9

Funcions i gràfiques

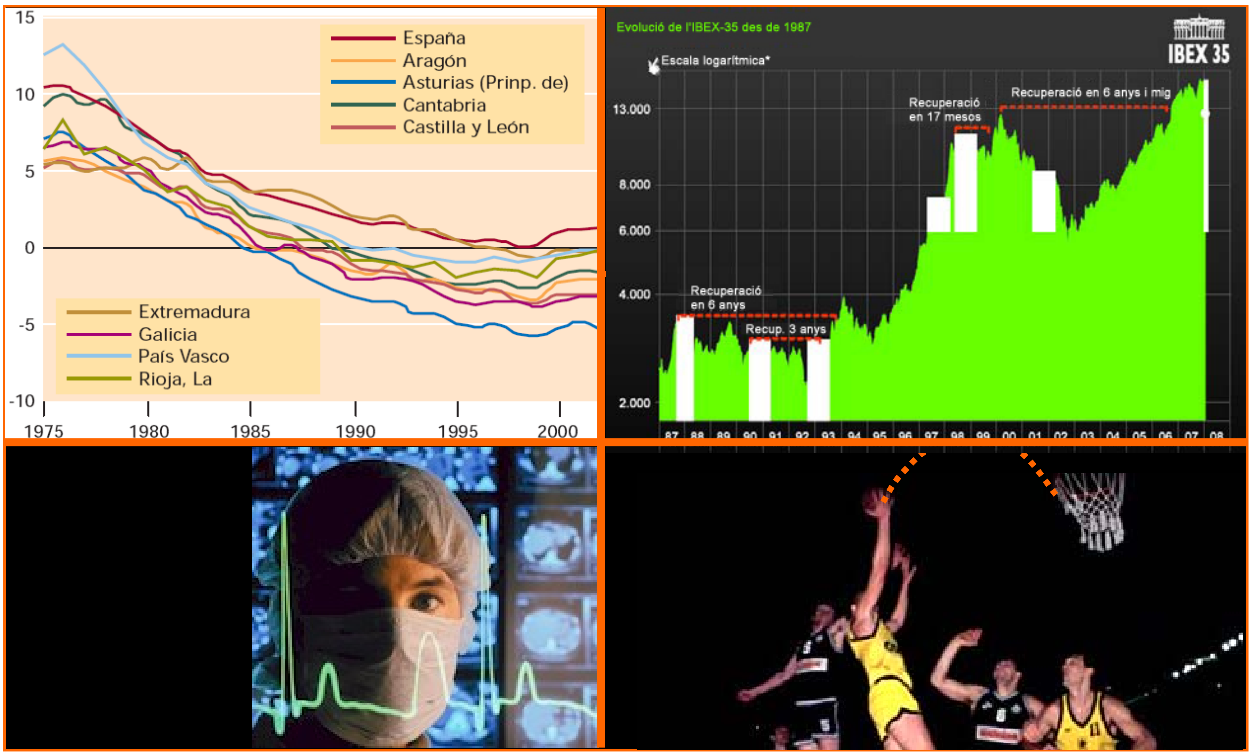
Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Conèixer i interpretar les funcions i les diferents formes de presentar-les.
- Reconèixer el domini i el recorregut d'una funció.
- Determinar si una funció és contínua o discontínua.
- Trobar la taxa de variació i la taxa de variació mitja d'una funció en un interval.
- Determinar el creixement o decreixement d'una funció i trobar-ne els màxims i mínims.
- Reconèixer els punts d'inflexió.
- Comprovar la simetria d'algunes funcions respecte a l'origen i a l'eix OY.
- Reconèixer si una funció és periòdica.

Abans de començar

El llenguatge de les gràfiques



De les diferents formes en les quals pot presentar-se una funció, mitjançant un enunciat, una taula, una expressió algebraica o una gràfica, aquesta última és la que ens permet veure amb només un cop d'ull el seu comportament global, i és per això que és tan important. En aquest tema aprendràs a reconèixer i interpretar-ne les característiques principals.

Investigueu

Imagineu-vos que pugeu en una sínia el radi de la qual mesura 30 m i per pujar cal ascendir 5 m des del terra. La sínia comença a girar. Com és la gràfica de la funció que dóna l'altura en la qual us trobeu segons l'angle de gir? Aneu a la cabina taronja i uns amics a la verda, com serà la seva gràfica?

1. Funcions reals

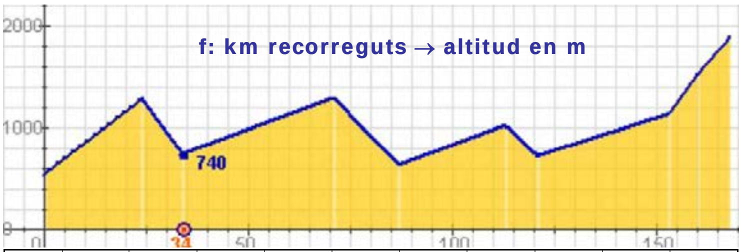
Concepte de funció

Una funció és una **correspondència** entre dos conjunts numèrics, de tal manera que a cada element del conjunt inicial li correspon un element i només un del conjunt final.

Es relacionen així dues variables numèriques que solen designar-se amb x i y.

f: x → y=f(x)

- ✓ x és la variable independent
- ✓ i és la variable dependent



km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

El gràfic descriu el recorregut de la 9a Etapa de la Volta Ciclista 2007, indicant els km totals i l'altitud en els punts principals del trajecte.

