10

Funcions elementals

Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Reconèixer i distingir algunes de les funcions més habituals.
- Utilitzar algunes funcions no lineals: quadràtiques, de proporcionalitat inversa i exponencials.
- Reconèixer les característiques més importants d'aquest tipus de funcions.
- Representar i interpretar funcions "definides a trossos".
- Buscar i interpretar funcions de tots aquests tipus en situacions reals.

Abans de començar.

1. Funcions polinòmiques .... pàg. 4
   Funcions lineals
   Funcions afins
   Funcions quadràtiques

2. Altres funcions .... pàg. 11
   Proporcionalitat inversa
   Funció exponencial
   Funcions definides a trossos
   Funció valor absolut

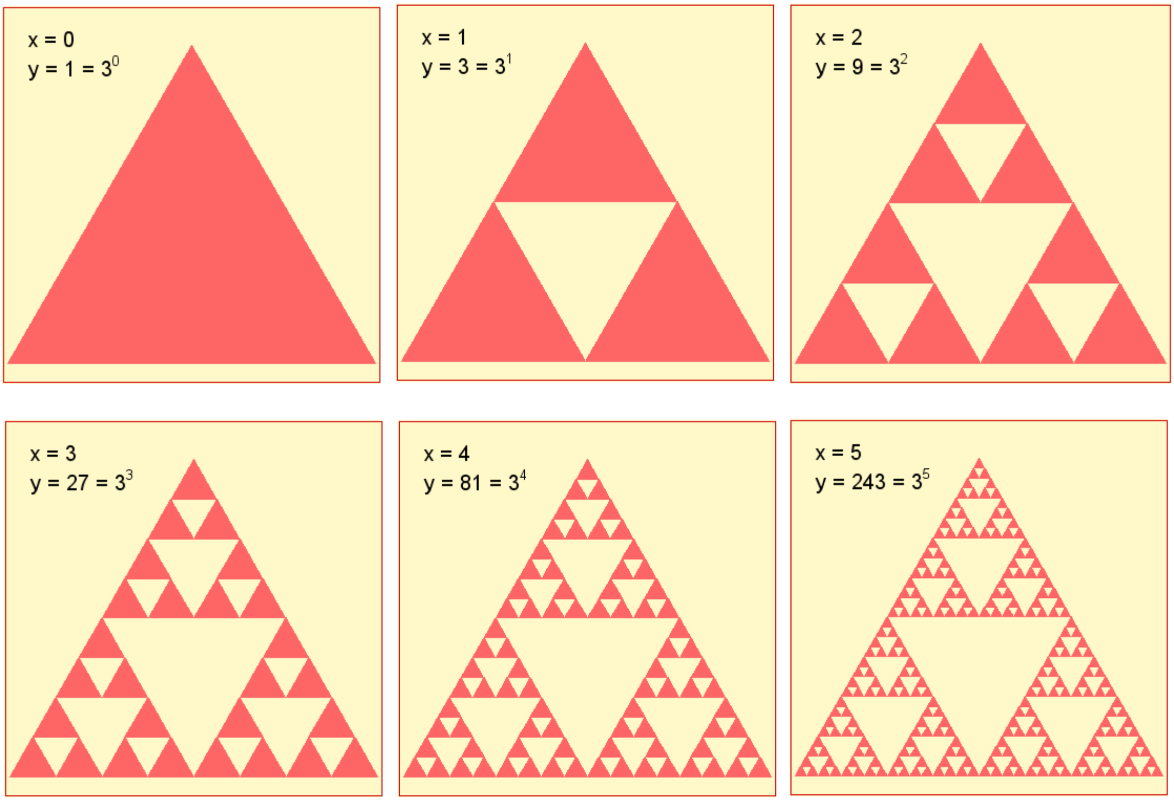
Exercicis per practicar

Per saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Abans de començar



Investiga

Un investigador està fent un estudi d'una certa població de microbis. Ha comprovat que cada hora que passa cada element de la població es divideix en altres tres. L'animació que acabes de veure és una simulació d'aquest experiment.
La taula adjunta mostra la relació entre el nombre d'individus de la població i el temps transcorregut:

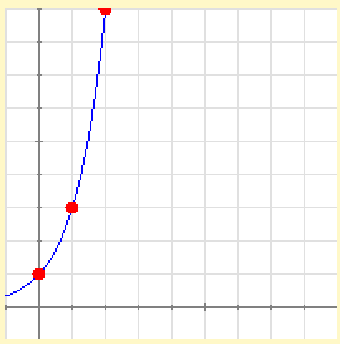
Hores	0	1	2	3	4	5	6
Nre mic	1	3	9	27	81	243	729

Com pots veure si anomenem x al temps i y al nombre d'individus tenim:

$$y = 3^x$$

És un exemple de funció exponencial.

La gràfica d'aquesta funció té aquest aspecte:



Com pots comprovar el seu creixement és rapidíssim. Podries calcular quant temps tardaria en arribar a una població d'un milió d'individus?

1. Funcions polinòmiques

Funció de proporcionalitat directa

Com el seu nom indica, la funció de proporcionalitat directa o **funció lineal** relaciona dues magnituds directament proporcionals, és a dir, tals que el seu quocient és constant. Aquest quocient rep el nom de **constant de proporcionalitat**.

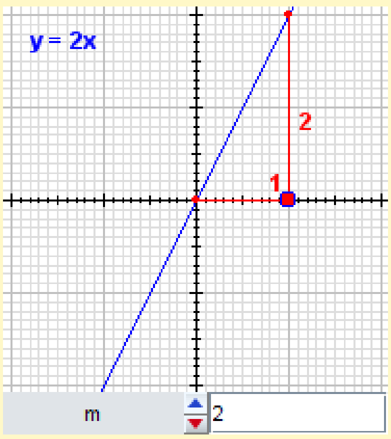
De la definició es dedueix que l'equació de la funció lineal és:

$$y = m \cdot x$$

on ***m*** és la constant de proporcionalitat.

La gràfica d'aquesta funció és sempre una línia recta que passa per l'origen (*si x=0, llavors y=0*), creixent si ***m*** és positiva, decreixent si ***m*** és negativa i tant més a prop de la vertical com major sigui el valor absolut de ***m***. Per aquest motiu, ***m*** també s'anomena **pendent** de la recta.

EN RESUM: Les equacions del tipus ***y = m·x*** representen funcions lineals o de proporcionalitat directa.



- **Si m>0 és creixent.**
- **Si m<0 és decreixent.**

(Observa què succeeix si m=0)

Per la seva part, la constant de proporcionalitat és una mesura de la inclinació de la recta.

L'anomenem **pendent**.

$$m = \frac{2}{1} = 2$$

Les rebaixes

Han arribat les rebaixes i en una tenda han decidit classificar tots els seus productes en tres lots, A, B i C, als que aplicaran el 20%, el 30% i el 50% de descompte, respectivament.

Si anomenem **x** al preu inicial i **y** al preu final, les taules que veus a sota mostren els canvis de preu de diversos productes dels diferents lots:

Lot A: 20%		Lot B: 30%		Lot C: 50%	
x	y	x	y	x	y
375,00 €	300,00 €	213,00 €	149,10 €	297,00 €	148,50 €
452,00 €	361,60 €	198,00 €	138,60 €	561,00 €	280,50 €
126,00 €	100,80 €	321,00 €	224,70 €	319,00 €	159,50 €
180,00 €	144,00 €	202,00 €	141,40 €	56,00 €	28,00 €
412,00 €	329,60 €	135,00 €	94,50 €	87,00 €	43,50 €

Lot A: 20%		
x	y	y/x
375,00 €	300,00 €	0,8
452,00 €	361,60 €	0,8
126,00 €	100,80 €	0,8
180,00 €	144,00 €	0,8
412,00 €	329,60 €	0,8

Analitzarem cada cas dividint el preu rebaixat pel preu inicial.

Com pots observar, en el primer lot tots els quocients són iguals. Com hem vist, això significa que el preu rebaixat és **directament proporcional** al preu inicial y, en aquest cas, la constant de proporcionalitat és 0,8.

