11 Funcions racionals, exponencials i logarítmiques

Continguts

Objectius

- Conèixer les característiques de la funció de proporcionalitat inversa i els fenòmens que descriuen.
- Trobar les asímptotes d'una hipèrbola.
- Reconèixer i representar funcions exponencials.
- Aplicar les funcions exponencials a l'interès compost i a altres situacions.
- Calcular el logaritme d'un nombre.
- Interpretar les gràfiques de les funcions logarítmiques.

Autor: Xosé Eixo Blanco
Versió en català: Zoila Pena i Terrén

Abans de començar

Investiga

Benjamin Franklin, famós científic i estadista, va deixar un llegat de 1000 lliures a les ciutats de Boston i Filadèlfia perquè es deixessin a joves aprenents al 5% anual.

Segons Franklin, al cap de 100 anys s'haurien convertit en 131 000 lliures, de les quals 100 000 serien per a obres públiques i les 31 000 restants es tornarien a utilitzar com a préstecs 100 anys més. Ho va calcular bé?

A l'escena pots veure la definició de Progressió Geomètrica i diversos exemples.

Clica el botó per aturar l'explicació.
Clica el botó per reprendre l'explicació.
Clica els botons per retrocedir / avançar més ràpidament.

EXERCICI 1: Completa el que falta en els següents requadres:

Una **progressió geomètrica** està constituïda per una __________________________ en què cada un s'obté ________________________ l'anterior per una constant denominada __________________________________.

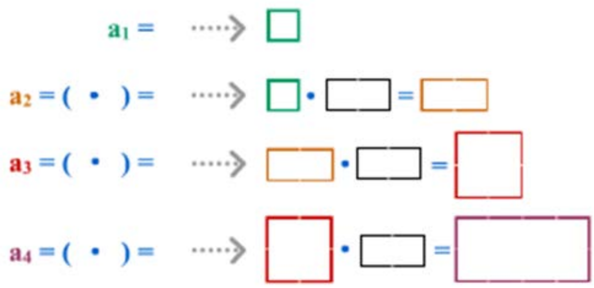
Exemple 1

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$
$a_2 = (a_1 \cdot \quad)$ $a_3 = (a_2 \cdot \quad)$

raó =

Exemple 2

raó =



Clica per anar a la pàgina següent.

1. Funcions racionals

1.a. Funció de proporcionalitat inversa

Llegeix l'explicació teòrica d'aquest apartat.

EXERCICI 1: Completa.

La **funció de proporcionalitat inversa** relaciona _________________________________ ___________________. L'expressió algebraica és:

$$y = \frac{\quad}{\quad}$$

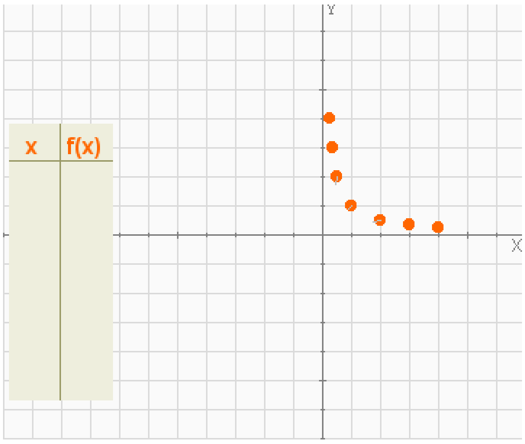
La seva gràfica és una ___________________.

EXERCICI 2: Completa.

- El **domini** i el **recorregut** són ____.
- És una funció _______: _______________________
- Si **k>0** la funció és _____________ i la gràfica apareix als quadrants_________.
- Si **k<0** la funció és _____________ i la gràfica és en _____________ quadrants.

A l'escena pots veure, en primer lloc, una animació en què es construeix la gràfica de la funció $f(x) = \frac{k}{x}$ per a $k = 1$.

Completa la taula de valors i el dibuix en aquest sistema de coordenades cartesians:

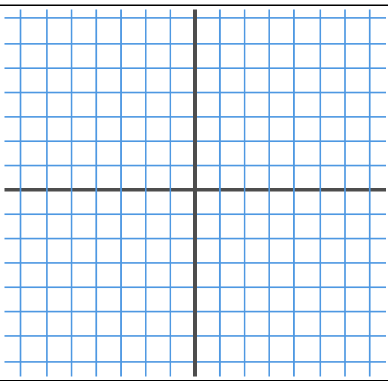


En finalitzar, pots variar el valor de k i observar les gràfiques corresponents.

Representa en els requadres següents les gràfiques que s'indiquen:

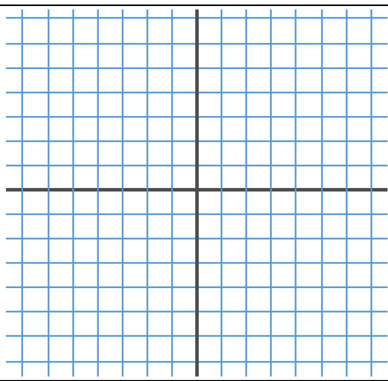
$f(x) = \frac{2}{x}$

x	f(x)



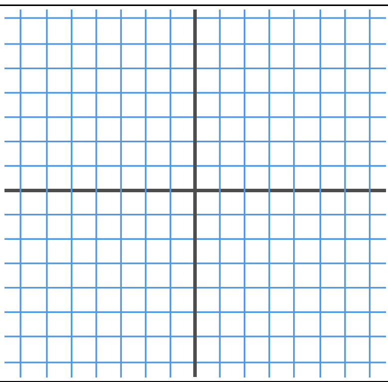
$f(x) = -\frac{1}{x}$

x	f(x)



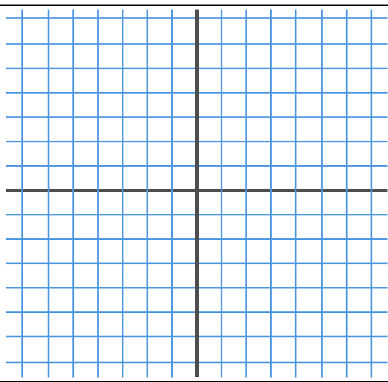
$f(x) = \frac{4}{x}$

x	f(x)



$f(x) = -\frac{4}{x}$

x	f(x)



Clica sobre el botó per fer exercicis. Apareix una escena en què es repassa el concepte de magnituds inversament proporcionals.

Respon:

Quan dues magnituds són inversament proporcionals, si agafem dues quantitats corresponents, què és el que es manté constant? ____________________________

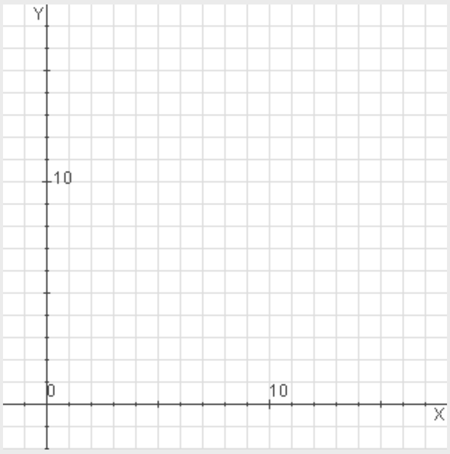
Clicant sobre els botons que apareixen en aquest quadre, pots accedir a tres exercicis diferents. Resol-los en els requadres següents i després clica sobre el botó “Comprovar”.

EXERCICIS

1. Observa la gràfica de la figura. Arrossega el punt taronja per veure com apareixen diferents rectangles.
(Dibuixa-la en els eixos de la dreta, fixant-te bé en l’equació i en els punts pels que passa).

Com és l’àrea de tots aquest rectangles?
____

Quant mesura? _____________



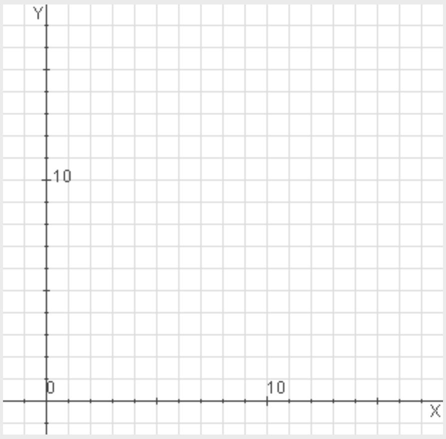
2. La taula correspon a quantitats inversament proporcionals. Completa-la i escriu l’expressió algebraica de la funció y = f(x).

y =

x	f(x)

3. Segons la Lley de Boyle-Mariotte, la pressió que exerceix un gas i el volum que ocupa són inversament proporcionals. A 25º una determinada quantitat de gas exerceix una pressió ____ atmosferes i ocupa un volum de ____ litres.
   a) Quin volum ocuparà quan la pressió exercida sigui d’1 atmosfera?
   b) Quina pressió exercirà quan el volum sigui de ___ litres?