A l'esquerra apareix la gràfica anterior traçada sobre uns eixos cartesians, per simplificar-la s'han unit els punts principals mitjançant segments. Es tracta d'una funció que dóna l'altitud segons els km recorreguts, observeu la taula de valors.

Gràfica d'una funció

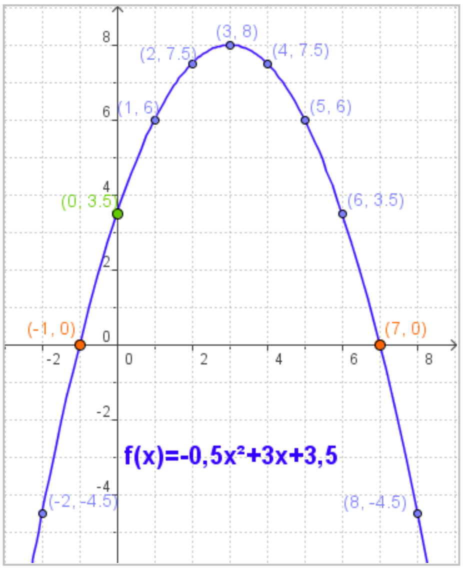
Per veure el comportament d'una funció, **f: x → y**, recorrem a la seva **representació gràfica** sobre els eixos cartesians; en l'eix d'abscisses (OX) la variable independent i en el d'ordenades (OY) la independent. Les coordenades de cada punt de la gràfica són: **(x, f(x))**.

A la figura hi ha representada la funció:

$$f(x)= 0{,}5x^2+3x+3{,}5$$

Fent una taula de valors, es representen els punts obtinguts, x en l'eix d'abscisses (OX), f(x) en el d'ordenades (OY).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5



Hi ha uns punts que tenen especial interès: els que la gràfica talla amb els eixos coordenats. Per calcular-los:

- ✓ Tall amb l'eix OY:
  Els punts de l'eix d'ordenades tenen abscissa 0, n'hi ha prou amb fer **x=0** en la fórmula de la funció.
- ✓ Tall amb l'eix OX:
  Els punts de l'eix d'abscisses tenen y=0. Es resol l'equació **f(x)=0**

Talls amb els eixos

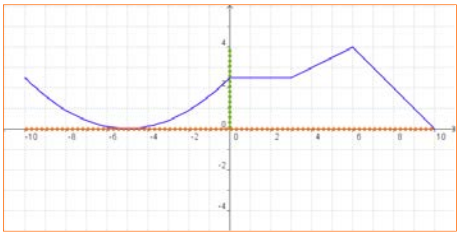
EIX OY: f(0)=3,5 punt (0, 3,5)

EIX OX: Resolent l'equació
$0{,}5x^2+3x+3{,}5=0$

Resulta:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+7}}{-2\cdot 0{,}5}=3\pm 4=\begin{matrix}7\\-1\end{matrix}$$

Punts (7, 0) (-1, 0)



Dom f=[-10, 10]

Calcular dominis

- Si l'expressió analítica de la funció és un polinomi, el domini són tots els nombres reals.

  $f(x)=-x^4+4x^2+1$

  Dom f = $\mathbb{R}$
  Im f = (-∞ , 5]

- Si l'expressió analítica de la funció és un quocient, el domini són tots els reals excepte els que anul·len el denominador.

  $$f(x)=\frac{2}{x-1}$$

  Dom f = $\mathbb{R}$ - {1}
  Im f = (-∞ , 0) U (0, +∞)

- Si l'expressió analítica de la funció és una arrel quadrada, el domini està format pels nombres reals per als quals el radicand és positiu o zero.

  $$f(x)=\sqrt{x+3}$$

  Dom f = [-3,+∞)
  Im f = [0,+∞)

  $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

  Dom f = (-2,+∞)
  Im f = (0,+∞)

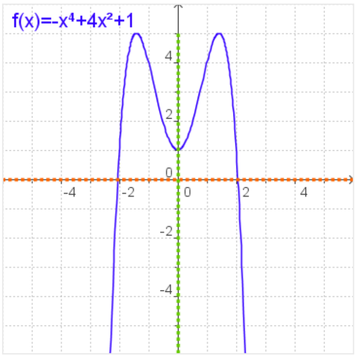
Domini i recorregut

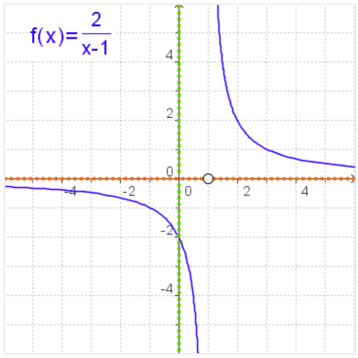
Donada una funció y=f(x)

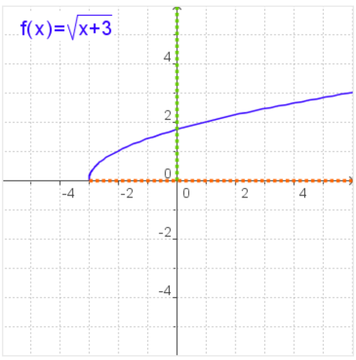
- S'anomena **domini** de f el conjunt de valors que pren la variable independent, **x**. S'indica com a**Dom f**.

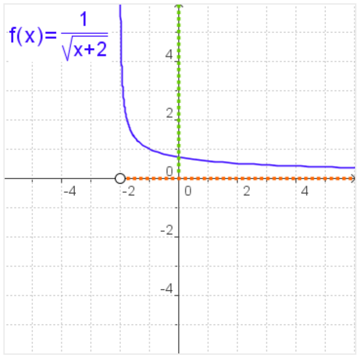
  El domini està format, per tant, pels valors de x per als quals existeix la funció, és a dir, per als quals hi ha un f(x).