Per tant, per al lot A tenim: $y = 0{,}8 \cdot x$

Lot B: 30%		
x	y	y/x
213,00 €	149,10 €	0,7
198,00 €	138,60 €	0,7
321,00 €	224,70 €	0,7
202,00 €	141,40 €	0,7
135,00 €	94,50 €	0,7

Lot C: 50%		
x	y	y/x
297,00 €	148,50 €	0,5
561,00 €	280,50 €	0,5
319,00 €	159,50 €	0,5
56,00 €	28,00 €	0,5
87,00 €	43,50 €	0,5

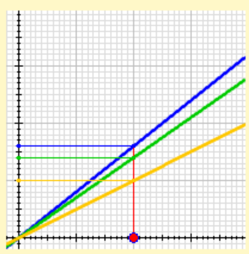
En els altres lots succeix una mica semblant, però en cada cas la constant de proporcionalitat és diferent de manera que:

per al lot B tenim: $y = 0{,}7 \cdot x$

per al lot C tenim: $y = 0{,}5 \cdot x$

en qualsevol cas totes tenen la forma: $y = m \cdot x$

Analitzarem ara les gràfiques de les tres funcions: Com veus les tres són ***línies rectes que passen per l'origen***, amb major inclinació com més gran és la constant de proporcionalitat.



x = 200,00 €

Lot A:
y = 160,00 €

Lot B:
y = 140,00 €

Lot C:
y = 100,00 €

EXERCICIS resolts

1. Esbrina si les funcions definides per les dades de les taules adjuntes són o no són funcions lineals. En cas afirmatiu, determina el seu pendent i dibuixa la seva gràfica:

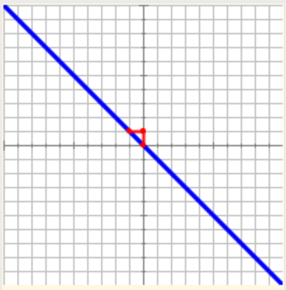
x	y	y/x
-3	4,55	-1,52
-1	0,51	-0,51
1	0,51	0,51
3	4,55	1,52
5	12,64	2,53

Per determinar si és lineal, calculem tots els quocients entre els valors de **y** i de **x**.

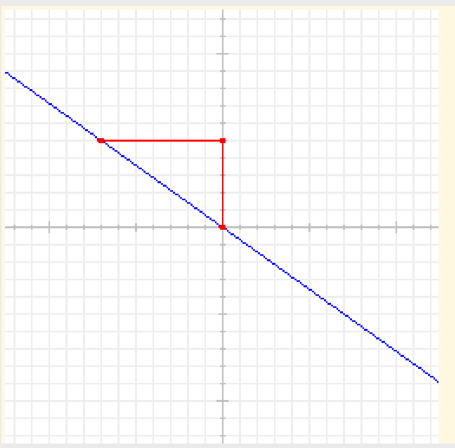
Com que no tots els quocients són iguals, no es tracta d'una funció de proporcionalitat directa i, per tant, **no és una funció lineal**.

x	y	y/x
-3	3	-1
-1	1	-1
1	-1	-1
3	-3	-1
5	-5	-1

En aquest cas els quocients són tots iguals, per tant, les magnituds que representen x i y són directament proporcionals i la funció que les relaciona **sí és lineal**. El pendent és la constant de proporcionalitat m=-1 i la gràfica és



2. Determina el pendent i l'equació de la funció de la gràfica adjunta:



Per ser una recta que passa per l'origen és una funció lineal i la seva equació és de la forma y=m·x.

Com que és decreixent, m és negativa.

Per trobar m, localitzem algun punt de la recta amb les dues coordenades enteres. En aquest cas, el punt pot ser (-7,5). El pendent es calcula dividint la segona coordenada per la primera, així doncs,

$$m = -\frac{5}{7}$$

i l'equació de la funció és

$$y = -\frac{5}{7}x$$

Funcions afins

Podem considerar una **funció afí** com una funció lineal a la que se li han aplicat certes *condicions inicials*. Encara que no representa a dues magnituds directament proporcionals, existeix entre elles certa proporcionalitat com pots veure a les imatges adjuntes.

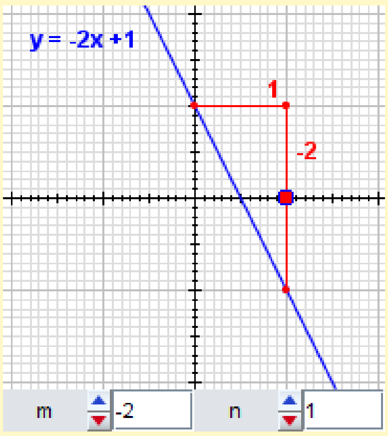
L'equació de la funció afí és:

$$y = m \cdot x + n$$

on ***m*** segueix representant aquesta certa *proporcionalitat* i ***n*** representa les *condicions inicials*.

La seva gràfica és una línia recta que talla l'eix Y en el punt n (*si x=0, llavors y=n*). Per aquest motiu també es diu que ***n*** és l'**ordenada en l'origen** de la recta. La ***m*** té el mateix significat que en les funcions lineals.

EN RESUM: Les equacions del tipus ***y = m·x+n*** representen funcions afins.



- **Si m>0 és creixent.**
- **Si m<0 és decreixent.**

(Observa què succeeix si m=0)

El pendent es calcula ara respecte a l'ordenada en l'origen.

$$m = \frac{-2}{1} = -2$$

En una empresa de lloguer de vehicles cobren 50€ pel contracte de lloguer més 0,20€ per quilòmetre recorregut. Volem trobar una equació que ens permeti calcular amb facilitat el preu d'un lloguer en funció de la distància recorreguda.

x (km)	Y (€)
0	50,00 €
100	70,00 €
200	90,00 €
300	110,00 €
400	130,00 €

L'empresa ens proporciona la taula adjunta perquè ens puguem fer una idea del preu.

El primer que observem és que si dupliquem el nombre de km, el preu no es duplica: **les magnituds no són directament proporcionals**.

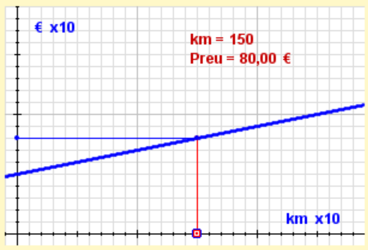
Analitzarem amb més detall la situació:
Si descomptem en cada cas el valor inicial i dividim el preu per la distància obtenim sempre el mateix quocient, és a dir, ***el preu (descomptat el cost inicial) sí que és directament proporcional a la distància***. El valor obtingut és la constant de proporcionalitat com en el cas anterior.

x (km)	y (€)	y-50	(y-50)/x
0	50,00 €		
100	70,00 €	20,00 €	0,20
200	90,00 €	40,00 €	0,20
300	110,00 €	60,00 €	0,20
400	130,00 €	80,00 €	0,20

Per tant, $y-50 = 0{,}2 \cdot x$ d'on es dedueix que:

$y = 0{,}2 \cdot x + 50$ que té la forma $y = m \cdot x + n$

Igual que en les funcions lineals la **m** representa el pendent i ara la **n** representa el punt on la recta talla l'eix Y.



EXERCICIS resolts

3. Una agència de lloguer de cotxes cobra per un determinat model 20€ al contractar i 0,60€ per km recorregut. En una altra agència cobren 50€ al contractar i 0,10€ per km recorregut. Analitza, en funció dels km recorreguts quina agència és més avantatjosa.

Si anomenem **x** als km recorreguts i **y** al preu total del lloguer, per a la primera agència tenim:

$$y = 0{,}60x + 20$$

Per a la segona:

$$y = 0{,}10x + 50$$

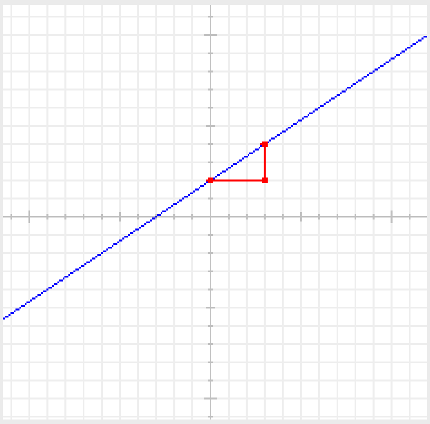
Resolem el sistema d'equacions i obtenim les coordenades del punt de tall:

$$0{,}60x + 20 = 0{,}10x + 50$$

$$x = \frac{30}{0{,}50} = 60$$

Per tant, fins 60 km és millor la primera (la seva gràfica queda per sota).
A partir d'aquesta distància és millor la segona.

4. Determina el pendent i l'equació de les funcions corresponents a les gràfiques:



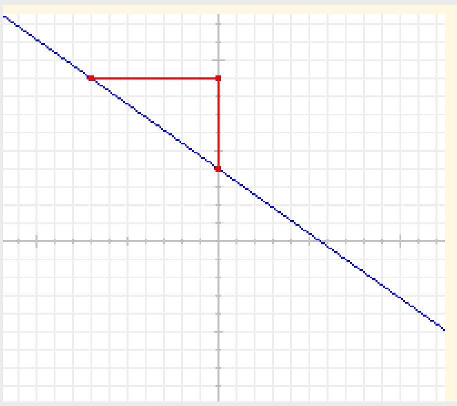
Per ser una recta que no passa per l'origen, és una funció afí i la seva equació és de la forma y=mx+n.

Per trobar n, localitzem el punt on la recta talla l'eix Y n=2.

Com que és creixent, el pendent m és positiu.

Per trobar m localitzem un punt de la recta amb les dues coordenades enteres, per exemple (3,4), tracem un triangle rectangle que l'uneixi amb l'ordenada en l'origen (0,2) i dividim el catet vertical per l'horitzontal: m=2/3 i l'equació és

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$



En aquest cas n=4.

Per ser la recta decreixent, el pendent és negatiu.