Escriu la funció que relaciona:
pressió → volum
Dibuixa la seva gràfica →



Clica per anar a la pàgina següent.

1.b. Les asímptotes

Observa l'escena de la dreta i llegeix l'explicació teòrica d'aquest apartat.

EXERCICI 1: A l'escena de la dreta observa l'animació en la qual es veu com es comporten els valors de x i y en la gràfica de la funció f(x) = 1/x.

Respon:	RESPOSTES
Què passa amb els valors de y = f(x) a mesura que els valors de x es van aproximant a 0 per la dreta ($x \to 0^+$)?	
Què passa amb els valors de y = f(x) a mesura que els valors de x es van aproximant a 0 per l'esquerra ($x \to 0^-$)?	
Què passa amb els valors de y = f(x) a mesura que els valors de x van sent cada vegada més grans, és a dir, quan tendeixen a més infinit ($x \to +\infty$)?	
Què passa amb els valors de y = f(x) a mesura que els valors de x van sent cada vegada més petits, és a dir, quan tendeixen a menys infinit ($x \to -\infty$)?	

EXERCICI 2: Respon.	RESPOSTA
Quan diem que una recta és una asímptota d'una funció?	

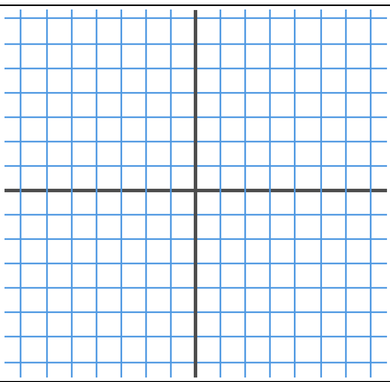
EXERCICI 3: Completa.

- **Asímptotes verticals**
  La recta **x=a** és una asímptota vertical de la funció y = f(x) si es verifica que ______
  ____.
- **Asímptotes horitzontals**
  La recta **y=b** és una asímptota horitzontal de la funció y = f(x) si es verifica que ____
  ____.

Representa en els requadres següents les gràfiques que s'indiquen:

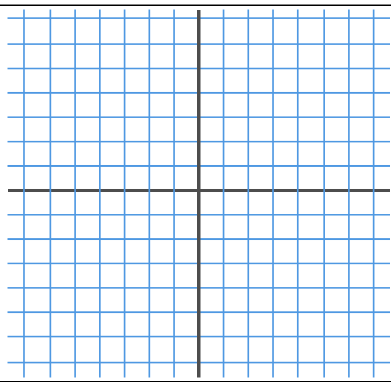
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

x	f(x)
3	
2,5	
2,1	
1	
1,5	
1,9	



$f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ Observa que x–(–3)=x+3 !

x	f(x)
-4	
-3.5	
-3.1	
-2	
-2.5	
-2.9	

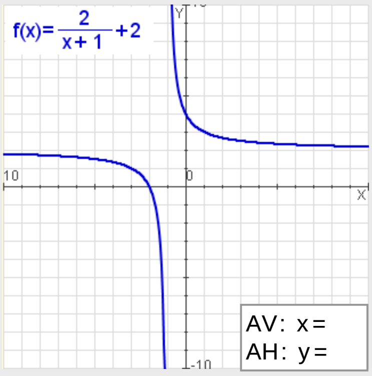


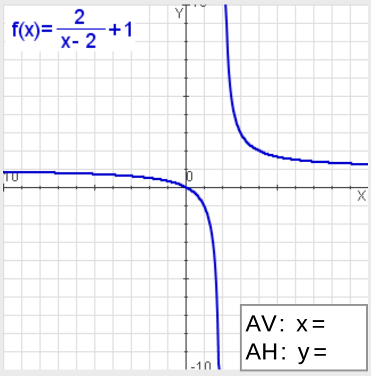
Clica sobre el botó per fer exercicis. A l'escena apareix una funció per calcular les asímptotes. Pots ajudar-te de les rectes verda i taronja per localitzar-les.
Completa la taula següent amb quatre de les funcions i les seves corresponents asímptotes:

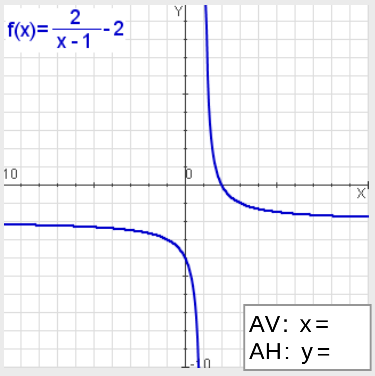
Funció	A.V.	A.H.	Funció	A.V.	A.H.
$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$			$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$		
$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$			$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$		

EXERCICIS

4. En les següents funcions, dibuixes les asímptotes i escriu la seva equació.







Clica per anar a la pàgina següent.

1.c. Altres funcions racionals

Observa l'escena de la dreta i llegeix l'explicació teòrica d'aquest apartat.

EJERCICIO 1: Completa.

Les **funcions racionals** són aquelles en què la seva expressió algebraica és ____________ __________________________.

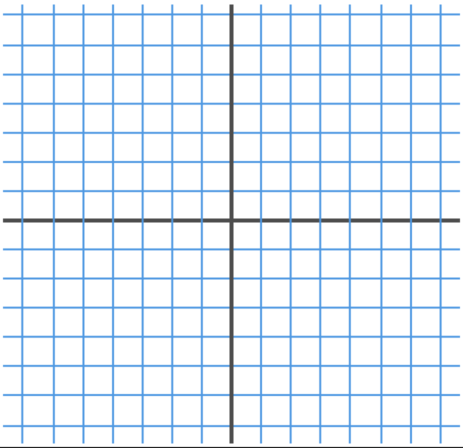
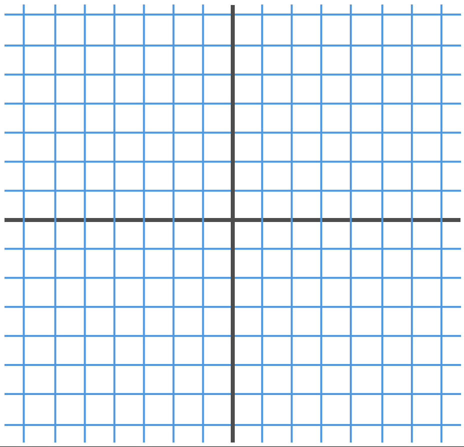
$$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$$

EJERCICIO 2: Completa.

- El seu **domini** són _______________________ excepte__________________________.
- Per calcular el punt de tall amb l'eix OY _____________________.
- Para calcular els punts de tall amb l'eix OX _____________________________________.

A l'escena pots veure com es calculen les asímptotes i els punts de tall en diversos exemples amb funcions que són quocient de dos polinomis de grau 1.

Completa en els següents requadres dos dels exemples que hi apareixen.

