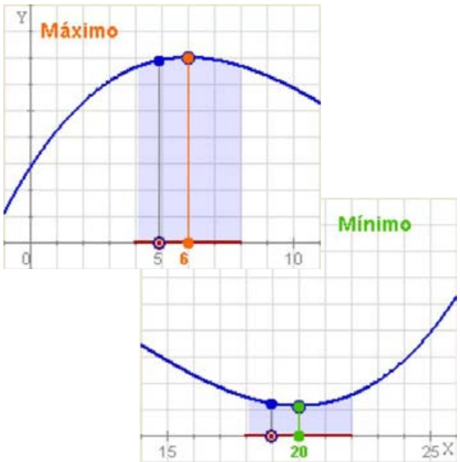
Totes les funcions no creixen o decreixen, d'igual forma.

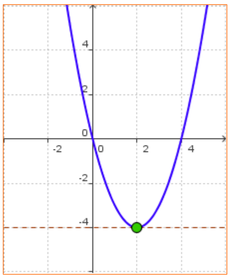
$f(x)=x^2$ és la que creix més ràpidament,

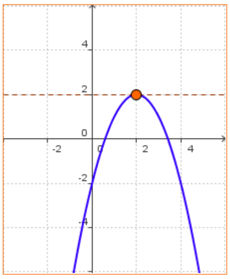
$g(x)=x$ té un creixement lineal,

$h(x)=\sqrt{x}$ creix més lentament.









Màxims i mínims

Donada una funció contínua en un punt x=a, es diu que presenta un **màxim relatiu**, si a l'esquerra d'aquest punt la funció és creixent i a la dreta la funció és decreixent.

Si, pel contrari, la funció és decreixent a l'esquerra i creixent a la dreta hi ha un **mínim relatiu**.

Si es verifica que f(a)>f(x) per a qualsevol valor x del domini, i no només pels valors del "voltant", es parla de **màxim absolut** en x=a.

I anàlogament es diu que en x=a hi ha un **mínim absolut** si f(a)<(f(x) per a qualsevol x del domini.

EXERCICIS resolts

8. Calcula la taxa de variació mitjana de les funcions següents entre els punts indicats. Comprova en la figura que quan la gràfica d'una funció és una recta la TVM és constant.

a) y=2x+3

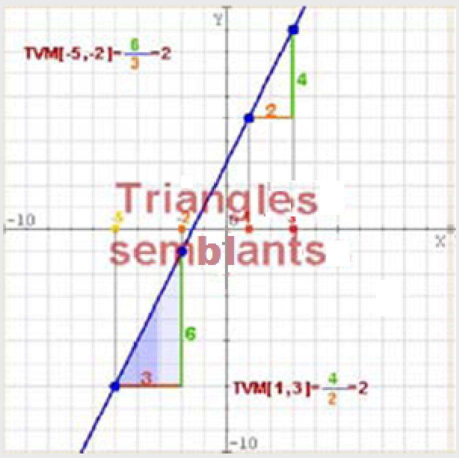
$$TVM[1,3]=\frac{9-5}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