Per trobar m localitzem un punt de la recta amb les dues coordenades enteres, per exemple (-7,9), tracem un triangle rectangle que l'uneixi amb l'ordenada en l'origen (0,4) i dividim el catet vertical per l'horitzontal: m=-5/7 i l'equació és

$$y = -\frac{5}{7}x + 4$$

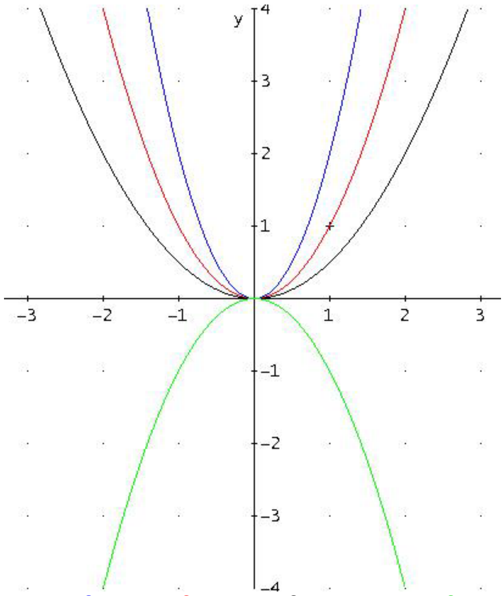
Funcions quadràtiques

Una **funció quadràtica** és la que ve representada per un polinomi de segon grau (*x està elevada al **quadrat***).
L'equació de la funció quadràtica és:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

El significat dels coeficients a, b i c s'explica en l'escena.

La seva gràfica és una corba especial anomenada **paràbola**. Aquest tipus de corba es troba fàcilment en la vida real ja que és la corba que descriu qualsevol objecte llançat a l'aire i sotmès a la influència de la gravetat.

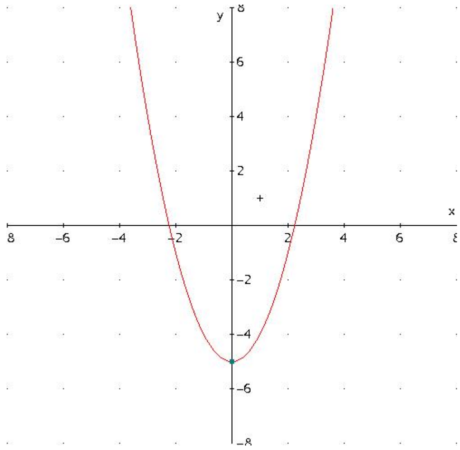


$y=2x^2$ $y=x^2$ $y=x^2/2$ $y=-x^2$

Cas 1: b = c =0. $y=ax^2$

Característiques:

1. Sempre passa per l'origen.
2. És simètrica respecte l'eix Y.
3. Si a>0, està oberta cap amunt.
4. Si a<0, està oberta cap avall.
5. Com més gran és |a|, la corba és més tancada.
6. L'origen és el **vèrtex** de la paràbola.
7. Si a>0, el vèrtex és un mínim.
8. Si a<0 el vèrtex és un màxim.



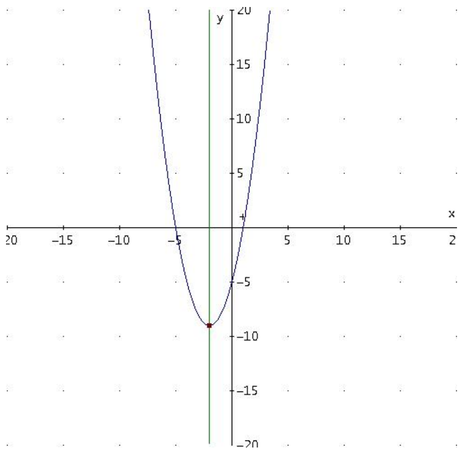
$y=x^2-5$

Cas 2: b=0. $y=ax^2+c$

Característiques:

1. El vèrtex és el punt (0,c)
2. Si a i c tenen el mateix signe, no talla l'eix X.
3. Si a i c tenen diferent signe, talla en dos punts l'eix X.
4. Les altres propietats es mantenen, en particular, el significat de a segueix essent el mateix.

Sumar o restar c produeix un desplaçament vertical de la gràfica.



$y=x^2+4x-5$

Cas general: $y=ax^2+bx+c$

Característiques:

1. L'eix de simetria és $x=-\dfrac{b}{2a}$
2. El vèrtex es troba substituint el valor anterior en l'equació.
3. **c** només ens informa del punt de tall amb l'eix Y.
4. Les altres propietats es mantenen.

b representa una mesura del desplaçament horitzontal de la gràfica.

EXERCICIS resolts

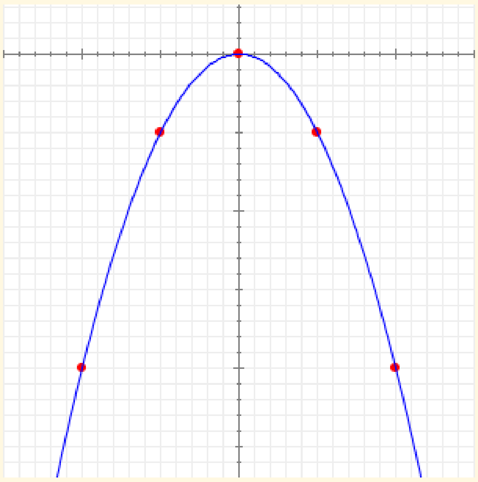
5.

Dibuixa la gràfica de la funció $y = -\frac{1}{5}x^2$

Com ja sabem les funcions del tipus $y = ax^2$ són paràboles simètriques respecte a l'eix Y i amb el vèrtex en l'origen de coordenades.

Com que en aquest cas $a < 0$, la paràbola està oberta cap avall. Per trobar les coordenades d'altres punts donem uns quants valors a la x tenint en compte la simetria:

x	-10	-5	0	5	10
y	-20	-5	0	-5	-20



6.

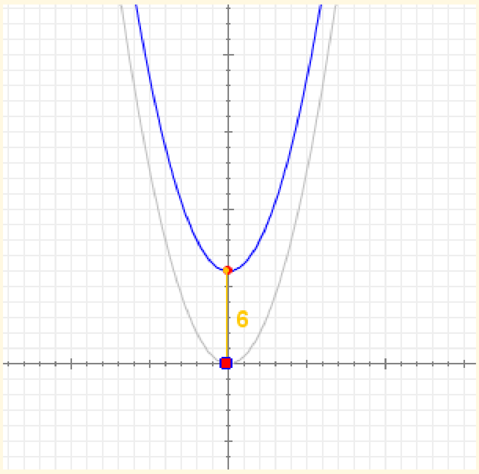
Dibuixa la gràfica de la funció $y = \frac{1}{2}x^2 + 6$

És una funció del segon tipus, per la qual cosa la seva gràfica serà igual que la de la funció

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

però desplaçada 6 unitats cap amunt.

Per tant, només hem de dibuixar aquesta funció com hem explicat en l'exercici anterior i després desplaçar-la 6 unitats cap amunt.

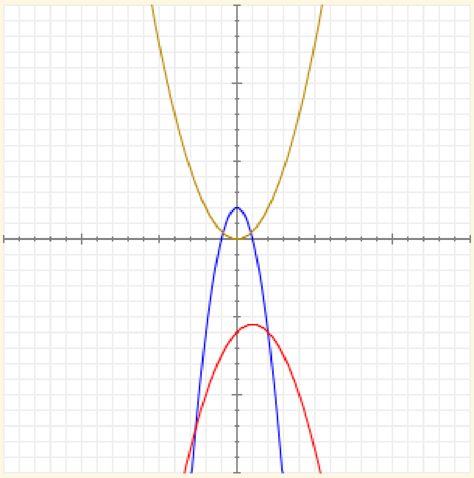


7.

Associa de forma raonada cada gràfica amb la seva equació

1) $y = -2x^2 + 2$
2) $y = 0,5x^2$
3) $y = -0,5x^2 + x - 6$

Recorda que el signe de a indica cap a on està oberta.
El valor de c indica el punt de tall amb l'eix Y.
Si $b \neq 0$, l'eix de simetria de la paràbola no coincideix amb l'eix Y.
Com més gran és el valor absolut de a més tancada és la paràbola i viceversa.



EXERCICIS resolts

8.