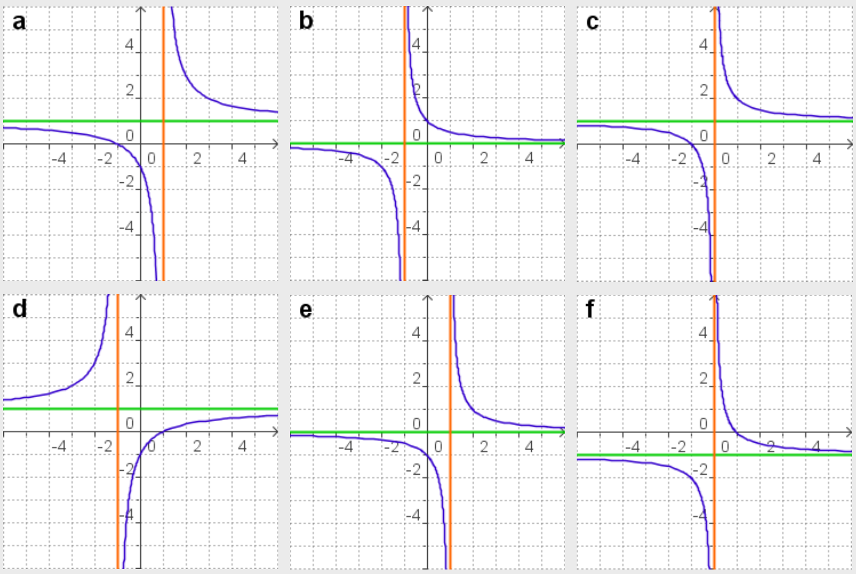
$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$	$f(x) = \frac{\quad}{\quad}$
Asímptota vertical: Operació per calcular l'asímptota horitzontal: Asímptota horitzontal:	Asímptota vertical: Operació per calcular l'asímptota horitzontal: Asímptota horitzontal:
<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table> 	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table> 

Clica sobre el botó per fer exercicis.

A l'escena apareixen cinc funcions i cinc gràfiques. Arrossega cada equació al lloc en què està la gràfica corresponent i clica **Comprovar** per veure si l'has fet bé.
Repeteix l'exercici un mínim de dues vegades sense errades.

EXERCICIS

5. Decideix quina gràfica correspon a cada funció:



1) $f(x) = \frac{1}{x-1} \rightarrow$

2) $f(x) = \frac{1}{x+1} \rightarrow$

3) $f(x) = \frac{x+1}{x} \rightarrow$

4) $f(x) = \frac{1-x}{x} \rightarrow$

5) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow$

6) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow$

Clica per anar a la pàgina següent.

2. Funcions exponencials

2.a. Característiques de la funció exponencial

Llegeix l'explicació teòrica d'aquest apartat, varia a l'escena el valor de "a" i clica "**animar**" per observar com es van obtenint els punts de la funció i la seva corresponent representació gràfica.

EXERCICI 1: Completa.

La **funció exponencial** és de la forma f(x) = amb **a** un nombre real **positiu**.

EXERCICI 2: Completa.

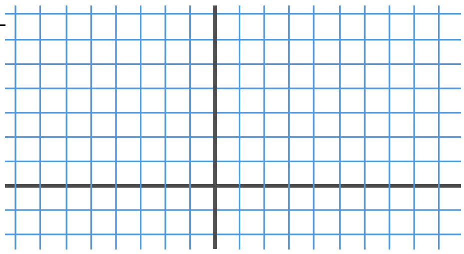
- El **domini** són ________________ i el **recorregut** són ______________________.
- Es **contínua** en ______________________.
- Si **a>1,** la funció és __________________________________.
- Si **0<a<1,** la funció és _____________________.
- Talla l'eix OY en el punt **(,).**
- L'eix OX és ______________________.

La funció es **injectiva**, és a dir, si $\mathbf{a^n = a^m}$ aleshores **n=m**

Representa en els següents requadres les gràfiques que s'indiquen:

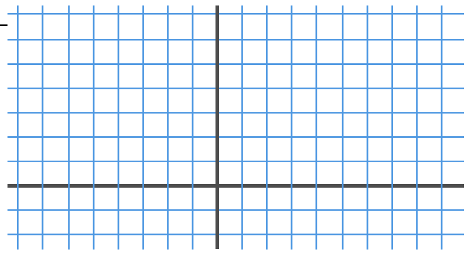
f(x) = $\mathbf{2^x}$

x	f(x)



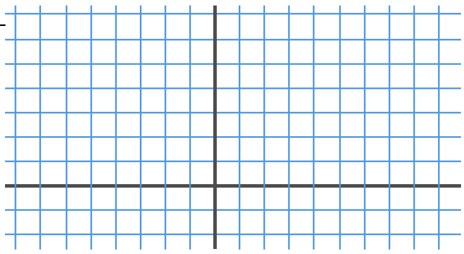
f(x) = $\mathbf{3^x}$

x	f(x)



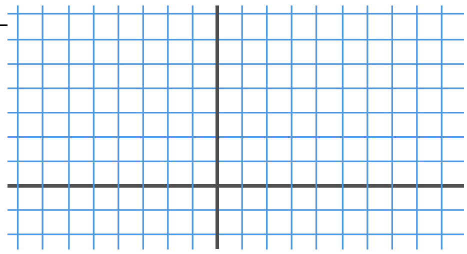
f(x) = $\mathbf{(0{,}5)^x}$

x	f(x)



f(x) = $\mathbf{(0{,}25)^x}$

x	f(x)



Clica sobre el botó per fer exercicis.

Apareix una escena en què veuràs altres funcions exponencials.
Per exemple, el cas en què multipliquem per un nombre “**k**” i el cas en què sumem una constant “**b**”. És a dir, veurem les funcions exponencials del tipus $\mathbf{f(x) = k \cdot a^x + b}$

Clicant sobre els botons que apareixen en aquest quadre, pots accedir a tres exercicis diferents. Resol-los en els següents requadres i després clica sobre el botó “Comprovar”.

1 Funcions exponencials de la forma:

$$\mathbf{f(x) = k \cdot a^x}$$

Exemples:

Amb base major que 1: $\mathbf{f(x)} = \quad \cdot \quad ^{x}$

Amb base positiva menor que 1: $\mathbf{f(x)} = \quad \cdot \quad ^{x}$

Punt de tall amb OY: (,)

2 Funcions exponencials de la forma:

$$\mathbf{f(x) = a^x + p}$$

Exemples:
Amb base major que 1

Amb p > 0 : $\mathbf{f(x)} = \quad ^{x} +$

Amb p < 0 : $\mathbf{f(x)} = \quad ^{x} -$

Punt de tall amb OY: (,)

Amb base positiva menor que 1

Amb p > 0 : $\mathbf{f(x)} = \quad ^{x} +$

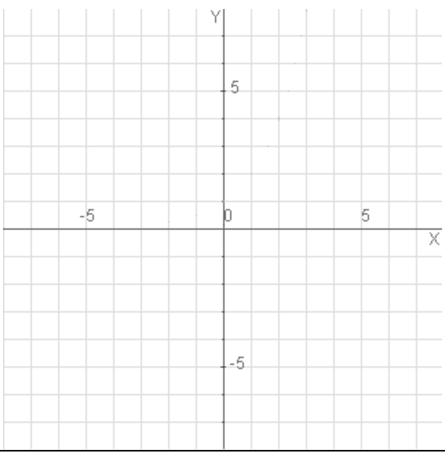
Amb p < 0 : $\mathbf{f(x)} = \quad ^{x} -$

Asímptota horitzontal: y =

3 Representa dues de les funcions que apareixen en aquest apartat, completant també la taula de valors:

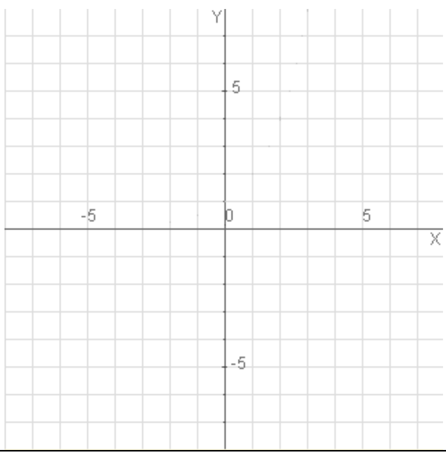
f(x) =

x	f(x)



f(x) =

x	f(x)



Clica per anar a la pàgina següent.

2.b. Creixement exponencial

Llegeix l'explicació teòrica d'aquest apartat.

La funció exponencial es presenta en multitud de fenòmens de creixement animal, vegetal, econòmic, etc. En tots aquests contextos la variable és el temps, $\mathbf{y = a^t}$.

EXERCICI 1: Completa.

En el creixement exponencial, cada valor de **y** s'obté __________________________
____.

y =

En què:

k és ____________________________

t és ____________________________

a és ____.

Si **0<a<1** es tracta d'un _________________________________

A l'escena apareix l'enunciat d'un problema. Observa que el creixement del cultiu bacterià (nombre de bacteris per unitat de temps) segueix un creixement o decreixement exponencial.