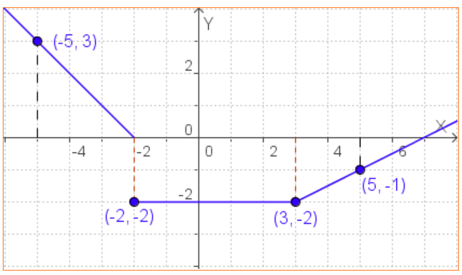
- El **recorregut** és el conjunt de valors que pot prendre la variable dependent, **y**, això és el conjunt de les imatges. Es representa com a**Im f**.











$$f(x)=\begin{cases}-x-2 & x<-2\\ -2 & -2\le x\le 3\\ 0{,}5x-3{,}5 & x>3\end{cases}$$

Funcions definides a trossos

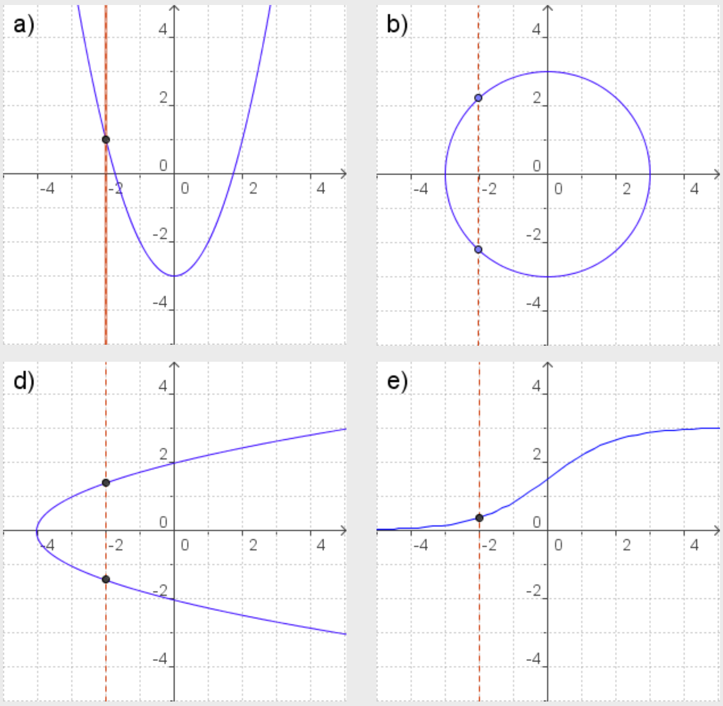
Hi ha un tipus de funcions que vénen definides amb diferents expressions algebraiques segons els valors de x, es diu que estan **definides a trossos**.

Per descriure analíticament una funció formada per trossos d'altres funcions, es donen les expressions dels diferents trams, per ordre d'esquerre a dreta, indicant en cada tram els valors de x per als quals la funció està definida.

A la figura podeu veure un exemple d'aquest tipus de funcions i la seva representació gràfica.

Exercicis resolts

5. De les següents gràfiques indiqueu les que corresponen a una funció i les que no

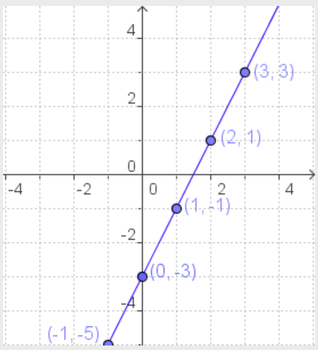


- Són gràfiques d'una funció a), c) i i), ja que a cada x del domini li correspon un únic valor de i.
- No són gràfiques d'una funció b) i d)

6. Fes una taula de valors, dibuixeu els punts obtinguts i representeu la funció.

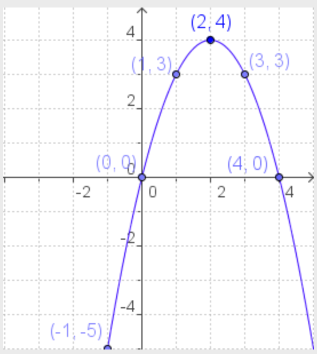
a) $f(x)=2x-3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



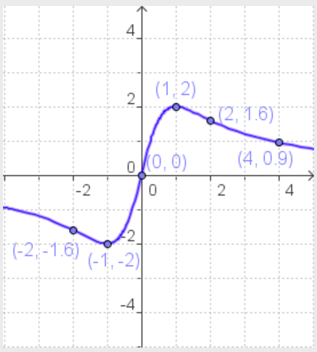
b) $f(x)=-x^2+4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



- RECORDEU-HO

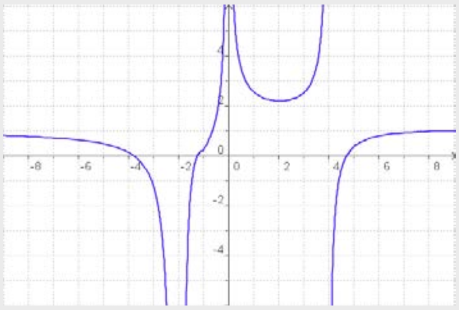
Per fer una taula de valors, a partir de l'expressió d'una funció, substituïu en la fórmula la x pels valors que vulgueu, opereu i calculeu els corresponents de y=f(x). En general procureu alternar valors positius i negatius.

Dibuixeu els punts (x,y) obtinguts d'aquesta manera, i uniu-los.