Dibuixa la gràfica de la funció $y = x^2 - 3x - 4$

En aquest cas el procés consisteix en seguir els següents passos:

1) Determinar si està oberta cap amunt o cap avall **Com que a = 1 està oberta cap amunt.**

2) Trobar el punt de tall amb l'eix Y **Si x = 0, llavors y = -4**

3) Trobar els punts de tall amb l'eix X

Un punt està en l'eix X si la seva segona coordenada (la y) és igual a zero. Llavors hem de resoldre l'equació

$$x^2 - 3x - 4 = 0; \qquad x = \frac{3 \mp \sqrt{9 + 16}}{2}; \quad x1 = -1\ ;\ x2 = 4$$

4) Trobar el vèrtex. Per això recordem que el vèrtex es troba en el punt d'abscissa **x = -b/2a = 1,5**
i la segona coordenada del vèrtex s'obté substituint aquest valor en la funció: **y = -6,25**

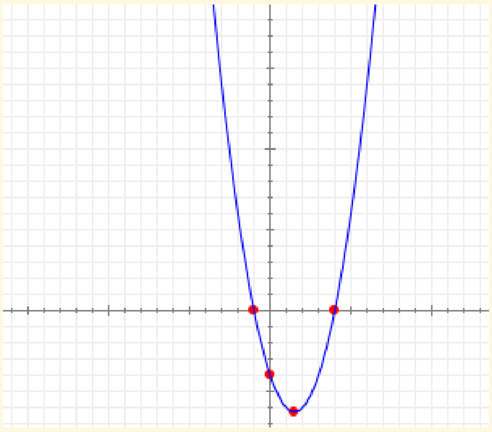
Resumint:

Està oberta cap amunt.

Passa pel punt **(0, -4)**

Talla a l'eix X en **(-1 ,0)** i en **(4 ,0)**

El vèrtex és **(1,5 , -6,25)**



2. Altres funcions

VIATGE D'ESTUDIS

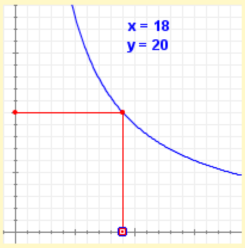
Un grup d'alumnes vol organitzar una excursió i per això demanen pressupost a una agència de viatges que els demana 360 € pel lloguer d'un autocar sigui quin sigui el nombre d'alumnes que s'apuntin.

Els organitzadors estan una mica preocupats perquè només en són 10 i 36€ els sembla molts diners. A poc a poc van convencent a més companys i al final reuneixen un grup de 30 alumnes (el triple dels inicials), per la qual cosa el viatge els surt a 12€ per persona (la tercera part de la quantitat inicial).

Tenim un exemple de proporcionalitat inversa: ***el preu per alumne és inversament proporcional al nombre d'alumes***.

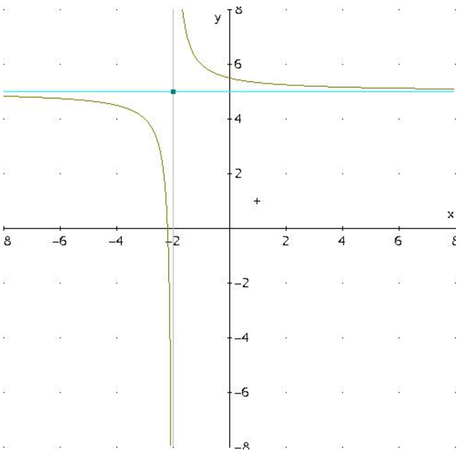
Si anomenem **x** al nombre d'alumnes i **y** al preu que ha de pagar cada un, està clar que es compleix:

$$x \cdot y = 360 \quad \text{o bé,} \quad y = \frac{360}{x}$$



És una funció de proporcionalitat inversa la constant de proporcionalitat de de la qual és 360.

La gràfica adjunta mostra com varia el preu en funció del nombre d'alumnes:



Funció de proporcionalitat inversa

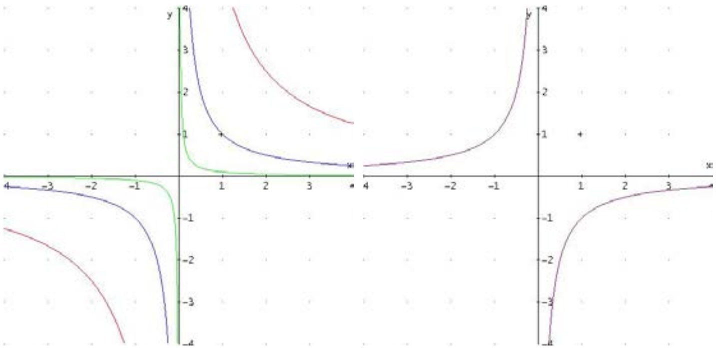
Com el seu nom indica, la funció de proporcionalitat inversa relaciona dues magnituds inversament proporcionals, és a dir, tals que el seu producte és constant. Aquest producte rep el nom de **constant de proporcionalitat.**

L'equació d'aquesta funció és:

$$y = \frac{k}{x} \qquad o \qquad x \cdot y = k$$

on **k** és la constant de proporcionalitat.

La seva gràfica és una corba especial anomenada **hipèrbola**. Es tracta d'un tipus de corba que tendeix a assemblar-se a una línia recta quan ens allunyem de l'origen.



$x \cdot y = 1$ $x \cdot y = 5$ $x \cdot y = 1/10$ $x \cdot y = -1$

Característiques:

1. Funció discontínua en l'origen.
2. Com més gran és |k| més s'allunya dels eixos.
3. Si k>0 la gràfica està en els quadrants 1 i 3.
4. Si k<0 la gràfica està en els quadrants 2 i 4.
5. És imparell (simètrica respecte de l'origen).
6. Les dues branques de la gràfica es van aproximant als eixos. Es diu que els eixos són **asímptotes** d'aquesta funció.

Si canviem x per x-a i y per y-b, la gràfica es desplaça de manera que ara el vèrtex és (a,b), les asímptotes són les rectes x=a i y=b.
La gràfica de l'esquerra correspon a la funció:

$$\mathbf{(x+2)\cdot(y-5)=1}$$

Funció exponencial

Una **funció exponencial** és una funció definida per una potència en la qual la base és constant i l'exponent és variable. Per motius d'operativitat només s'admeten bases positives i diferents de 1.

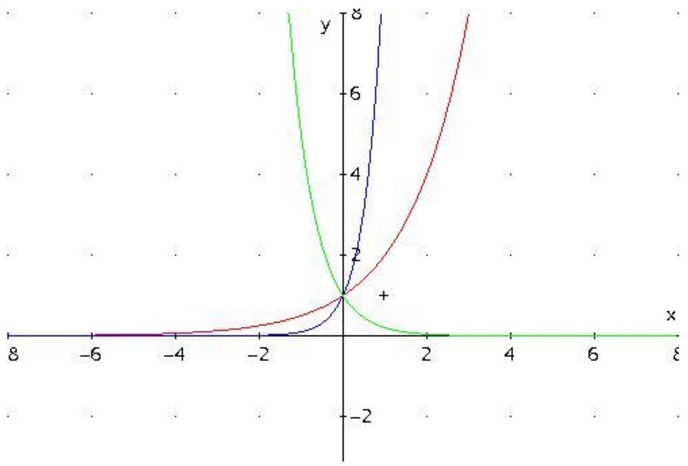
L'equació d'aquesta funció és:

$$y = k\cdot a^{x}$$

on a és qualsevol nombre real major que zero i diferent de 1, i k és una constant que allunya o apropa la gràfica a l'eix X.

Igual que les hipèrboles la seva gràfica té sempre una asímptota, però a diferència d'aquestes no és simètrica. La seva principal característica és la de presentar un creixement o un decreixement molt ràpid.

Cas 1: k=1. $y=a^{x}$



$y=2^{x}$ $y=10^{x}$ $y=(0,2)^{x}$

Característiques:

1. És creixent si a>1 i decreixent si a<1.
2. Talla l'eix Y en el punt (0,1).
3. No talla l'eix X.
4. La recta y=0 és una asímptota horitzontal (per l'esquerra si a>1 i per la dreta si a<1).

Cas general:
Com més gran sigui |k| més s'allunya la gràfica de l'eix X. Si k és negatiu les gràfiques passen als quadrants 3 i 4 i les funcions creixents es transformen en decreixents i viceversa.

En un banc em proposen una inversió a llarg termini al 3% anual de forma que els interessos s'acumulen al capital. En la taula es mostra un exemple a 10 anys per a un capital inicial de 20.000€

ANYS	CAPITAL INICIAL	INTERESSOS	CAPITAL FINAL
1	20.000,00 €	600,00 €	20.600,00 €
2	20.600,00 €	618,00 €	21.218,00 €
3	21.218,00 €	636,54 €	21.854,54 €
4	21.854,54 €	655,64 €	22.510,18 €
5	22.510,18 €	675,31 €	23.185,48 €
6	23.185,48 €	695,56 €	23.881,05 €
7	23.881,05 €	716,43 €	24.597,48 €
8	24.597,48 €	737,92 €	25.335,40 €
9	25.335,40 €	760,06 €	26.095,46 €
10	26.095,46 €	782,86 €	26.878,33 €

Buscarem una equació que ens serveixi per a qualsevol termini.