$$TVM[-5,-2]=\frac{-1+7}{-2+5}=\frac{6}{3}=2$$

b) y=0,5x+3

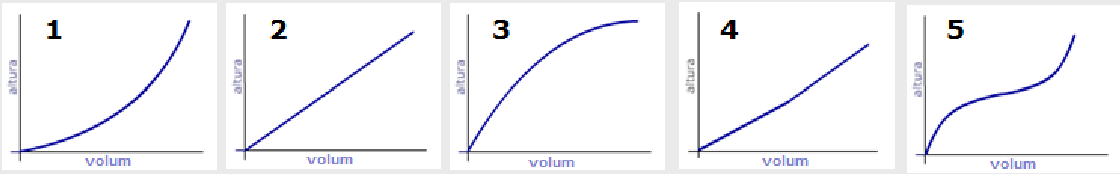
$$TVM[1,3]==\frac{4,5-3,5}{2}=0,5$$

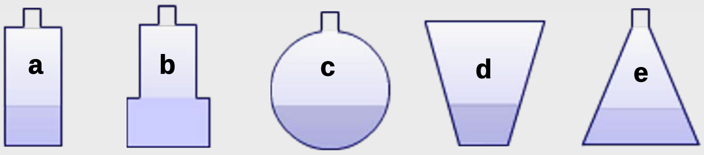
$$TVM[-3,0]=\frac{3-1,5}{3}=0,5$$



EXERCICIS resolts

9. Cada gràfica representa com es va omplint cadascun dels recipients, quina gràfica correspon a cadascun?





a → 2
b → 4
c → 5
d → 3
e → 1

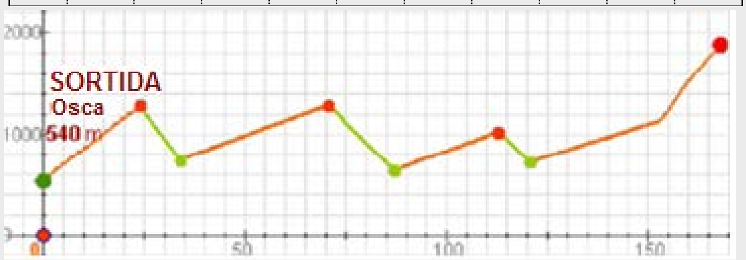
10. Recorda la gràfica que donava el perfil d'una etapa de la Vuelta, que vas veure al principi del tema.

a) Escriu els intervals en què la funció és creixent i els intervals en què és decreixent.

b) En quins punts quilomètrics s'assoleixen els màxims relatius? Quins valors prenen? Quins valors prenen i en quins punts s'assoleixen els mínims?

c) Assoleix la funció màxim absolut? On? I el mínim absolut?

km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882



a) Creixent: (0,24)U(34,71)U(87,113)U(121,168)
Decreixent: (24,34)U(71,87)U(113,121)

b) MÀX: x=24, y=1280; x=71, y=1290; x=113, y=1020;
MÍN: x=34, y=740; x=87, y=630; x=121, y=720

c) En aquest cas la funció té màxim i mínim absoluts, que s'assoleixen tots dos en els extrems del domini, mínim en x=0 de valor 540 m, màxim en x=168 de valor 1882 m.

Per practicar

1. Considera la funció que a cada nombre li assigna el seu quadrat menys 1. Escriu la seva expressió analítica i calcula les imatges de -1 , 1 i 2. Calcula també els punts de tall amb els eixos.

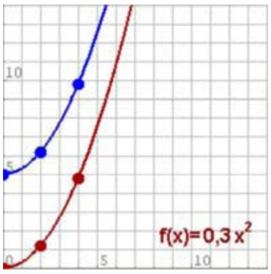
2. Considera la funció que a cada nombre li assigna la seva meitat més 3. Escriu la seva expressió analítica i calcula les imatges de -1, 1 i 3. Calcula també els punts de tall amb els eixos.

3. Considera la funció que a cada nombre li assigna el seu doble menys 5. Escriu la seva expressió analítica i calcula les imatges de -2, -1 i 1. Calcula també els punts de tall amb els eixos.

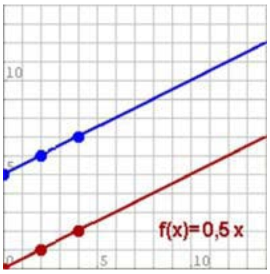
4. Calcula el domini de les següents funcions:
   a) $f(x) = -2x^2+5x-6$
   b) $f(x) = \dfrac{2x}{2x-4}$
   c) $f(x) = \sqrt{x+5}$

5. Calcula les TVM de les funcions de les gràfiques següents en els intervals [0,4] i [2,4]:

a)

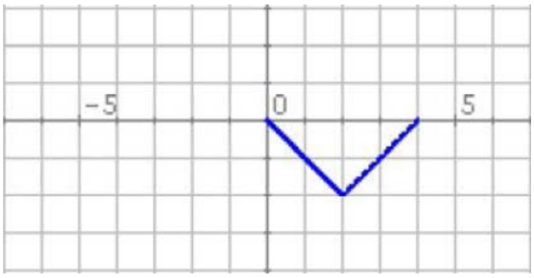


b)

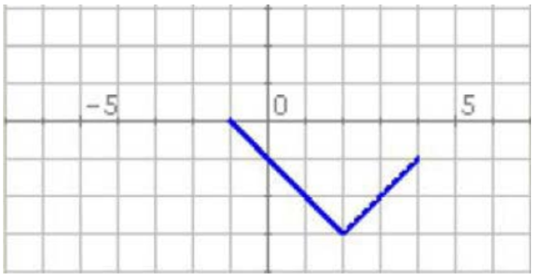


6. En cada cas la gràfica mostra un tram o període d'una funció periòdica. Dibuixa uns altres trams, indica el període i calcula la imatge del punt d'abscissa que s'indica:

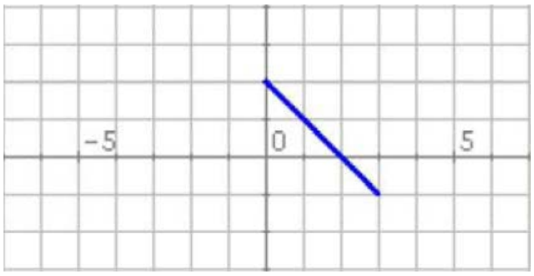
a) f(-2)



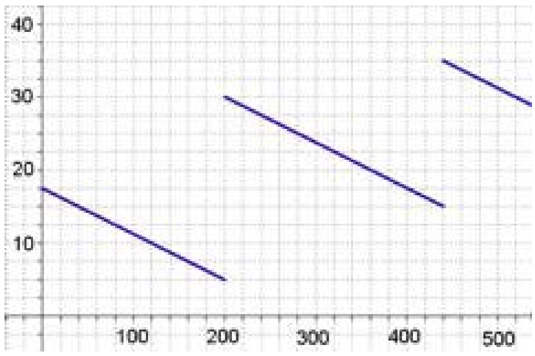
b) f(-3)



c) f(-1)



7. El gràfic mostra com varia la benzina que hi ha al meu cotxe durant un viatge de 520 km per una autovia.



a) Quina quantitat de benzina hi havia després de 240 km?. En el dipòsit hi caben 40 litres. Quan hi havia més de mig dipòsit?

b) A quantes benzineres vaig parar?, en quina benzinera vaig posar més benzina?. Si no hagués parat, on m'hauria quedat sense benzina?

c) Quina quantitat de benzina vaig fer servir pels primers 200 km?. Quina quantitat vaig fer servir en tot el viatge?. Quants litres consumeix el meu cotxe cada 100 km en aquesta autovia?

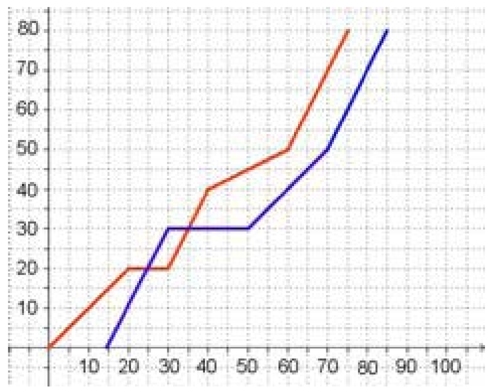
8. La Maria i en Jordi són dues persones més o menys normals. A la gràfica pots comparar com ha variat el seu pes en els seus primers 20 anys.

a) Què pesava en Jordi als 8 anys?, i la Maria als 12?. Quan va superar en Jordi els 45 kg?

b) A quina edat pesaven els dos igual? Quan pesava més en Jordi que la Maria?. Quan pesava la Maria més que en Jordi?

c) Quin va ser l'augment de pes d'ambdós entre els 11 i els 15 anys?. En quin període va créixer cadascú més ràpidament?

9. El gràfic dóna l'espai recorregut per dos cotxes que realitzen un mateix trajecte.



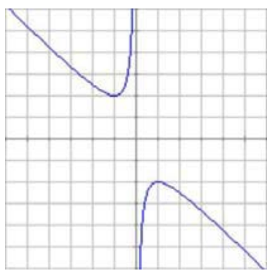
a) Quina és la distància recorreguda? Si el primer cotxe va sortir a les 10:00, a quina hora va sortir el segon?. Quant de temps li ha costat a cada cotxe fer el recorregut?

b) Quant de temps va estar parat cada cotxe?. En quin km es van detenir? En quin km el 2n cotxe avança al 1r?. En quin km el 1r torna a avançar al 2n?

c) Quina va ser la velocitat mitjana de cada cotxe en el trajecte total?. En quin interval de temps fou més gran la velocitat de cada cotxe?

10. Les gràfiques següents corresponen a les funcions I i II.

I) $f(x)=x^3-6x^2+9x$ II) $f(x)=-\dfrac{x^2+1}{x}$



Calcula en cada una:

a) El domini.

b) Els punts de tall amb els eixos.

c) Els valors de x pels que la funció és positiva i pels que és negativa.

d) Els intervals de creixement i els de decreixement.

e) Els màxims i els mínims.

f) Presenten alguna tendència especial?