EXERCICI 2:

Varia el valor inicial "**k**" i el factor pel qual es multiplica "**a**" i observa les diferents

gràfiques que s'obtenen. **Respon**:	RESPOSTA
Per a quins valors de "**a**" hi ha un creixement exponencial?	
Per a quins valors de "**a**" hi ha un decreixement exponencial?	
Com és la funció per a = 1?	
Quin és el punt de tall amb l'eix OY?	

Clica sobre el botó per fer exercicis.

Apareix un resum en què pots veure les respostes a les preguntes anteriors.
Clicant sobre els botons que apareixen en aquest quadre, pots accedir a tres exercicis diferents. Resol-los en els següents requadres i després clica sobre el botó "Comprovar".

1 Escriu la taula d'una funció exponencial si per a x=___ la funció val ___ i la constant de creixement és ___.
Quina és la seva expressió algebraica?

x	y

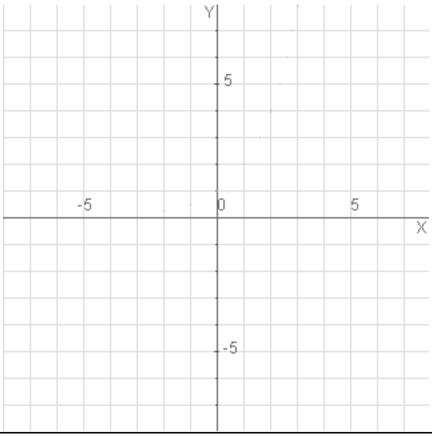
2. La taula següent correspon a valors d'una funció exponencial. Completa-la i escriu l'expressió algebraica de la funció y=f(x)?

x	**f(x)**

3. Representa dues de les funcions que apareixen en aquest apartat, completant també la taula de valors:

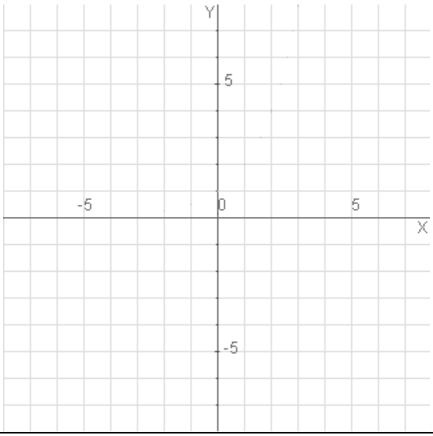
f(x) =

x	f(x)



f(x) =

x	f(x)



Clica per anar a la pàgina següent.

2.c. Aplicacions

Llegeix l'explicació teòrica d'aquest apartat.

EXERCICI 1: Respon.

Per a què serveix la **funció exponencial**?

EXERCICI 2:

Ara pots resoldre el problema del llegat de Franklin, plantejat en iniciar el tema. Clica sobre la imatge.

A l'escena de la dreta hi pots veure tres aplicacions: Interès compost. Creixement de poblacions. Desintegració radioactiva.

Clica sobre **Interès compost**

Llegeix l'explicació de l'escena i completa el que falta en el següent text:

Interès Compost

En l'interès compost, els interessos produïts per un capital C_0 ______________________ , de tant en tant, per produir interessos nous.
Els intervals de temps, al cap dels quals els interessos s'acumulen al capital, s'anomenen ____.

El Capital Final obtingut C_f por un capital inicial C_0 al cap de t anys a interès compost del r % anual, es determina per la fórmula:

$$\boxed{}$$

Si la capitalització no és anual, es canvia t per ___ , r per ____, en què n és el nombre de períodes que hi ha en un any.

Creixement Continu

Quan els períodes de temps es fan cada cop més petits, de manera que els interessos s'acumulen al capital en cada instant, s'obté la fórmula de l'interès continu:

$$\boxed{}$$

EXEMPLE Si col·loquem un capital de ____ € al ______ anual, a interès compost amb abonaments cada ___ mesos. a) Fes una taula del capital acumulat en els primers anys. b) Escriu l'expressió algebraica del capital acumulat, en funció dels anys transcorreguts. c) Quants diners tindrem al cap de ___ anys? d) Quants anys han de passar per tenir _____ €?	x | y	El rèdit per període és: Cada € es converteix per període en: Cada € se converteix per any en: b) y = c) y( ) = d) Continuem amb la taula Han de passar:

Clica "**< tornar**" per tornar al menú.

Clica sobre **Creixement de poblacions**

Llegeix l'explicació de l'escena i completa el que falta en el següent text:

Creixement de poblacions

El creixement vegetatiu d'una població ve donat per ____________________________________
____.
Si inicialment partim d'una població $\mathbf{P_0}$ que té un índex de creixement anual **i** (expressat en tant per u), la població, després d'un any, serà:

$\boxed{}$ I al cap de t anys serà $\boxed{}$

Creixement Continu

Si es considera el creixement continu: $\boxed{}$

<table>
<tr>
<td>

EXEMPLE
Un poble té ____ habitants. Se sap que la seva població creix a un ritme del ____ anual.

a) Fes una taula de valors que relacioni temps i població.
b) Escriu l'expressió algebraica de la funció temps→població.
c) Quants habitants tindrà dintre de ____ anys?
d) Quants anys han de passar perquè la població sigui, aproximadament, de ____ habitants?

</td>
<td>

x	y

b) y =
c) y( ) =
d) Continuem amb la taula

Han de passar:

</td>
</tr>
</table>

Clica "**< tornar**" per tornar al menú.

Clica sobre **Desintegració Radioactiva**

Llegeix l'explicació de l'escena i completa el que falta en el següent text:

Desintegració Radioactiva

Les substàncies radioactives es desintegren ____________________. La quantitat d'una certa substància radioactiva que va quedant en passar el temps t, ve donada per ____________ ,

en què M_0 és la quantitat de substància que hi havia a l'instant que prenguem com inicial i **a** una constant, 0 < **a** < 1, que depèn de la substància en qüestió i de la unitat de temps que agafem.

La rapidesa de desintegració de les substàncies radioactives es mesura pel _______________ ______________, que és ____.

<table>
<tr>
<td>

EXEMPLE
Un gram d'estronci-90 es redueix a la meitat en 28 anys. Si l'any 2000, hi havia ___ grams i prenem com origen de temps l'any 2000:

a) Fes una taula amb la quantitat d'estronci que quedarà els anys 2000, 2028, 2056, 2084.
b) Escriu l'expressió algebraica de la funció anys→massa.
c) Quant estronci quedarà l'any ________?
d) Quants anys han de passar per a què es redueixi a _____ g?

</td>
<td>

any	x	y

x = anys que han passat des de l'any 2000
y = quantitat de massa l'any x

b) y =
c) y( ) =
d) Continuem amb la taula a partir de x = ____

Han de passar:

</td>
</tr>
</table>

EXERCICIS

6. Representa i estudia les funcions:

a) $f(x)=4\cdot 2^{x}$

b) $f(x)=2\cdot 3^{-x}+1$

7. Construeix una taula de valors d'una funció exponencial en cada cas, i escriu l'expressió algebraica.

a) $f(-2)=2/9$ i constant de creixement 3

x	f(x)
-2	**2/9**
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $f(0)=3$ i constant de decreixement ¼

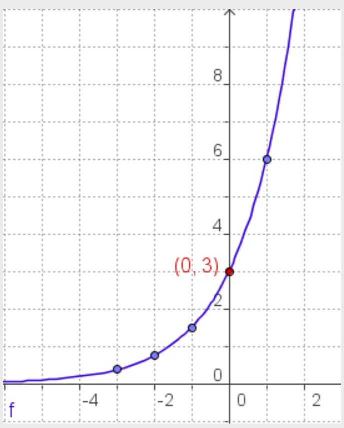
x	f(x)
-2	
-1	
0	**3**
1	
2	
3	

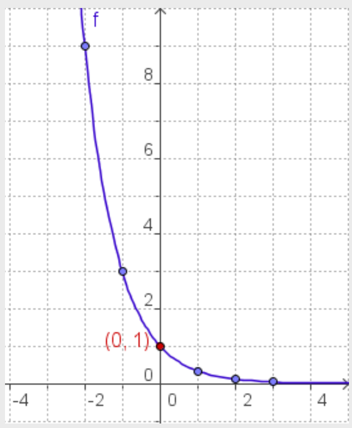
8. La taula correspon, en cada cas, a una funció exponencial. Escriu la fórmula.

x	f(x)
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27

x	f(x)
-2	25
-1	5
0	1
1	1/5
2	1/25
3	1/125

9. Indica si el gràfic correspon a una funció amb creixement exponencial o amb decreixement. Escriu la funció.





Clica per anar a la pàgina següent.