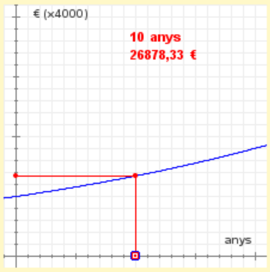
Anomenarem Co al capital inicial, i als interessos anuals, t al nombre d'anys i Cf al capital final. A partir de la taula adjunta es dedueix la relación entre el capital final i l'inicial:

ANYS	Ci	INTERESSOS	Cf
1	Co	I = 0,03·Co	C1 = Co+i = Co+0,03·Co = 1,03·Co
2	C1	0,03·C1	$C2 = 1{,}03\cdot C1 = (1{,}03)^{2}\cdot Co$
3	C2	0,03·C2	$C3 = 1{,}03\cdot C2 = (1{,}03)^{3}\cdot Co$
4	C3	0,03·C3	$C4 = 1{,}03\cdot C3 = (1{,}03)^{4}\cdot Co$
5	C4	0,03·C4	$C5 = 1{,}03\cdot C4 = (1{,}03)^{5}\cdot Co$
6	C5	0,03·C5	$C6 = 1{,}03\cdot C5 = (1{,}03)^{6}\cdot Co$
7	C6	0,03·C6	$C7 = 1{,}03\cdot C6 = (1{,}03)^{7}\cdot Co$
8	C7	0,03·C7	$C8 = 1{,}03\cdot C7 = (1{,}03)^{8}\cdot Co$
9	C8	0,03·C8	$C9 = 1{,}03\cdot C8 = (1{,}03)^{9}\cdot Co$
10	C9	0,03·C9	$C10 = 1{,}03\cdot C9 = (1{,}03)^{10}\cdot Co$

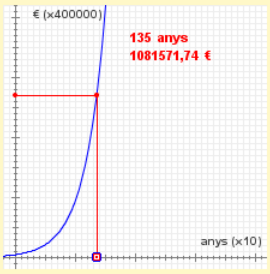
$Cf = Co\cdot(1{,}03)^{t}$ o, en general, $Cf = Co\cdot(1+r)^{t}$

Sent r el tipus d'interés aplicat.

La funció que hem obtingut té l'aspecte: $y = k\cdot a^{x}$
(y és el capital final, k el capital inicial, a=1,03>0 i diferent d'1, x el temps transcorregut).
Tenim, doncs, una **funció exponencial** la gràfica de la qual és:



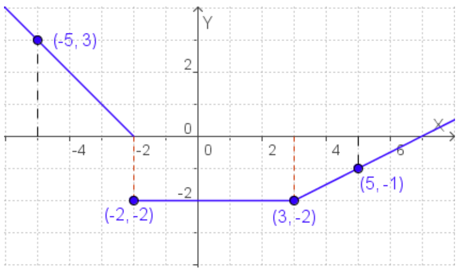
Ampliant l'escala ens fem una idea millor de l'aspecte de la gràfica. Com pots veure sempre és creixent i encara que al principi el creixement és bastant lent, amb el temps s'accelera ràpidament.



Naturalment, no farem una inversió a tan llarg termini, però pensa en empreses o institucions que planifiquen amb dècades d'antelació.

Hi ha una novel·la de Ciència-Ficció (*Retorn de les Estrelles*) d'Stanislaw Lem que usa aquest recurs.

Funcions definides a trossos



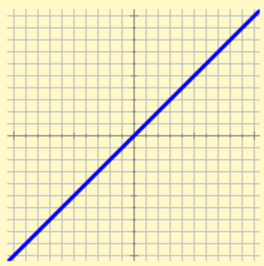
$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & x<-2 \\ -2 & -2\leq x\leq 3 \\ 0{,}5x-3{,}5 & x>3 \end{cases}$$

Hi ha un tipus de funcions que vénen definides amb diferents expressions algebraiques segons els valors de x, es diu que estan **definides a trossos**.

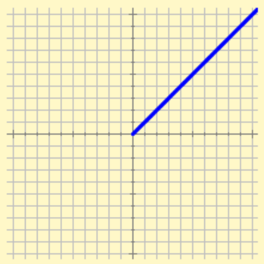
Per descriure analíticament una funció formada per trossos d'altres funcions, es donen les expressions dels diferents trams, per ordre d'esquerra a dreta, indicant en cada tram els valors de x per als quals la funció està definida.

A la imatge pots veure un exemple d'aquest tipus de funció i la seva representació gràfica.

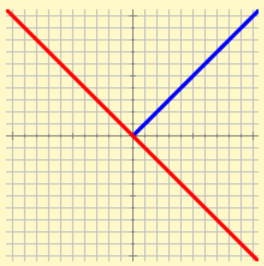
Funció valor absolut



Aquesta és la gràfica de la funció lineal **y = x**



Si ens quedem només amb la part en què x és positiva aquesta és la gràfica que queda.



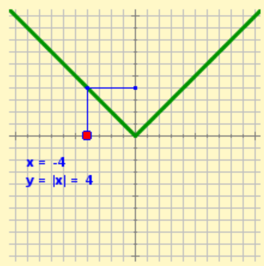
La línia vermella és la gràfica de la funció lineal **y = - x**

Com recordaràs de la segona quinzena, el valor absolut d'un nombre representa la seva distància al zero. La funció valor absolut és la que assigna a cada nombre aquesta distància.

Tenint en compte que el valor absolut d'un nombre és el mateix nombre si aquest és positiu i el seu oposat si és negatiu, l'equació d'aquesta funció és:

$$y=|x|=\begin{cases} x & si\ x\geqslant 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$$

Com veus és un exemple de funció definida a trossos. En cada tros ve representada per una funció lineal de pendents 1 i -1 respectivament, per tant, la seva gràfica està composta per dues semirectes amb aquests pendents que s'uneixen en l'origen.



Així doncs, aquesta és la gràfica de la funció valor absolut:
y = | x |

EXERCICIS resolts

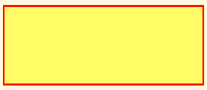
9. Indica si la base i l'altura de tots els rectangles la superfície dels quals mesura 6000 m^2 són magnituds inversament proporcionals. En cas afirmatiu, escriu l'equació de la funció que les relaciona i dibuixa la seva gràfica.

L´àrea d´un rectangle és igual a la base (b) per l´altura (h). Si l´àrea és constant tenim

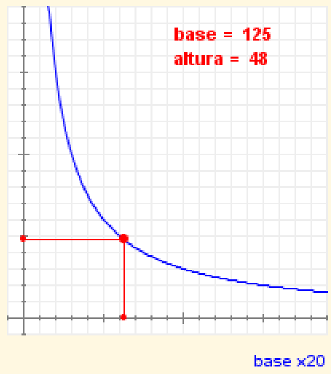
$$b \cdot h = k.$$

Llavors sí són inversament proporcionals.
En el nostre cas l´equació és

$$b \cdot h = 6000 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{6000}{b}.$$



base 125 **SUPERFÍCIE = 6000 m^2**



10. Determina l'equació de la gràfica adjunta.

Es tracta d´una funció de proporcionalitat inversa.

$$x \cdot y = k$$

Intentem localizar un o diversos punts amb coordenades enteres:

Per exemple: **(5 , 8)**

llavors l´equació és $x \cdot y = 5 \cdot 8 = 40$

Si és possible busquem altres punts per confirmar.

11. Dibuixa la gràfica de l'equació **x·y = -5**

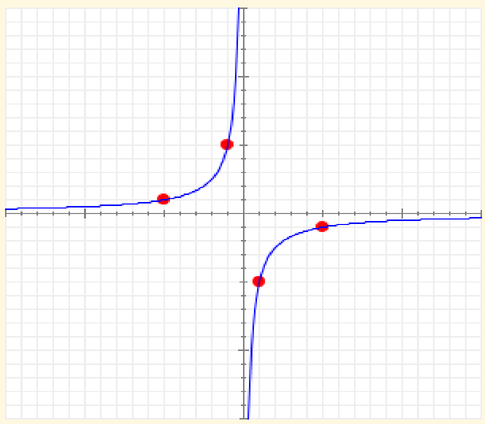
Com que k és negativa la gràfica ha d´estar en el segon i quart quadrants.

Busquem un o diversos punts amb coordenades enteres tal que el seu producte sigui -5 i tenim en compte la simetria de la funció.

Per exemple, passa per **(-1 , 5)**

i per **(1 , -5)**

Si és possible busquem més punts.