Per saber-ne més

La primera funció

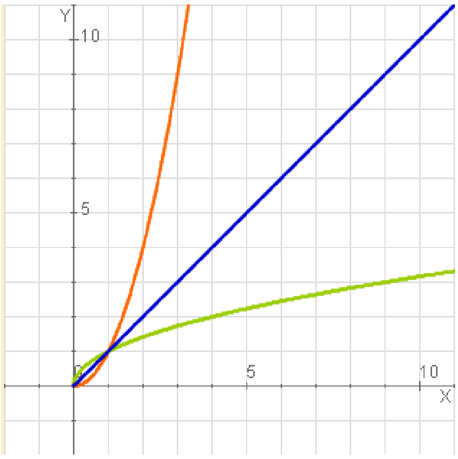
El primer en construir una funció va ser **Galileu** (1564-1642). Des de dalt de la torre inclinada de Pisa va tirar dues boles, una de ferro i una altra de fusta i va comprovar que malgrat la diferència de pes, ambdues arribaven a terra alhora. Havia descobert la llei de caiguda dels cossos.

Continuant el seu estudi i utilitzant un artefacte curiós, va comprovar que l'espai recorregut depèn del quadrat del temps, i així va escriure la primera funció de la història.

La primera definició formal de funció és gràcies a **Euler**, que en el llibre *Introductio in analysis infinitorum*, publicat el 1748, diu:

"Una funció d'una quantitat variable és una expressió analítica composta de qualsevol manera a partir de la quantitat variable i de nombres o quantitats constants".

El 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, torna a tractar el tema apropant-se més a la que utilitzem avui.



TVM i creixement

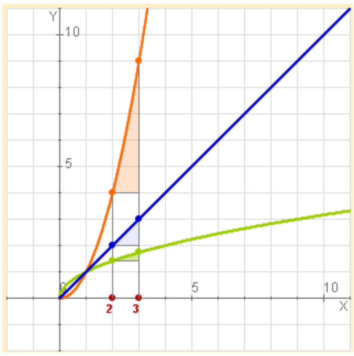
Com has vist la TVM de les funcions que tenen per gràfica una recta és constant, aleshores el seu creixement serà sempre el mateix, diem que és lineal.

Si observes les tres funcions de l'esquerra, són creixents. Comparem el creixement de les tres:

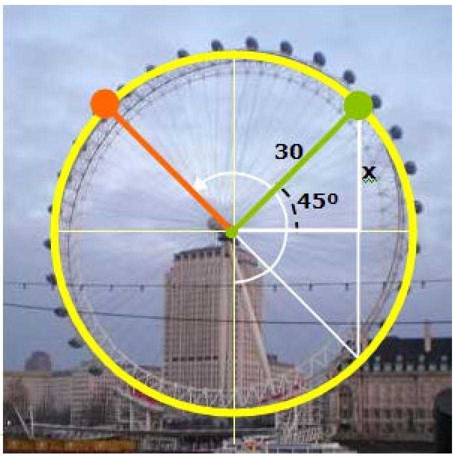
$h(x)=\sqrt{x}$
TVM[2,3]= 0,32
cada cop més petit

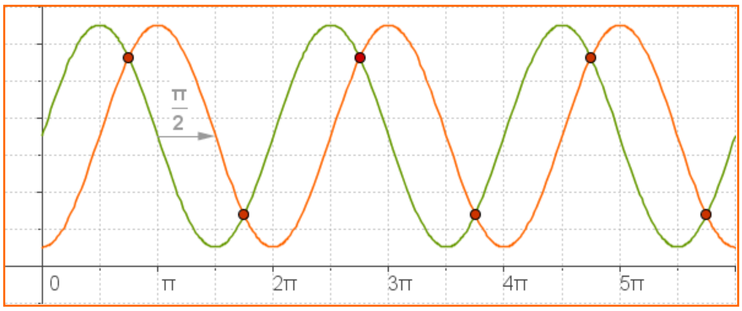
$g(x)=x$
TVM[2,3]= 1
es manté constant

$f(x)=x^2$
TVM[2,3]= 5
cada cop més gran



f(x) creix "ràpid",
g(x) té un creixement lineal,
h(x) creix "a poc a poc".





Observa les dues gràfiques, ambdues funcions són periòdiques de període 2π, la gràfica verda està desfasada π/2 respecte a la taronja; fixa't on assoleixen els màxims i els mínims.