3. Funcions logarítmiques

3.a. Funció inversa de l'exponencial

Llegeix l'explicació teòrica d'aquest apartat.

EXERCICI 1: Completa.

Donada una funció *injectiva*, y=f(x), s'anomena ________________ de f a una altra funció, g, tal que g(y)=x.

A l'escena adjunta construïm, pas a pas, la inversa de la funció exponencial. Pots variar el valor de "a" i clicar "animar" per observar com apareixen les gràfiques de dues funcions: La funció exponencial y = f(x) = a^x i la seva inversa x = g(y).

EXERCICI 2: Completa.

Aquesta funció inversa s'anomena ________________ i, com pots observar, és ___________ de la _________________________ respecte a _________________________________.

A continuació, representa les gràfiques de les funcions que s'indiquen, escrivint en primer lloc la taula de valors:

F. exponencial: **f(x) = 2^x**
I la inversa: **x = g(y)**

x	f(x)	g(y)

Clica per anar a la pàgina següent.

3.b. La funció logarítmica

Llegeix l'explicació teòrica d'aquest apartat.

EJERCICIO 1: Completa.

La **funció logarítmica** és ____ i es denota:

y = , amb a>0 i a≠1.

Observa a l'escena de la dreta com construïm la gràfica de manera similar a com ho vam fer amb l'exponencial. Les seves propietats són "*simètriques*".

EJERCICIO 2: Completa.

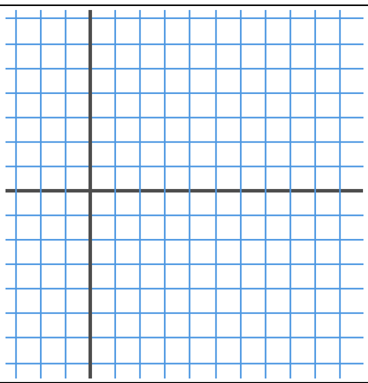
- El **domini** és _______ i el **recorregut** és _____.
- Es **contínua** en ________________________.
- Si **a>1** la funció és ____________________________________.
- Si **0<a<1** la funció és ______________________.
- Talla l'eix OX en el punt **(,).**
- L'eix OY és _______________________.

La funció és injectiva: si $\log_a x = \log_a y$ aleshores $x=y$

Representa en els següents requadres les gràfiques que s'indiquen:

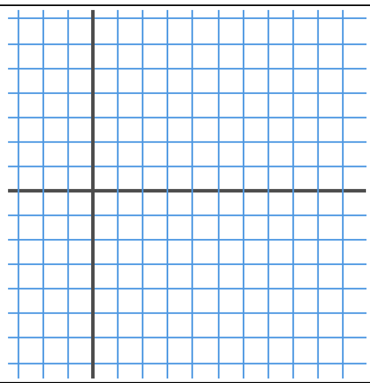
$f(x) = \log_2 x$

x	f(x)



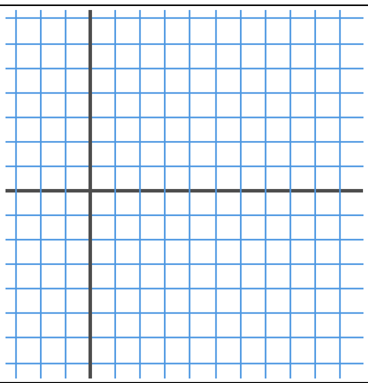
$f(x) = \log_{0,5} x$

x	f(x)



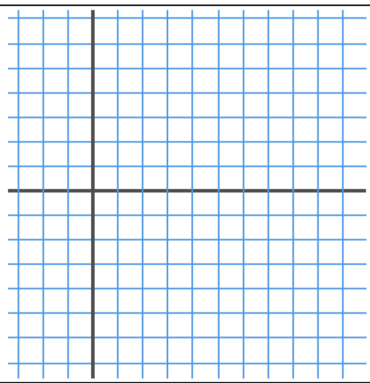
$f(x) = \log_{10} x$

x	f(x)



$f(x) = \log_{0,1} x$

x	f(x)



Clica sobre el botó per fer exercicis.

Apareix una escena en què veuràs altres funcions logarítmiques. Per exemple, el cas en què multipliquem per un nombre "**k**" i el cas en què sumem una constant "**p**". És a dir, veurem les funcions logarítmiques del tipus: $f(x) = k \cdot \log_a x$ i $f(x) = \log_a x + p$

Clicant sobre els botons que apareixen en aquest quadre, pots accedir a tres activitats diferents. Resol-les en els següents requadres i després clica el botó “Comprovar”.

1 Funcions logarítmiques de la forma: $f(x) = k \cdot \log_a x$

Varia els valors de “a” i de “k” i indica si la funció és creixent o decreixent.

Amb base **a > 1**
Si $k>0$ ____________________ Si $k<0$ ________________________

Amb base $0<a<1$ (Has de tenir present que $\log_{1/a} x = -\log_a x$)
Si $k>0$ ____________________ Si $k<0$ ________________________

2 Funcions logarítmiques de la forma: $f(x) = \log_a x + p$

Varia els valors de “a” i de “k” i indica si la funció és creixent o decreixent.

Amb base **a > 1**
Si $p>0$ ____________________ Si $p<0$ ________________________

Amb base $0<a<1$
Si $p>0$ ____________________ Si $p<0$ ________________________

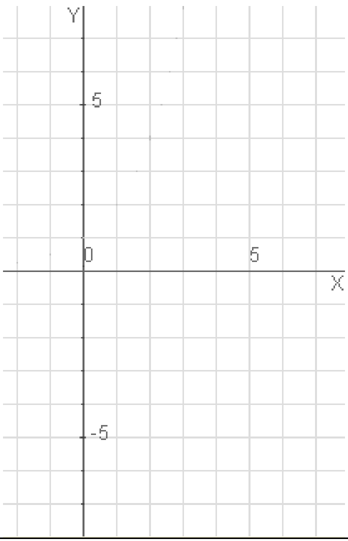
Observem que:
En variar p, la funció es trasllada sobre l’eix OY.
Si $p>0$ Cap a ________ i si $p<0$ cap a _______

Quin és el punt de tall de la funció $f(x) = \log_a x + p$ amb l’eix OX? (,)

3 Representa dues de les funcions que apareixen en quest apartat, completant també la taula de valors:

f(x) =

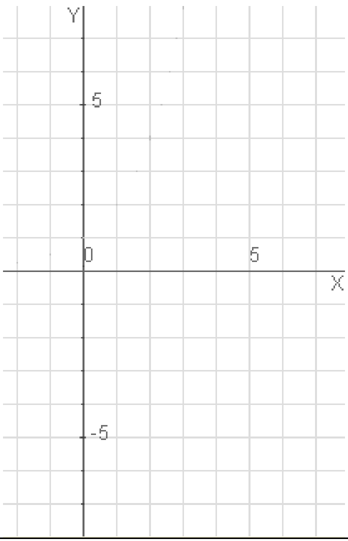
x	f(x)



Domini:
Recorregut:
Asímptota:
Tall OX:

f(x) =

x	f(x)



Domini:
Recorregut:
Asímptota:
Tall OX:

Clica ▶ per anar a la pàgina següent.

3.c. Logaritmes

Llegeix l'explicació teòrica d'aquest apartat.

EXERCICI 1: Completa.

Donats dos nombres reals positius, a i b (a $\neq$ 1), anomenem **logaritme en base a de b** ____.

EXERCICI 2: Completa.