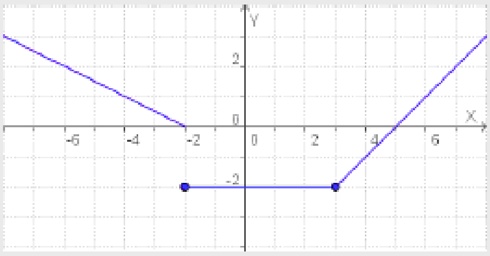
EXERCICIS resolts

12. En les funcions definides a trossos següents, calcula les imatges dels valors de x indicats.

a) $f(x)=\begin{cases} -0{,}5x-1 & \text{si} \quad x<-2 \\ -2 & \text{si} \quad -2\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

x=-4 es substitueix a dalt (-4<-2)
x=-2, x=1 i x=3 es substitueix al mig, ja que estan en [-2,3]
x=6 es substitueix a sota ja que 6>3

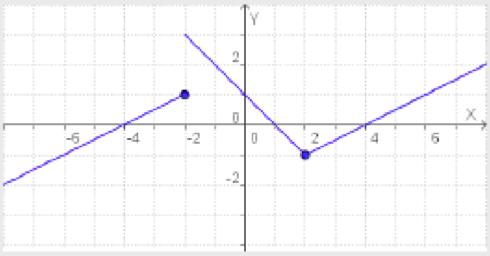
x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



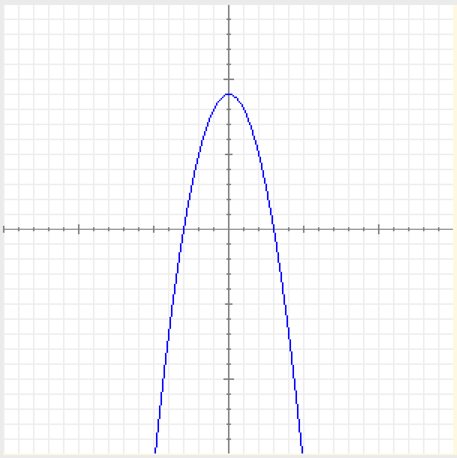
b) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+2 & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x+1 & \text{si} \quad -2<x<2 \\ 0{,}5x-2 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

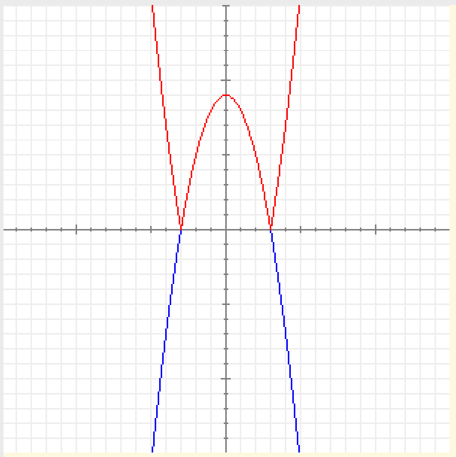
x=-6 i x=-2 substituïm a dalt
x=0 es substitueix al mig, donat que es compleix -2<0<2
x=2 i x=4 substituïm a sota

x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



13. La imatge adjunta es correspon amb la gràfica de la funció $y=-x^2+9$. Dibuixa la gràfica que correspon al valor absolut d'aquesta funció.

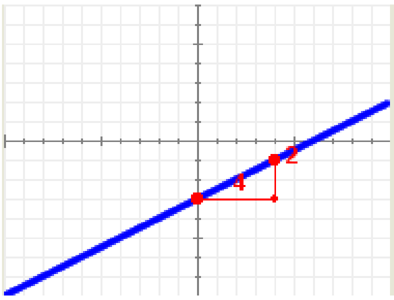




La línia vermella de la dreta representa la gràfica buscada. Recorda que el valor absolut d'un nombre coincideix amb el mateix nombre si és positiu i amb el seu oposat si és negatiu.

Per practicar

1. Determina l'equació de la funció de la gràfica adjunta, indicant si es tracta d'una funció lineal o afí.



2. Dibuixa la gràfica de la funció **y=-2x+5**

3. Troba les coordenades del punt de tall de les rectes d'equacions:
f: y = x + 9 **g: y = 3x + 13**

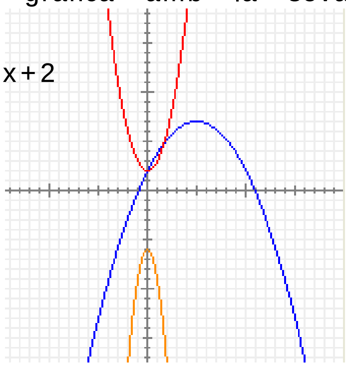
4. Troba l'equació de la funció la gràfica de la qual és paral·lela a la de la funció **y = 4x – 2** i passa pel punt **P(-1,4)**.

5. Troba l'equació de la funció la gràfica de la qual passa pels punts
P(-2,7) i **Q(-1,4)**

6. Dibuixa la gràfica de la funció $y=x^2-1$.

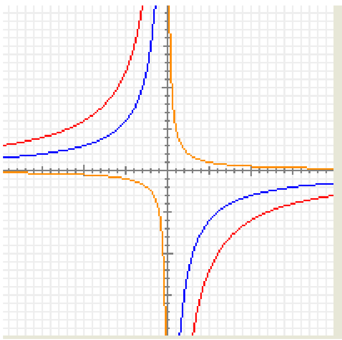
7. Associa cada gràfica amb la seva equació:

a) $y=-0{,}2x^2+2x+2$
b) $y=-3x^2+6$
c) $y=x^2+2$



8. Associa cada gràfica amb la seva equació:

a) $x \cdot y = -60$
b) $x \cdot y = -30$
c) $x \cdot y = 5$

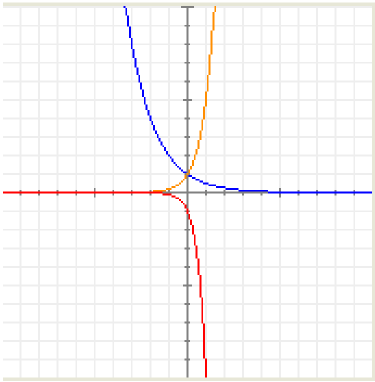


9. Els nombres de la taula adjunta corresponen a quantitats de dues magnituds inversament proporcionals. Emplena els forats que queden i escriu l'equació de la funció que relaciona aquestes dues magnituds.

x	y
2	40
	-320
5	16
-8	
	-8
-20	

10. Associa cada gràfica amb la seva equació:

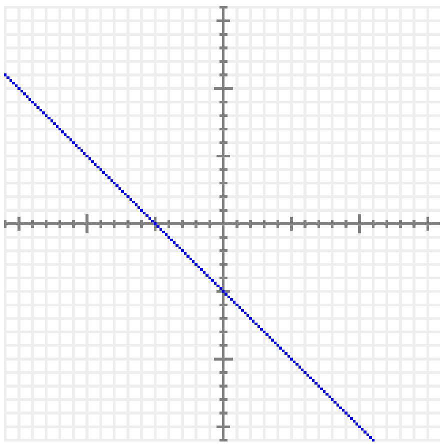
a) $y = -10^x$
b) $y = (0{,}5)^x$
c) $y = 5^x$



11. Dibuixa la gràfica de la funció:

$$y = \begin{cases} -x-5 & si\ \ x \le -1 \\ +4 & si\ \ x > -1 \end{cases}$$

12. La gràfica adjunta correspon a una funció y=f(x). Dibuixa la gràfica de la funció y=|f(x)|.



13. En una gasolinera el preu d'un litre de gasolina és de 1,04 €. Un dia decideixen apujar el preu un 1,66%. Uns dies després decideixen incrementar el preu un altre 3,18% sobre el preu anterior. Calcula el preu final i el percentatge d'augment sobre el preu inicial.

14. El preu de cert article en un centre comercial és de 601 €. En les rebaixes de gener decideixen aplicar-li un descompte del 13%. En arribar febrer, encara queden existències i decideixen aplicar-li un nou descompte del 11% sobre el preu que tenia al gener. Calcula el preu final i el percentatge de descompte sobre el preu inicial.

15. Si una companyia de telèfons cobra 12,14 € per parlar durant 2 minuts i 12,70 € per parlar durant 10 minuts, calcula la quota fixa mensual que cobra, així com el cost per minut. Troba també el cost d'una trucada de 22 minuts.

16. Una avioneta té combustible suficient per 4 hores, viatjant a una velocitat constant de 270 km/h. En enlairar-se, el pilot observa que hi ha vent a favor que permet volar a 318 km/h amb la mateixa despesa, però ha de tenir en compte que a la tornada només podrà anar a 222 km/h. Quina és la distància màxima que pot allunyar-se?

17. Calcula les dimensions del rectangle d'àrea màxima el perímetre del qual és igual a 436 metres.

18. Un mòbil recorre un trajecte de 265 km a velocitat constant. Escriu l'equació de la funció que relaciona la velocitat del mòbil en funció del temps emprat. Després calcula el temps invertit en recórrer el trajecte si la velocitat és de 50 km/h i la velocitat a la que es viatja, si el temps invertit és de 8 hores.

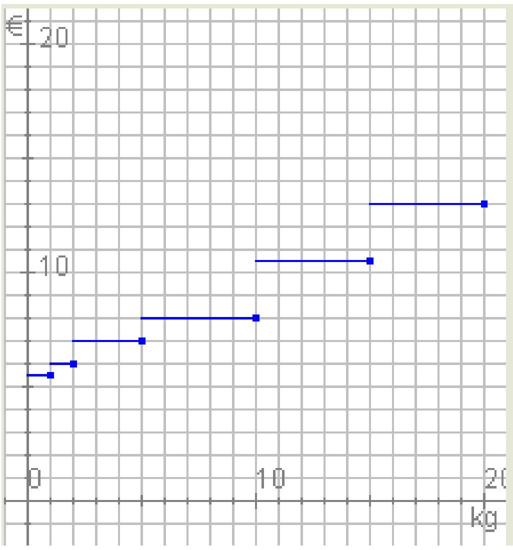
19. Una aixeta amb un cabal de 7 litres per minut triga 15 minuts en omplir un dipòsit. Troba l'equació de la funció que relaciona el temps que triga en omplir-se el dipòsit amb el cabal de l'aixeta. Dibuixa la seva gràfica i calcula el temps que trigaria en omplir-se si el cabal fos de 14 litres per minut.