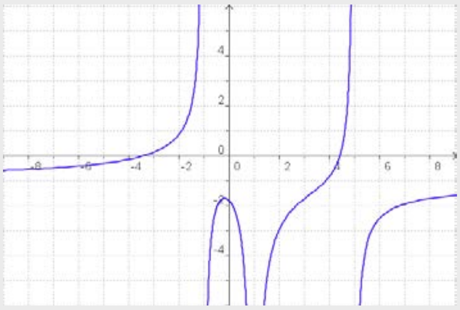
Exercicis resolts

3. Calculeu el domini de les següents funcions

a)



b)



Dom f = $\mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$ Dom f = $\mathbb{R} - \{-1, 1, 5\}$

En els punts indicats, en ambdós casos, no es pot trobar f(x) en la gràfica.

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Dom f = $\mathbb{R}$ ja que és un polinomi

d) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

Dom f = $\mathbb{R} - \{2\}$

e) $f(x) = \sqrt{x-5}$

$x-5 \geq 0,\ x \geq 5 \Rightarrow$ Dom f = $[5, +\infty)$

f) $f(x) = \sqrt{5-x}$

$5-x \geq 0,\ 5 \geq x \Rightarrow$ Dom f = $(-\infty, 5]$

g) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x+4}}$

$x+4 > 0,\ x > -4 \Rightarrow$ Dom f = $(-4, +\infty)$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

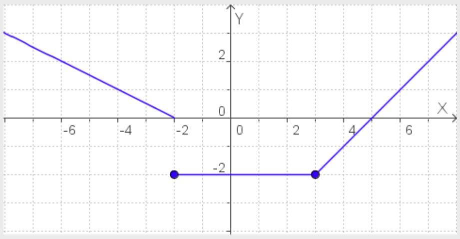
$2-x > 0,\ 2 > x \Rightarrow$ Dom f = $(-\infty, 2)$

(En aquests casos -4 i 2, respectivament, no són del domini ja que anul·len el denominador)

4. En les següents funcions, definides a trossos, calculeu les imatges dels valors de x indicats.

a) $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x - 1 & \text{si} \quad x < -2 \\ -2 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



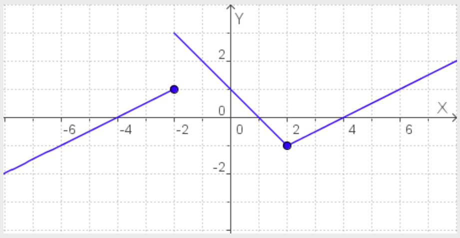
x=-4 se substitueix a dalt (-4 < -2)

x=-2, x=1 i x=3 se substitueixen en la del mig, ja que són a [-2,3].

x=6 se substitueix a baix, o sigui que 6 >3.

c) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 2 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ -x + 1 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ 0{,}5x - 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



x=-6, x=-2 se substitueix a dalt.

x=0 se substitueix en la del mig, ja que són a -2 <0 <2.

x=2, x=4 se substitueix a baix.

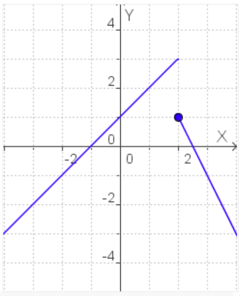
2. Propietats de les funcions

Continuïtat

La primera idea de funció **contínua** és la que es pot representar d'un sol traç, sense aixecar el llapis del paper.

Quan una funció no és contínua en un punt es diu que presenta una **discontinuïtat**.

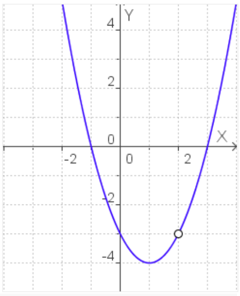
Les tres funcions dibuixades sota són discontínues en x=2, però tenen diferents tipus de discontinuïtat.



$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<2 \\ -2x+5 & x\geq 2 \end{cases}$

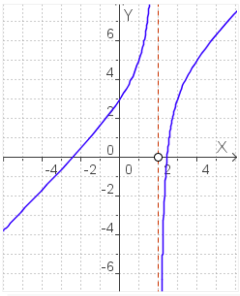
f(2)=1

La gràfica presenta un salt.



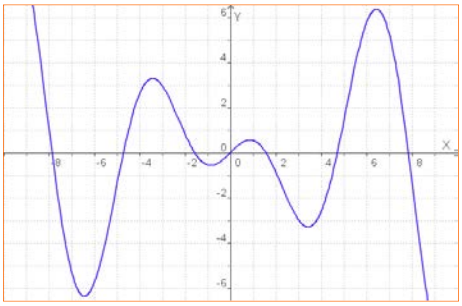
$f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x+6}{x-2}$

x=2 no pertany al domini. Aquesta discontinuïtat es diu "evitable".



$f(x)=\dfrac{x^2-6}{x-2}$

x=2 no pertany al domini.
La gràfica presenta un salt infinit.



Una funció y=f(x) és contínua en x=a si:

- La funció està definida en **x=a**, existeix **f(a)=b**.
- Les imatges dels valors pròxims a **a** tendeixen a **b**.

Hi ha diverses raons per les quals una funció no és contínua en un punt:

- Presenta un salt.
- La funció no està definida en aquest punt, o si ho està queda separat, hi ha un "forat" en la gràfica.
- La funció no està definida i el seu valor creix (o decreix) indefinidament quan ens apropem al punt.