La definició anterior indica que les dues igualtats següents són equivalents:

	Equival a	

Quan **a=10** parlem de ____________________________ i no s'escriu la base.

log100=	perquè	

En l'escena de la dreta pots veure exemples i pots comprendre millor el concepte de logaritme. A continuació podràs veure les propietats dels logaritmes i les seves corresponents demostracions.
Anota els exemples i les propietats en els espais següents:

Logaritmes de base major que 1

Exemple 1:		perquè	
Exemple 2:		perquè	

Logaritmes de base positiva menor que 1

Exemple 1:		perquè	
Exemple 2:		perquè	

Propietats dels logaritmes

1) Logaritme d'un producte

Si **b** i **c** són dos nombres reals positius, s'acompleix en qualsevol base **a** que:

Demostració

Si anomenem **z** al primer logaritme, **x** al segon i **y** al tercer, tenim:

Per tant:

2) Logaritme d'un quocient

Si **b** i **c** són dos nombres reals positius, s'acompleix en qualsevol base **a** que:

Demostració

Si anomenem **z** al primer logaritme, **x** al segon i **y** al tercer, tenim:

Per tant:

3) Logaritme d'una potència

Si **b** és un nombre real positiu i **c** qualsevol nombre, s'acompleix en qualsevol base **a** que:

Demostració

Si anomenem **z** al primer logaritme i **x** al segon, tenim:

Per tant:

4) Logaritme de la unitat i logaritme de la base

El logaritme d'1 en qualsevol base és ___.
El logaritme de a en base a és ___.

	perquè	
	perquè	

Logaritmes decimals

(I) Són els més utilitzats i per aquest motiu no s'acostuma a escriure la base. És a dir, log 3 = $\log_{10}3$

Exemple 1:	
Exemple 2:	
Exemple 3:	
Exemple 4:	

(II) Per calcular el logaritme decimal d'un nombre que no sigui potència de 10 hem d'utilitzar la calculadora. Però podem fer-nos una idea del seu valor aproximat tenint en compte que la funció logarítmica de base major que 1 es creixent.

Exemple 1:	1 < < 10 →	Perquè log =
Exemple 2:	10 < < 100 →	Perquè log =
Exemple 3:	100 < < 1000 →	Perquè log =

El logaritme d'un nombre "n" és ____.

El logaritme ens informa _________________________________.

(III) Si el nombre és menor que 1 el logaritme també ens informa de la seva magnitud:

Exemple 1:	1 > > 0,1 →	Perquè log =
Exemple 2:	0,1 > > 0,01 →	Perquè log =
Exemple 3:	0,01 > > 0,001 →	Perquè log =

El logaritme d'un nombre "n" indica ____.

Logaritmes amb la calculadora

Les calculadores normalment permeten calcular dos tipus de logaritmes: Decimals (base = 10) i neperians o naturals (base = nombre e).
Si volem utilitzar la calculadora per obtenir logaritmes en qualsevol altra base haurem de recórrer a la **fórmula de canvi de base**:

Clica sobre el botó per fer exercicis.

Clicant sobre els botons que apareixen en aquest quadre pots accedir a tres exercicis diferents. Resol-los en els següents requadres i després clica sobre el botó "Comprovar".

1. Escriu un mínim de cinc enunciats i resol-los sense calculadora abans de clicar sobre "Comprovar"

Exercici 1:	
Exercici 2:	
Exercici 3:	
Exercici 4:	
Exercici 5:	

2. Sabent que el log 2 = 0,301030, calcula sense calculadora el valor de:

   log 1,6 =

   log 0,125 =

   log 40 =

3 Escriu un mínim de cinc enunciats i resol-los amb la calculadora:

Exercici 1:	
Exercici 2:	
Exercici 3:	
Exercici 4:	
Exercici 5:	

EXERCICIS

10. Representa i estudia les funcions

a) $f(x)=2\cdot\log_3 x$

b) $f(x)=\log_3 x+1$

11. Calcula x en cada cas, aplicant la definició de logaritme:

a) $\log_6 (1/6) = x$

b) $\log_4 2 = x$

c) $\log_5 125 = x$

d) $\log_{1/8} 1 = x$

e) $\log_3 81 = x$

f) $\log_{1/5} 25 = x$

g) $\log_3 (1/9) = x$

h) $\log_{1/2} (1/16) = x$

12. Sabent que log2=0,301030 calcula sense ajuda de la calculadora:

a) log40

b) log1,6

c) log 0,125

13. Amb la calculadora, esbrina els logaritmes següents:

a) $\log_2 23{,}721$

b) $\log_3 25678{,}34561$

c) $\log_5 0{,}37906$

d) $\log_7 0{,}37906$

Clica per anar a la pàgina següent.

Recorda el més important – RESUM

(*Completa el que falta en la descripció de les diferents funcions*)

Funcions racionals

Són aquelles que la seva expressió algebraica és el quocient entre dos polinomis.

- Una **funció de proporcionalitat inversa**, **y=k/x**, relaciona dues variables. ______________________ ______________________.
  - o La gràfica és una ______________
  - o És discontínua en ___________
  - o Decreixent si _________
  - o Creixent si ______.
- Quan la gràfica d'una funció s'apropa cada cop més a una recta, gairebé confonent-se amb ella, es diu que la recta és una _____________.

Quina funció s'obté si es trasllada el centre de la hipèrbola $y=\frac{3}{x}$ al punt (–3,–2)?

$$y=\frac{3}{x\quad} \qquad = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Funcions exponencials

Són de la forma $\mathbf{y=a^x}$, amb a>0.

- El seu domini és _____.
- És _______________.
- És creixent si _______________
- És decreixent si _______________
- Tall l'eix OY en (,) i passa per (,)
- L'eix OX és __________________________.

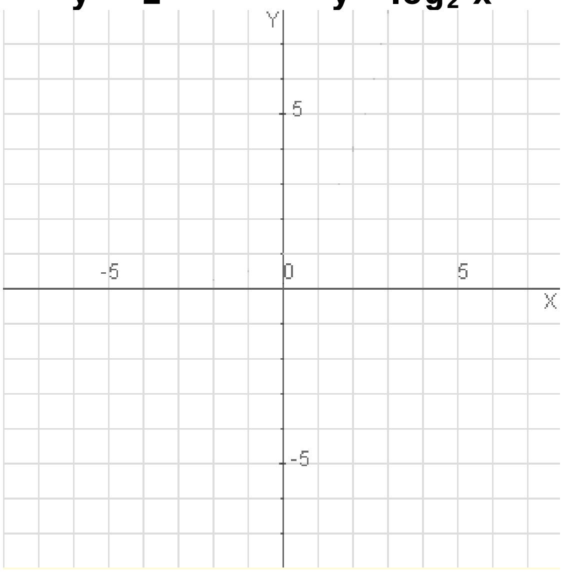
Funcions logarítmiques

Són les que associen a cada nombre x el seu logaritme en una certa base, a>0, $\mathbf{y=\log_a x}$.

- El seu domini són________________________
- És _______________
- És creixent si _________
- És decreixent si ____________.
- Tall l'eix OX en (,) i passa per (,)
- L'eix OY és________________________.

Fes la gràfica de les funcions:

$\mathbf{y = 2^x}$ $\qquad$ $\mathbf{y= \log_2 x}$



LOGARITMES

El **logaritme** en base **a>0** d'un nombre **b>0** és l'exponent **x**, al qual s'ha d'elevar a per obtenir b.

$\mathbf{\log_a b=x}$ és equivalent a ________

PROPIETATS

1. $\log_a(b\cdot c) =$ ________________
2. $\log_a(b/c) =$ ________________
3. $\log_a b^n =$ ________________

Clica per anar a la pàgina següent.

Per practicar

Ara practicaràs resolent diferents EXERCICIS. En les següents pàgines trobaràs EXERCICIS de:

Funcions racionals
Funcions exponencials
Funcions logarítmiques

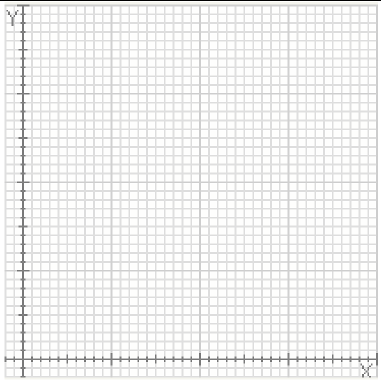
Completa l'enunciat amb les dades amb les que apareix cada EXERCICI a la pantalla i després el resols. És important que primer el resolguis tu i després comprovis amb l'ordinador si l'has fet bé.