Quan coincideixen les dues gràfiques, a quina altura estan?, x=r·sin 45º=21,21 m; 1) 35-21,21=13,79 2)35+21,21=56,21

Recorda el més important

- Una **funció** és una relació entre dues variables x i y, de manera que a cada valor de la variable independent, **x**, li associa un únic valor de la variable **y**, la dependent.
- El **domini** d'una funció és el conjunt de tots els possibles valors que pot prendre x.
- La **gràfica** d'una funció és el conjunt de punts **(x,f(x))** representats en el pla.
- Una funció és **contínua** si es pot representar amb un sol traç. És **discontínua** en un punt si presenta un "salt" o no està definida en aquest punt.
- Una funció és **periòdica** de període t, si la seva gràfica es repeteix cada t unitats, f(x+t)=f(x).
- Una funció és **simètrica** respecte l'eix OY, funció parell, si f(x)=f(-x); i és simètrica respecte l'origen, funció senar, si f(-x)=-f(x).
- La **taxa de variació** d'una funció entre dos punts és la diferència: **$TV[x_1,x_2]=f(x_2)-f(x_1)$** La **taxa de variació mitjana** és:

$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

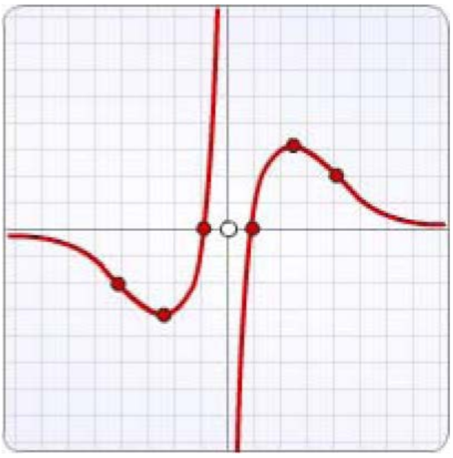
- Una funció és **creixent** en un interval, quan donats dos punts qualssevol d'aquest interval:

Si $x_1 < x_2$ aleshores $f(x_1) < f(x_2)$

- I és **decreixent**

Si $x_1 < x_2$ aleshores $f(x_1) > f(x_2)$

- Una funció contínua en un punt x=a, presenta un **màxim** relatiu, si a l'esquerra d'aquest punt és creixent i a la dreta és decreixent. Si, pel contrari, és decreixent abans i decreixent després hi ha un **mínim** relatiu.



Domini

Tot els reals excepte el 0

Continuïtat

No és contínua, en 0 presenta una discontinuïtat de salt infinit.

Simetria

Es simètrica respecte l'origen de coordenades, funció senar.

Talls amb els eixos

Talla l'eix d'abscisses en (-1,0) i (1,0); no talla l'eix d'ordenades.

Creixement i decreixement

És creixent en (-∞, -2,5)U(2,5 ,+∞)
I decreixent en (-2,5 ,0)U(0, 2,5)

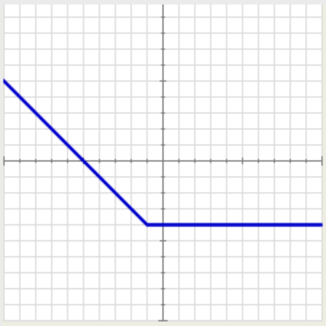
Màxims i mínims

Màxim en (2,5 ,3);
Mínim en (-2,5 ,3)

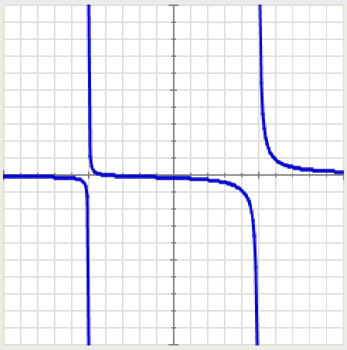
Tendència

Té una asímptota horitzontal

Autoavaluació



1. Calcula la imatge del zero en la funció de la gràfica adjunta.



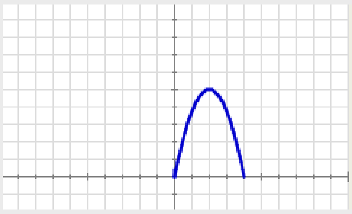
2. Calcula el domini de la funció corresponent a la gràfica de l'esquerra.