Funcions periòdiques

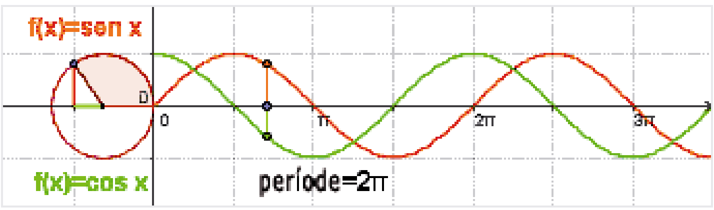
En la naturalesa i en el vostre entorn habitual hi ha fenòmens que es repeteixen a intervals regulars, com el cas de les marees, els pèndols i ressorts, el so...

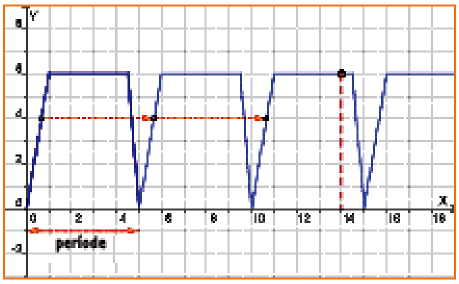
Les funcions que descriuen aquest tipus de fenòmens es diuen **periòdiques**

Una **funció** és **periòdica** quan el seu valor es repeteix cada vegada que la variable independent recorre un cert interval. El valor d'aquest interval s'anomena **període**.

f(x+període)=f(x)

Dues funcions periòdiques importants:





Una cisterna s'omple i buida automàticament expulsant 6 litres d'aigua cada 5 minuts, seguint el ritme de la gràfica. Quan el dipòsit és buit comença l'ompliment, que costa 1 minut, roman ple 3,5 minuts i es buida en 0,5 minuts. Aquest procés es repeteix periòdicament.

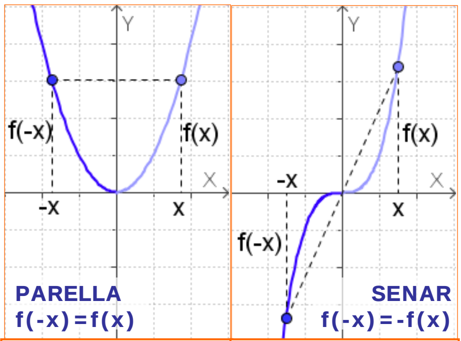
Per conèixer el volum d'aigua en el dipòsit a cada instant conèixer el que ocorre en aquests primers 5 minuts. Així als 14 minuts, la quantitat d'aigua és:

f(14)=f(4+2·5)=f(4)=6

En dividir 14:5, quocient=2 residu=5

En general, si el període és 5:

f(x+5·n)=f(x)



Quan es plega la gràfica per l'eix d'ordenades les dues branques coincideixen.	Quan es pleguen la gràfica per ambdós eixos les dues branques coincideixen.

Simetries

La gràfica d'algunes funcions pot presentar algun tipus de simetria que si s'estudia prèviament, en facilita el dibuix.

- ✓ Una funció és **simètrica** respecte a l'**eix OY**, si **f(-x)=f(x)**.

  En aquest cas la funció es diu **PARELLA**.

- ✓ Una funció és **simètrica** respecte a l'**origen de coordenades** quan **f(-x)=-f(x)**.

  En aquest cas la funció s'anomena **SENAR**.

Observeu els gràfics per reconèixer-los.

Exercicis resolts

5. Calculeu el valor de k perquè les següents funcions siguin contínues en el punt en què canvia la gràfica:

a) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+k & x\le 4 \\ x-3 & x>4 \end{cases}$

$f(4)=0{,}5\cdot 4+k=2+k$

Si s'hagués definit en l'altre tram seria:

$f(4)=4-3=1$

com que ambdós trams han de coincidir:

$2+k=1 \Rightarrow k=1-2=-1$

b) $f(x)=\begin{cases} k & x\le 1 \\ -x+1 & x>1 \end{cases}$

$f(1)=k$

Si estigués definida en l'altre tram seria:

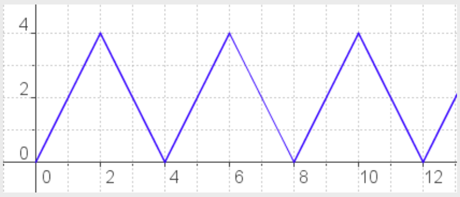
$f(1)=-1+1=0$

com que ambdós trams han de coincidir

$k=0$

6. Quin és el període de les funcions següents?. En cada cas calculeu f(45).

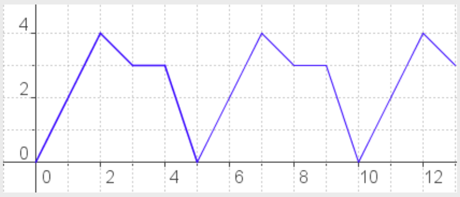
a)



Període = 4

$45=4\cdot 11+1$ $\quad f(45)=f(1)=2$

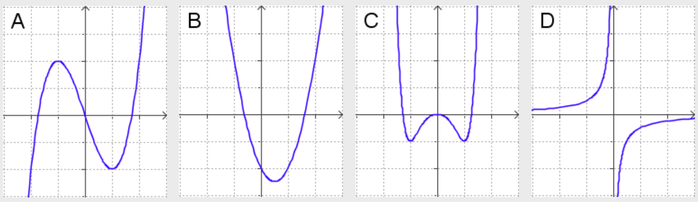
b)