Funcions racionals

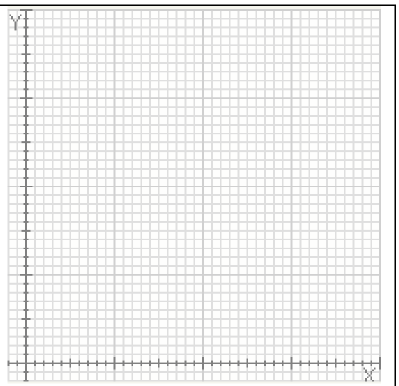
Proporcionalitat inversa (Hi ha tres exercicis diferents)

1. Envasem ___ litres d'aigua mineral en ampolles iguals.

Escriu la funció que relaciona el nombre d'ampolles i la seva capacitat. Dibuixa la gràfica.

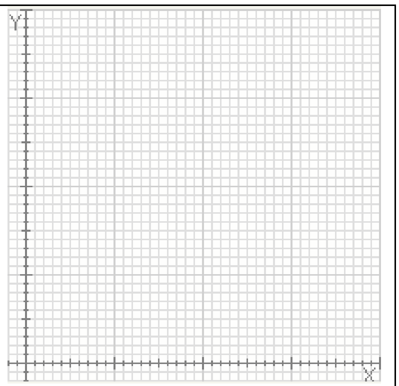


2. Un mòbil recorre una distància de ______ amb velocitat constant. Escriu la funció velocitat→temps, calcula el temps invertit a una velocitat de ____ km/h, i la velocitat si el temps ha estat ___ hores.



3. Una aixeta amb un cabal de ___ litres/min, triga _____ minuts en omplir un dipòsit. Quant trigaria si el cabal fos de ___ litres/min?

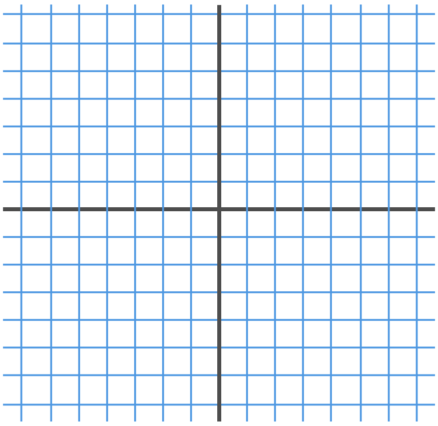
Escriu la funció cabal→temps.

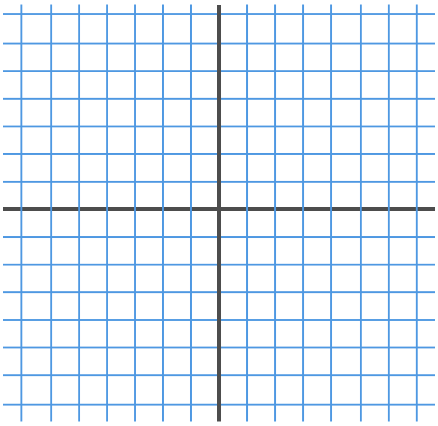


Dibuixa la gràfica

4. Calcula les asímptotes i dibuixa la gràfica de les funcions:

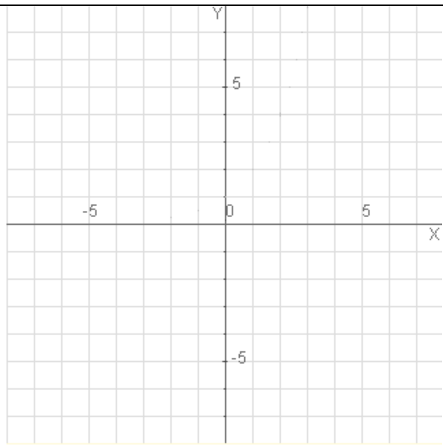
a) f(x) = ———— b) f(x) = ————





Escriu l'equació

5. Escriu l'equació de la funció la gràfica de la qual és una hipèrbola com la de la figura, amb el centre de simetria desplaçat al punt (,)



Cost per unitat

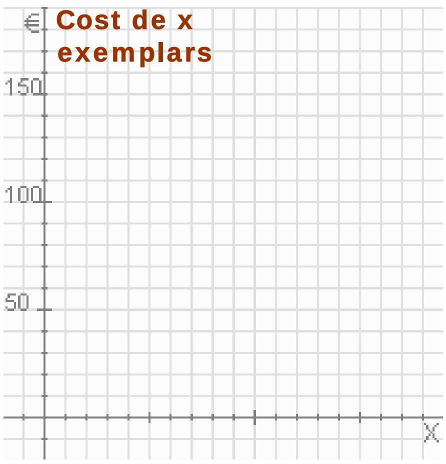
6. Els costos d'edició, en euros, de x exemplars d'un llibre venen donats per y=________ (x>0).

Quant costa editar _____ exemplars?

I ____ exemplars?

Escriu la funció que proporciona el cost per exemplar.

Per molts exemplars que es publiquin, quin és el cost unitari com a mínim?



Clica per anar a la pàgina següent.

Funcions exponencials

Interès compost (Hi ha cinc exercicis diferents)

7. En què es converteix al cap de ___ anys un capital de __________ al ______ anual?

8. Un capital col·locat a interès compost al ___ anual, s'ha convertit en __ anys en ______. Quin era el capital inicial?

9. Un capital de __________ col·locat a interès compost s'ha convertit al cap de __ anys en ___________. Quin es el rèdit (interès anual) a què ha estat col·locat?

10. Un capital de _________, col·locat a interès compost del ____ anual, s'ha convertit al cap d'uns anys en ________. Quants anys han transcorregut?

11. Quants anys ha d'estar col·locat un cert capital, al ____ anual per a què es dupliqui?

Decaïment Radioactiu (Hi ha tres exercicis diferents)

12. El període de desintegració del Carboni 14 és 5370 anys. En quina quantitat es converteixen ___ al cap de _____ anys?

13. Quants anys han de passar per a què una mostra de ____ de C14 es converteixi en ____?

(Període de desintegració del C14: 5370 anys).

14. Una mostra de _____ d'una substància radioactiva es converteix en ______ en __ anys. Quin és el període de desintegració?

Creixement de poblacions (Hi ha dos exercicis diferents)

15. La grandària d'un cert cultiu de bacteris es multiplica per _ cada __ minuts. Si suposem que el cultiu té inicialment ___ milions de bacteris, quantes hores trigarà en tenir ___ milions de bacteris?

16. La grandària d'un cert cultiu de bacteris es multiplica per _ cada __ minuts. Si al cap de __ hores el cultiu té ____ milions de bacteris, quants n'hi havia a l'instant inicial?

Equacions exponencials

Quan la x està a l'exponent

Exemple 1	**Exemple 2**
Resol l'equació: $25^{2x-3}=125$	Calcula x en $3^x=14$
$25=5^2$ y $125=5^3$, aleshores $5^{2(2x-3)}=5^3$ igualant els exponents $2(2x-3)=3 \Rightarrow x=9/4$	Prenent logaritmes: $\log 3^x=\log 14$ $x \log 3=\log 14$, per tant, $x=\dfrac{\log 14}{\log 3}=2{,}40$

17. Resol equacions exponencials (escriu tres enunciats diferents que apareixen al teu ordinador i resol-los abans de comprovar la solució):

a)

b)

c)

Clica per anar a la pàgina següent.

Funcions logarítmiques

Definició de logaritme (Hi ha tres xercicis diferents)

18. Calcula el nombre el logaritme del qual en base ___ és ___.

19. En quina base el logaritme de 0,001 és -3?

20. Calcula mentalment el logaritme en base 2 de 32.

Logaritmes decimals

21. Sabent que el log2=0,3010 i el log3=0,4771, calcula: (fes-ne al menys tres diferents)

a)

b)

c)

Logaritmes amb calculadora

22. Utilitza la calculadora per esbrinar el valor de: (fes-ne al menys tres diferents)

a) Logaritme en base __ de __________

b) Logaritme en base __ de __________

c) Logaritme en base __ de __________

Equacions amb logaritmes

Exemple

Resol l'equació: $4 \cdot \log x = 2 \cdot \log x + \log 4 + 2$

$4 \cdot \log x - 2 \cdot \log x = \log 4 + \log 100$	$\log x^2 = \log 400$
$2 \cdot \log x = \log 400$	$x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm 20$

23. Aplicant les propietats dels logaritmes resol les equacions (escriu quatre enunciats diferents que apareguin al teu ordinador, dos d'equacions amb una incògnita i altres dos de sistemes de dues equacions):

a)

b)

c)

d)

Clica per anar a la pàgina següent.