20. L'IPC (Índex de Preus al Consum) és una mesura percentual de la variació mitjana dels preus d'un any a l'altre. Si l'IPC es manté constantment igual a 1,9% durant 5 anys, un producte que inicialment valia 655 €, quin preu tindrà al cap d'aquests anys?

21. Hem comprat un cotxe per 17782 €. Si el preu de venda en el mercat de segona mà es deprecia un 6% anual, calcula el valor del cotxe al cap de 4 anys?

22. Tenim un bloc de gel a –24ºC de temperatura. El posem a escalfar en un recipient i triga 11 minuts en aconseguir els 0ºC. Es manté 6 minuts a aquesta temperatura fins que se liqua totalment. Després triga 7 minuts a aconseguir l'ebullició a 100ºC i altres 10 minuts en evaporar-se completament, temps durant el qual es manté la temperatura constant a 100ºC. Troba l'equació que relaciona la temperatura de l'aigua en el recipient amb el temps transcorregut i dibuixa la seva gràfica. Després calcula quant es triga en aconseguir una temperatura de 25ºC i quina temperatura s'aconsegueix al cap de 25 minuts.

23. La gràfica adjunta descriu el cost d'enviar un paquet per correu en funció del pes d'aquest paquet. Escriu la funció corresponent a aquesta gràfica i esbrina el preu d'enviar un paquet de 17 kg.



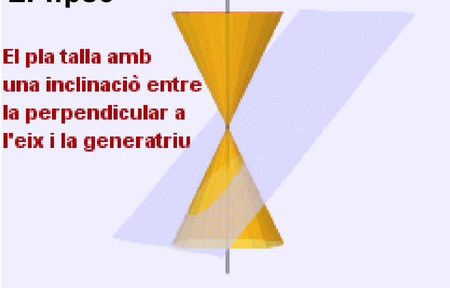
Per saber-ne més

Les còniques

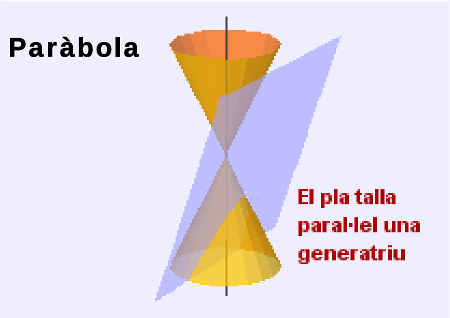
La hipèrbola i la paràbola pertanyen a la família de corbes anomenades **còniques**, a la qual també hi pertanyen l'el·lipse i la circumferència. Totes s'obtenen en tallar una superfície cònica amb un pla:

Circumferència

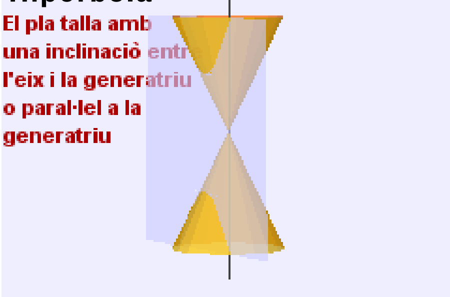
El·lipse



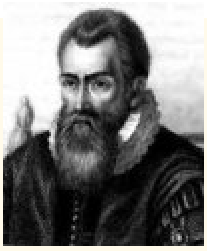
Paràbola



Hipèrbola



Logaritmes



El **logaritme** d'un nombre, y, en una certa base, b, és el nombre, x, al que cal elevar b per a obtenir y, és a dir:

$$\log_b y = x \text{ equival a } y = b^x$$

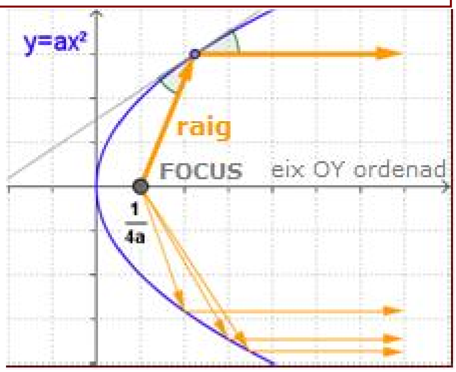
Informalment, diem que el logaritme és l'operació contrària de l'*exponenciació*. El càlcul amb logaritmes s'inicià de forma sistemàtica al segle XVII amb el matemàtic anglès John Napier (o Neper).

En la pàgina inicial se'ns preguntava quant es tardaria en arribar a una població d'un milió de microbis. Es tracta de resoldre l'equació:

$$3^x = 1.000.000$$

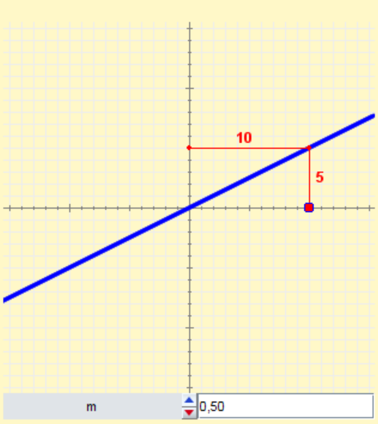
o el que és el mateix, ***calcular el logaritme en base 3 d'un milió***. Si utilitzes la calculadora has de trobar el logaritme d'un milió i dividir-lo pel logaritme de 3 i obtindràs un valor comprès entre 12 i 13 hores.

En les paràboles tots els rajos que surten del **focus** o incideixen en ell, són reflectits en la mateixa direcció. Per aquest fet, els fars dels cotxes o les antenes tenen forma parabòlica.



Recorda el més important

Funcions lineals



EQUACIÓ: y = m·x

y = 0,5· x

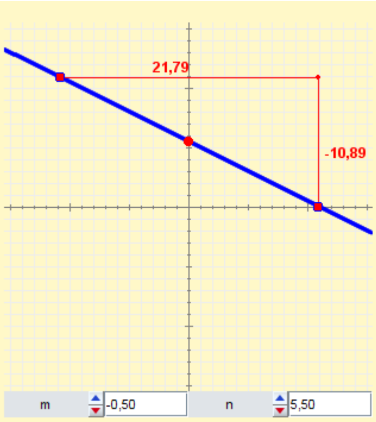
La seva gràfica és una recta que:

- Passa per l'origen
- Creix si m>0
- Decreix si m<0
- És horitzontal si m=0

m és el PENDENT i coincideix amb el quocient entre l'ordenada i l'abscissa de qualsevol punt de la recta.

Relaciona dues magnituds DIRECTAMENT PROPORCIONALS.

Funcions afins



EQUACIÓ: y = m·x + n

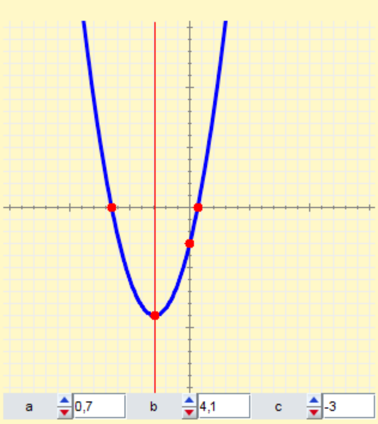
y = - 0,5· x + 5,5

La seva gràfica és una recta que:

- Passa per (0,n)
- Creix si m>0
- Decreix si m<0
- És horitzontal si m=0

m és el PENDENT i coincideix amb el quocient entre la diferència d'ordenades i la diferència d'abscisses entre dos punts qualssevol de la recta.

Funcions quadràtiques



EQUACIÓ: $y = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$

$y = 0{,}7\,x^2 + 4{,}1\,x - 3$

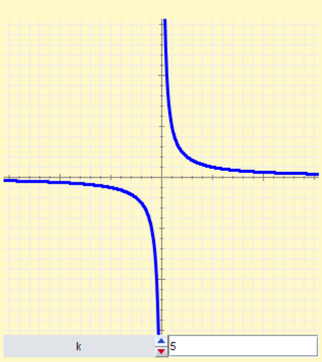
La gràfica és una **paràbola**:

- Passa per (0,c)
- Oberta cap amunt si a>0
- Oberta cap avall si a<0
- Més tancada com major és a en valor absolut.

Eix de simetria $x = -\frac{b}{2a}$

Els punts de tall amb l'eix X s'obtenen igualant l'equació a zero.

Funció de proporcionalitat inversa



EQUACIÓ:

$x \cdot y = k$ o bé $y = \frac{k}{x}$

$x \cdot y = 5$

La gràfica és una **hipèrbola**:

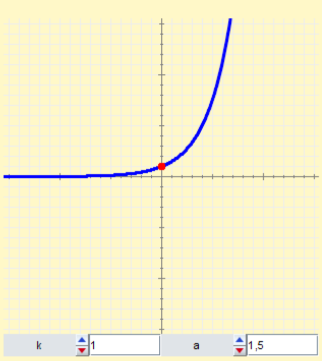
Les seves branques estan
- en els quadrants 1 i 3 si k>0
- en els quadrants 2 i 4 si k<0

Té dues **asímptotes.**

És simètrica respecte al punt de tall de les seves asímpotes.