Període = 5

$45=5\cdot 9$ $\quad f(45)=f(0)=0$

7. D'entre les següents gràfiques seleccioneu les que corresponen a funcions parelles i a funcions senars.



Parella: C

Senars: A i D

B no és parell ni senar

8. Les funcions següents (corresponents a les de l'exemple 7) són parelles o senars?

a) $f(x)=x^3-3x$	$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-f(x)$	SENAR
b) $f(x)=2x^2-2x-2$	$f(-x)=2(-x)^2-2(-x)-2=2x^2+2x-2$	Ni PARELL ni SENAR
c) $f(x)=x^6-x^4-x^2$	$f(-x)=(-x)^6-(-x)^4-(-x)^2=2x^6-x^4-x^2=f(x)$	PARELLA
d) $f(x)=-1/x$	$f(-x)=-1/(-x)=1/x=-f(x)$	SENAR

3. Taxa de variació i creixement

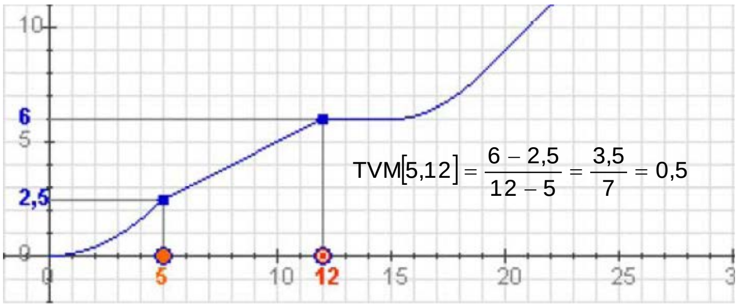
Taxa de variació d'una funció

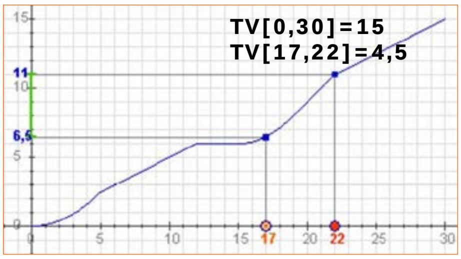
La **taxa de variació** o **increment** d'una funció és l'augment o disminució que experimenta una funció en passar la variable independent d'un valor a l'altre.

$$\mathbf{TV[x_1,x_2]=f(x_1)-f(x_2)}$$

De més utilitat resulta calcular l'anomenada **taxa de variació mitjana**, que ens indica la variació relativa de la funció respecte a la variable independent:

$$\mathbf{TVM[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

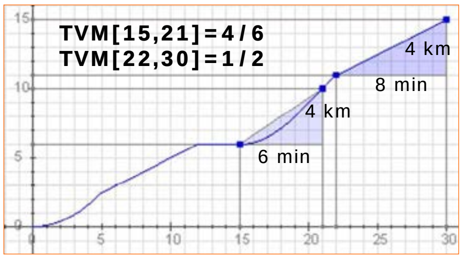




La gràfica representa la distància en km recorreguda d'un ciclista en funció del temps, en minuts, emprat.

La TV correspon en la distància recorreguda en un interval de temps.

La TVM és la velocitat mitjana en un interval de temps determinat.



Creixement i decreixement

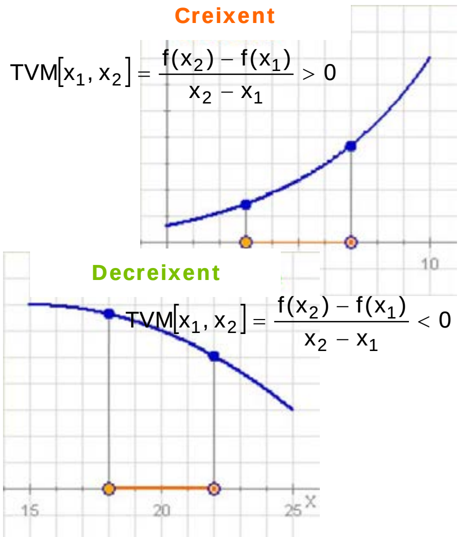
Una característica de les funcions que es pot visualitzar fàcilment en les gràfiques és la monotonia. Quan en augmentar el valor de x augmenta el valor de y=f(x), la gràfica "ascendeix" i es diu que la funció és **creixent**. Si al contrari en augmentar x disminueix y, la gràfica "descendeix", i la funció **decreix**. Precisant una mica més:

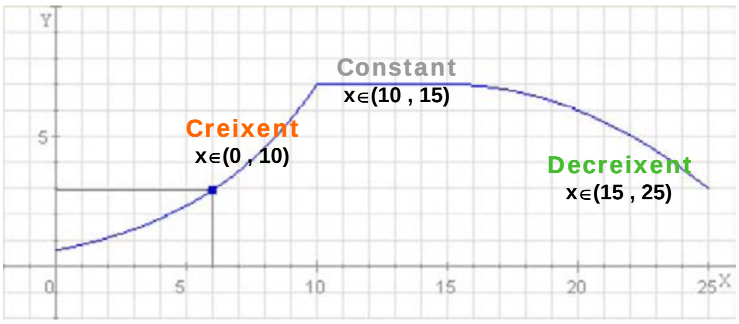
Una **funció** és **creixent** en un interval, quan donats dos punts qualssevol d'aquest

- Si $\mathbf{x_1<x_2}$, llavors $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$

I serà **decreixent**:

- Si $\mathbf{x_1<x_2}$, llavors $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$



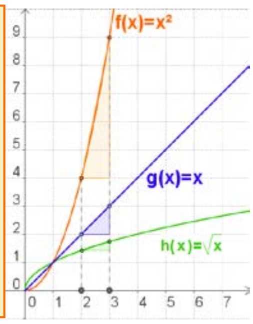


Totes les funcions no creixen o decreixen, de la mateixa manera.