3. Quins dels punts següents: A(-3,14); B(1,3); C(0,8), no pertany a la gràfica de la funció

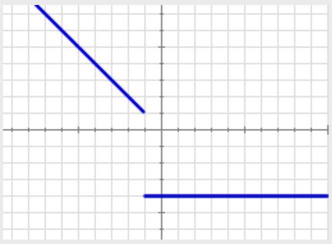
$$f(x) = -x^2 - 5x + 8$$

4. Calcula els punts de tall amb els eixos de coordenades de la recta $y = -x + 5$

5. Si $y=f(x)$ és una funció SENAR i $f(-1)=-8$ Quant val $f(1)$?

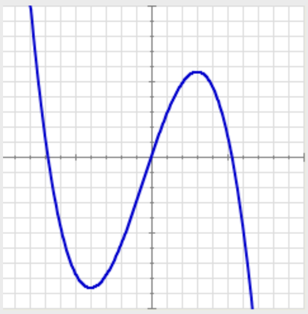


6. La gràfica mostra el primer tram d'una funció periòdica de període 4 i expressió $f(x)=-1{,}25x^2+5x$ si x està entre 0 i 4. Calcula f(17).



7. En quin punt ha de començar el tram horitzontal de la gràfica adjunta per tal que la funció a la que representa sigui contínua?

8. Calcula la TVM en l' interval [-2,-1] de la funció $f(x) = -x^2 - x + 4$.



9. Determina l' interval en què la funció de la gràfica adjunta és creixent.

10. Un ciclista surt d'un punt, A, fins un altre, B, distant 70 km a una velocitat constant de 35km/h. A la vegada un altre surt de B cap a A, a 40 km/h. A quants km del punt A es creuen a la carretera?

Solucions dels exercicis per practicar

1. $f(x)=x^2-1$
f(-1)=0, f(2)=3, f(1)=0
Tall OY: -1 Tall OX: 1 y –1

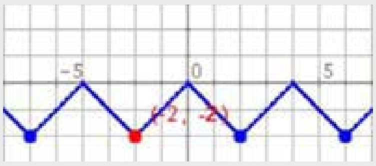
2. $y=\frac{x}{2}+3$
f(-1)=2,5 f(1)=3,5 f(3)=4,5
Tall OY: 3 Tall OX: -6

3. f(x)=2x-5
f(-2)=-9, f(-1)=-7, f(1)=-5
Tall OY: -5 Tall OX: 2,5

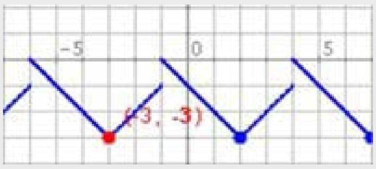
4. a) R
b) R-{2]
c) {x≥-5}

5. a) TVM[0,4]=TVM[2,4]=0,5
b) TVM[0,4]=1,2; TVM[2,4]=1,8

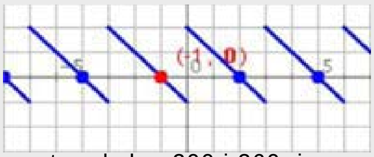
6. a)



b)



c)



7. a) 27,5 litres; entre els km 200 i 360, i del 440 fins el 520.
b) En dues, una en el km 200 i l'altra en el 440; en vaig posar més a la 1a; als 280 km
c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km

8. a) J. 25 kg, M. 35 kg ; als 14 anys
b) Als 11 (30 kg) i als 15 (55 kg) J més que M: fins als 11 i des dels 15; M més que J: dels 11 als 15
c) 25kg; 6,25 kg/any; M entre els 11 i 12 (10 kg/any); J entre els 12-14 (10 kg/any)

9. a) 80 km; a les 10:15; 75 i 70 min
b) 10 min en km 20, 20 min en km 30; en el km 20 i en 30 respectivament.
c) 64 km/h i 68,6 km/h; 1r: min 60-75
2n: min 15-30 i min 70-85

10. I)
a) IR
b) (0,0)(3,0)
c) y>0 (0,+∞); y<0 (-∞,0);
d) creixent:(-∞,1)U(3,+∞), decreixent:(1,3);
e) màx x=1, mín x=3;
f) No

II)
a) IR-{0}
b) No talla
c) y<0 (0,+∞); y>0 (-∞,0)
d) decreixent:(-∞,-1)U(1,+∞) creixent:(-1,0)U(0,1);
e) màx x=1, mín x=-1;
f) lineal.

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. f(0)= –4
2. IR - { 5, -5}
3. (1, 3)
4. (0, 5) (5,0)
5. f(1)=8
6. f(17)=f(1)=3,75
7. (-1,1)
8. TVM[-2,-1] = 2
9. (-4, 3)
10. A 32,7 km de A.