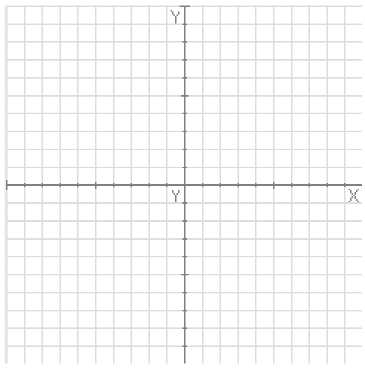
Autoavaluació

Completa aquí cada un dels enunciats que van apareixent a l'ordinador i resol-los. Després introdueix el resultat per comprovar si la solució és correcta.

1. Quina és la funció de proporcionalitat inversa que a x = ____ li fa correspondre y = ___?

f(x)= $\dfrac{\square}{x}$

2. Escriu l'expressió algebraica de la funció de la gràfica.



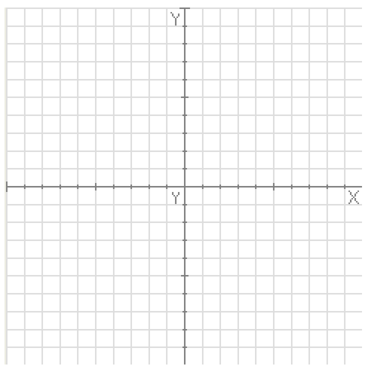
f(x)= $\dfrac{\square}{x}$

3. Calcula les asímptotes de la funció f(x) = ——— .

vertical: x =

horizontal: y =

4. Escriu l'expressió algebraica de la funció exponencial de la gràfica

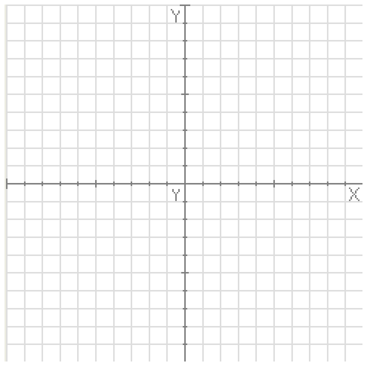


y= $\square^{x}$

5. Calcula en quin capital es converteix un capital de ______ € col·locat al ___ anual durant __ anys.

6 La població d'una espècie en extinció es redueix a la meitat cada any. Si al cap de __ anys queden ____ exemplars, quina era la població inicial?

7 Escriu l'expressió de la funció logarítmica que és la inversa de l'exponencial de la gràfica.



f(x)=log$_{\square}$ x

8 Calcula log

9 Sabent que log __ = _______ i sense utilitzar la calculadora, calcula log ________

10 Amb la calculadora, troba el valor de x en

____

Arrodoneix el resultat a les centèsimes.

Per practicar més

1. Envasem 276 litres d'aigua en ampolles iguals. Escriu la funció que relaciona el nombre d'ampolles i la seva capacitat.

2. Un mòbil recorre una distància de 130 km amb velocitat constant. Escriu la funció velocitat→temps, calcula el temps invertit a una velocitat de 50 km/h, i la velocitat si el temps ha estat 5 hores.

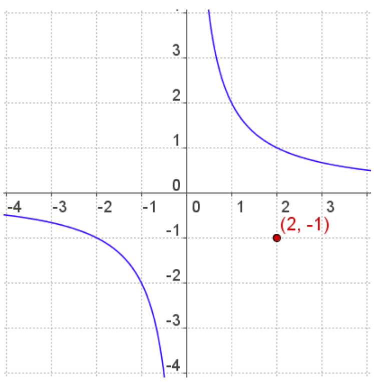
3. Una aixeta amb un cabal de 8 litres/min triga 42 minuts en omplir un dipòsit. Quant trigaria si el cabal fos de 24 litres/min? Escriu la funció cabal→temps.

4. Calcula les asímptotes de les funcions següents:

a) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$

c) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ d) $f(x)=\dfrac{-x}{x+2}$

5. Escriu l'equació de la funció que té per gràfica una hipèrbola com la de la figura amb el centre de simetria desplaçat al punt (2,-1).



6. Els costos d'edició, en euros, de x exemplars d'un llibre venen donats per y=21x+24 (x>0). Quant costa editar 8 exemplars? I 80 exemplars? Escriu la funció que proporciona el cost per exemplar. Per molts exemplars que es publiquin, quin és el cost unitari com a mínim?

7. En què es converteix al cap de 15 anys un capital de 23000€ al 5,5% anual?

8. Un capital col·locat a interès compost al 2% anual, s'ha convertit en 3 anys en 9550,87€. Quin era el capital inicial?

9. Un capital de 29000€ col·locat a interès compost s'ha convertit al cap de 4 anys en 31390,53 €. Quin és el rèdit (interès anual) a què ha estat col·locat?

10. Un capital de 7000€, col·locat a interès compost del 2% anual, s'ha convertit al cap d'uns anys en 8201,61€. Quants anys han transcorregut?

11. Quants anys ha d'estar col·locat un cert capital, al 3% anual, per a què es dupliqui?

12. El període de desintegració del Carboni 14 és de 5370 anys. En quina quantitat es converteixen 10 g al cap de 1000 anys?

13. Quants anys han de passar per a què una mostra de 30 g de C14 es converteixi en 20,86 g? *(Període de desintegració del C14 5370 anys).*

14. Una mostra de 60 g d'una substància radioactiva es converteix en 35,67 g en 30 anys. Quin és el període de desintegració?

15. La grandària d'un cert cultiu de bacteris es multiplica per 2 cada 30 minuts. Si suposem que el cultiu té inicialment 5 milions de bacteris, quantes hores trigarà a tenir 320 milions de bacteris?

16. La grandària d'un cert cultiu de bacteris es multiplica per 2 cada 20 minuts. Si al cap de 3 hores el cultiu té 576 milions de bacteris, quants n'hi havia a l'instant inicial?

17. Calcula el nombre:

a) el logaritme del qual en base 6 és 3.

b) el logaritme del qual en base 4 és -3.

c) el logaritme del qual en base 10 és 2.

d) el logaritme del qual en base 1/2 és -3.

e) el logaritme del qual en base 1/5 és 2.

18. En quina base?

a) el logaritme de 0,001 és -3.

b) el logaritme de 243 és 3.

c) el logaritme de 8 és 1.

d) el logaritme de 1/81 és -4.

e) el logaritme de 49 és 2.

19. Calcula mentalment:

a) el logaritme en base 2 de 32.

b) el logaritme en base 5 de 125.

c) el logaritme en base 3 de 1/9.

d) el logaritme en base 7 de 1.

e) el logaritme en base 6 de 216.

20. Sabent que el log2=0,3010 i el log3=0,4771, calcula:

a) log 16

b) log 512

c) log(16/81)

d) log 24

e) log 72

21. Utilitza la calculadora per esbrinar el valor de:

a) $\log_7 12456{,}789$

b) $\log_5 5123{,}4345$

c) $\log_9 47658{,}897$

d) $\log_3 23{,}146$

e) $\log_6 1235{,}098$

22. Resol les equacions exponencials:

a) $32^{-9x+9}=16$

b) $27^{2x+3}=9^3$

c) $4^{-3x+8}=8$

d) $9^{8x-7}=1$

e) $25^{-5x-5}=1$

23. Calcula el valor de x:

a) $7^x=5$

b) $5^x=7$

c) $2{,}13^x=4{,}5$

24. Aplicant les propietats dels logaritmes resol les equacions:

a) $\log(32+x^2) - 2\cdot\log(4-x) = 0$

b) $2\cdot\log x - \log(x-16) = 2$

c) $\log x^2 - \log\dfrac{10x+11}{10} = -2$

d) $5\cdot\log\dfrac{x}{2} + 2\cdot\log\dfrac{x}{3} = 3\cdot\log x - \log\dfrac{32}{9}$

25. Resol els sistemes:

a) $\begin{cases} 2\cdot\log x - 3\cdot\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$