$f(x)=x^2$ és la que creix més de pressa,

$g(x)=x$ té un creixement lineal,

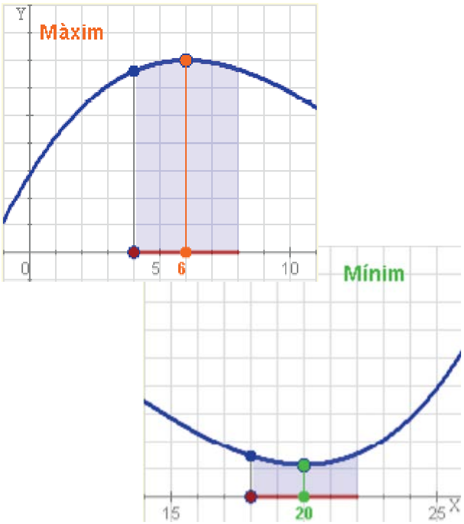
$h(x)=\sqrt{x}$ creix més lentament.



Màxims i mínims

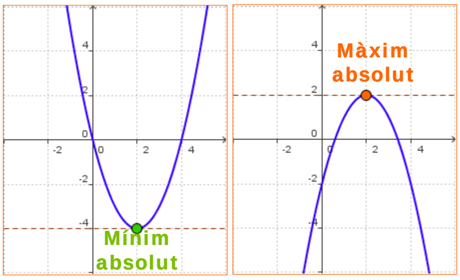
Donada una funció contínua en un punt x=a, es diu que presenta un **màxim relatiu**, si a l'esquerra del punt esmentat la funció és creixent i a la dreta la funció és decreixent.

Si, al contrari, la funció és creixent a la dreta i decreixent a l'esquerre hi ha un **mínim relatiu**.



Si es verifica que f(a)>f(x) per a qualsevol valor x del domini, i no només per als valors "del voltant", es parla de **màxim absolut** en x=a.

I anàlogament es diu que a a hi ha un **mínim absolut** si f(a)<(f(x) per a qualsevol x del domini.

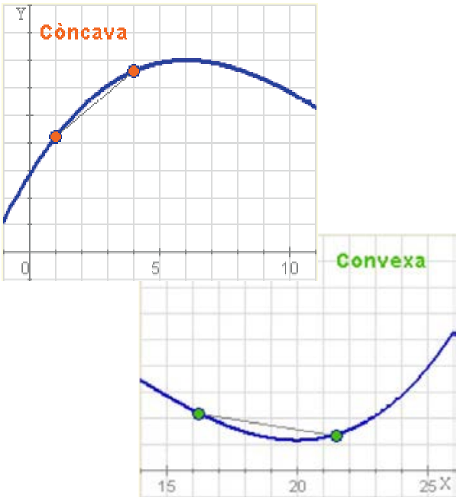


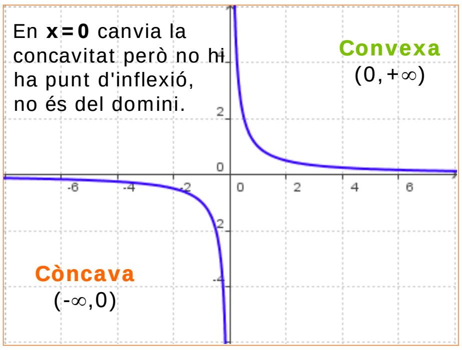
Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

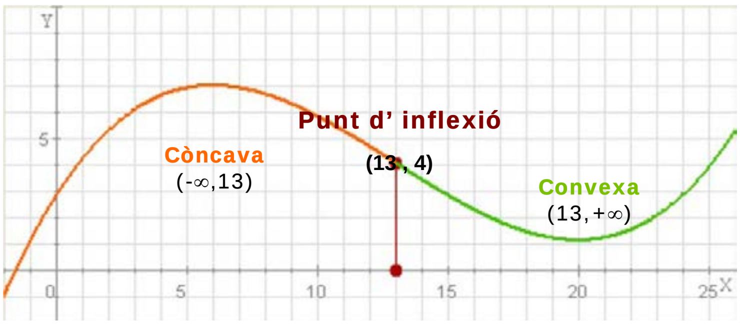
Una altra característica d'interès en les gràfiques de les funcions és la concavitat, estudiar els intervals en què la gràfica es corba cap a baix o cap a dalt.

- ✓ Una funció és **còncava** en un interval si el segment que uneix dos punts qualssevol de la corba queda sota d'aquesta, i **convexa** si hi queda per sobre.

Els punts del domini en els quals la funció passa de còncava a convexa o viceversa, s'anomenen **punts d'inflexió**.

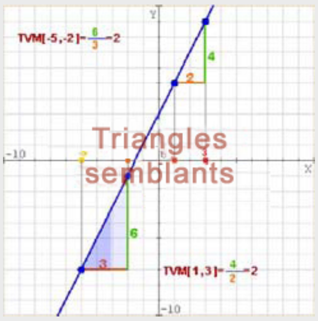






Exercicis resolts

9. Calculeu la taxa de variació mitja de les funcions següents entre els punts indicats. Comproveu a la figura que en les funcions el gràfic de les quals és una recta la TVM és constant.