És discontínua.

Funcions exponencials



EQUACIÓ: $y = k \cdot a^x$

$y = 1{,}5^x$

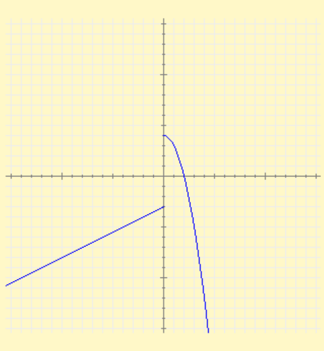
Només està definida per valors de a majors que zero i diferents d'u.
k ha de ser distinta de zero.

- Creixent si k>0 y a>1 ó k<0 y a<1.
- Decreixent si k<0 y a>1 ó k>0 y a<1.

Talla l'eix Y en (0,k)

Té una **asímptota.**

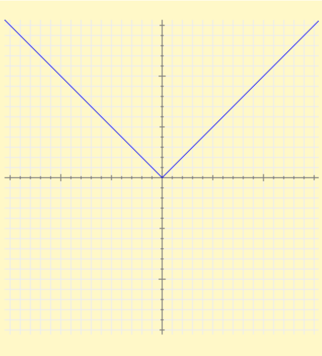
Funcions definides a trossos



Són funcions que estan definides per ecuacions distintes en diferents zones del seu domini.

S'usen per explicar les propietats de les funcions i per descriure situacions en què certa magnitud canvia bruscament la forma de comportar-se.

Funció valor absolut

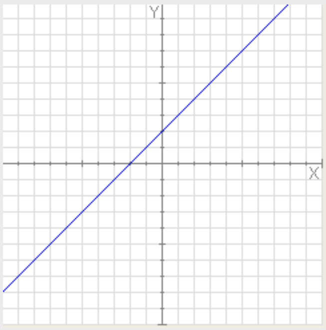


EQUACIÓ: y = |x|

$$y = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

És un exemple de funció definida a trossos.

Autoavaluació



1. Quin és el pendent de la recta de la imatge?

2. Calcula l'equació de la recta paral·lela a la recta $y=0{,}5x+2$ que passa pel punt (1,0)?

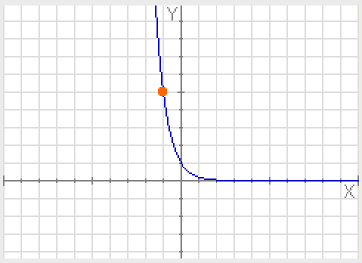
3. Quina és l'equació de la recta que passa pels punts A(1,0) i B(3,3)?

4. Calcula les coordenades del punt de tall de les rectes r: $y=2{,}5x+6{,}5$ i s: $y=-2x-7$

5. Calcula les coordenades del vèrtex de la paràbola $y = x^2 + 2x + 5$.

6. Calcula les coordenades dels punts en què la paràbola $y=-x^2+3x+4$ talla els eixos de coordenades.

7. Troba l'equació de la funció de proporcionalitat inversa la gràfica de la qual passa pel punt P(-3,2) i dibuixa la gràfica.



8. Troba l'equació de la funció exponencial de la figura amb ajuda del punt que està marcat.

9. Posem un capital de 100.000 € a un interès compost del 7%. A quant arribarà al cap de 13 anys? *(Arrodoneix a euros)*

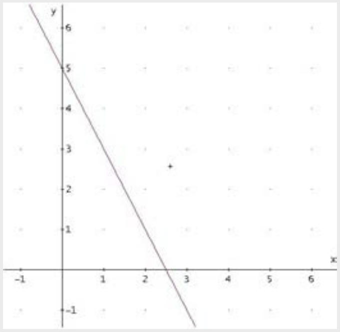
10. Calcula |f(2)| sabent que

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 & si\ x<3\\ 2x-1 & si\ x\geq 3\end{cases}$$

Solucions dels exercicis per practicar

1. $y=\frac{1}{2}x-3$

2.

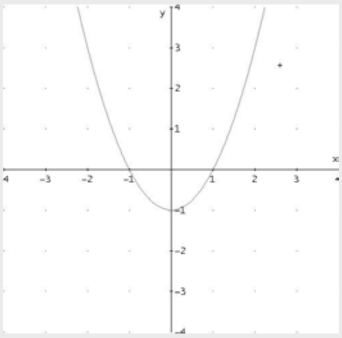


3. (-2,7)

4. y=4x+8

5. y= -3x+1

6.



7. a ---- blau
b ---- groc
c ---- vermell

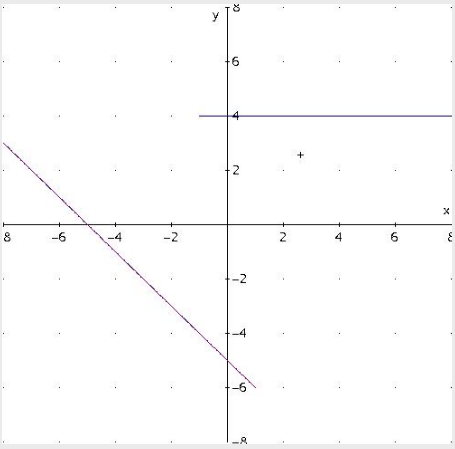
8. a ---- vermell
b ---- blau
c ---- groc

9. x·y = 80

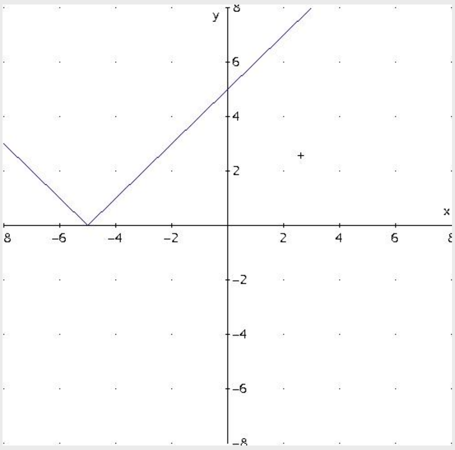
x	y
2	40
-0,25	-320
5	16
-8	-10
-10	-8
-20	-4

10. a ---- vermell
b ---- blau
c ---- groc

11.



12.



13. Preu final: 1,09€;
augment: 4,89%

14. Preu final: 465,35€;
descompte: 22,57%

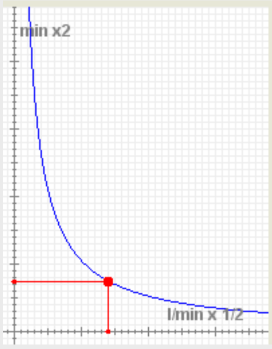
15. Quota fixa: 12€; minut: 0,07€;
22 minuts: 13,54€.

16. 522,93 km

17. b = h = 109 m

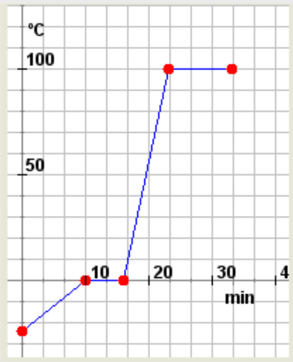
18. x·y=265; x=5,3 h; y=33,13 km/h

19. x·y=105; 7,5 minuts



20. 719,77 €

21. 3376,08 €



22.

(continuació)
Tarda 17,75 minuts en arribar a 25 ºC.
Als 25 minuts la temperatura és 100 ºC

$$y = \begin{cases} \frac{24}{10}x - 24 & si\ x \geq 0\ \ y\ \ x < 10 \\ 0 & si\ x \geq 10\ \ y\ \ x < 16 \\ \frac{100}{7}(x - 16) & si\ x \geq 16\ \ y\ \ x < 23 \\ 100 & si\ x \geq 23\ \ y\ \ x < 33 \end{cases}$$

23.

Es tracta d'una funció definida a trossos:

$$y = \begin{cases} 5{,}5 & si\ x \leq 1 \\ 6 & si\ x > 1\ \ i\ \ x \leq 2 \\ 7 & si\ x > 2\ \ i\ \ x \leq 5 \\ 8 & si\ x > 5\ \ i\ \ x \leq 10 \\ 10{,}5 & si\ x > 10\ \ i\ \ x \leq 15 \\ 13 & si\ x > 15\ \ i\ \ x \leq 20 \end{cases}$$

Enviar un pes de *17* kg costa *13,00 €* perquè aquest pes correspon a la zona *6*.

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. 1
2. y=0,5x-0,5
3. y=1,5x-1,5
4. (-3,-1)
5. (-1,4)
6. x1=-1; x2=4; y=4
7. x·y=-6
8. $y=(0{,}2)^x$
9. 240.985 €
10. 6