a) y=2x+3

$TVM[1,3] = \frac{9-5}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

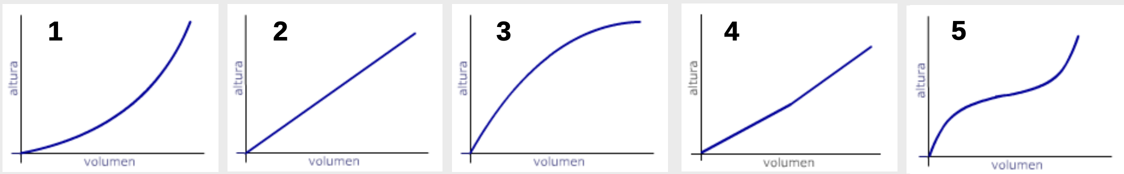
$TVM[-5,-2] = \frac{-1+7}{-2+5} = \frac{6}{3} = 2$

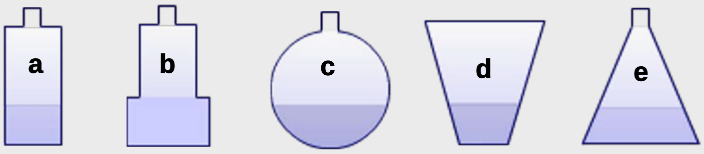
b) y=0,5x+3

$TVM[1,3] = = \frac{4{,}5-3{,}5}{2} = 0{,}5$

$TVM[-3,0] = \frac{3-1{,}5}{3} = 0{,}5$

10. Les gràfiques representen l'ompliment dels diferents recipients, quina gràfica correspon a cada un?

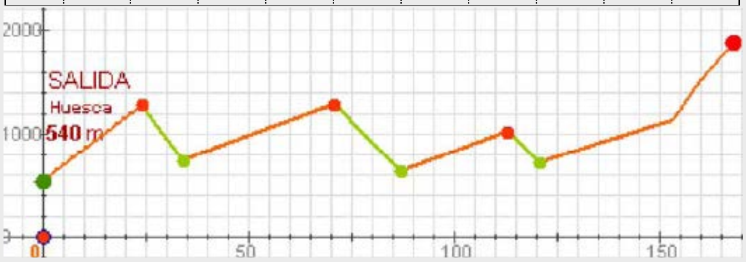




a $\to$ 2
b $\to$ 4
c $\to$ 5
d $\to$ 3
e $\to$ 1

11. Recordeu la funció que donava el "perfil" d'una etapa de la Volta, que vau veure al primer capítol, a) escriviu els intervals de creixement o decreixement; b) En quin punt quilomètric s'assoleixen els màxims relatius?, quin valor prenen?, i els mínims?; c) Hi ha absolut màxim o mínim?

km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882



a)
Creixent:
(0,24)U(34,71)U(87,113)U(121,168)
Decreixent:
(24,34)U(71,87)U(113,121)

b)
MÀX: x=24, y=1280
x=71, y=1290
x=113, y=1020
MÍN: x=34, y=740
x=87, y=630
x=121, y=720

c)
En aquest cas la funció té màxim i mínim absoluts, que s'assoleixen ambdós en els extrems del domini, com a mínim en x=0 de valor 540 m, com a màxim en x=168 de valor 1882 m.

Per practicar

1. Considereu la funció que a cada núm. li assigna el seu quadrat menys 1. Escriviu la seva expressió analítica i calculeu la imatge de -1, 1 i 2. Calculeu també els talls amb els eixos.

2. Considereu la funció que a cada núm. li assigna la seva meitat més 3. Escriviu la seva expressió analítica i calculeu la imatge de -1, 1 i 3. Calculeu també els talls amb els eixos.

3. Considereu la funció que a cada núm. li assigna el seu doble menys 5. Escriviu-ne l'expressió analítica i calculeu la imatge de -2, -1 i 1. Calculeu també els talls amb els eixos.

4. Calculeu el domini de les següents funcions:

a) $f(x)=-2x^2+5x-6$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{2x-4}$

c) $f(x)=\sqrt{-4x^2+12}$

d) $f(x)=\sqrt{4x^2+20}$

e) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-4}}$

5. Estudieu la continuïtat de les següents funcions:

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{-x}{x+3}$

6. Estudieu la continuïtat de les següents funcions en els punts que s'indica

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$ en x=1

b) $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & x\le 0 \\ x+2 & x>0 \end{cases}$ en x=0

c) $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\le -1 \\ 4 & x>-1 \end{cases}$ en x=-1

d) $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\le -1 \\ 4 & x>-1 \end{cases}$ en x=-1

7. Estudieu la simetria de les funcions:

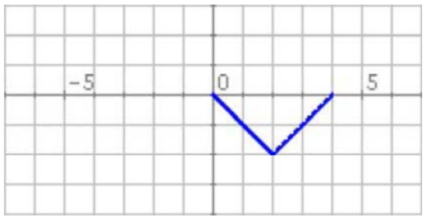
a) $f(x)=x^3+2x$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{5x^2}$

c) $f(x)=2\sqrt{x^2+1}$ d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

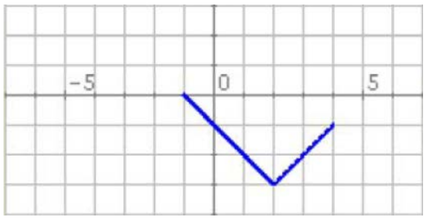
e) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{2x}$ f) $f(x)=x^4-3x^2-3$

8. En cada cas la gràfica representa un tram o període d'una funció periòdica, representeu altres trams, indiqueu el període i calculeu la imatge del punt d'abscissa que s'indica:

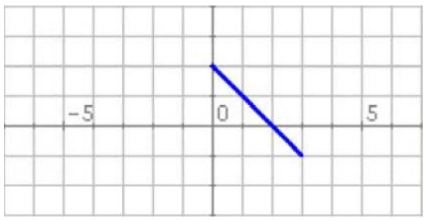
a) f(-2)



b) f(-3)

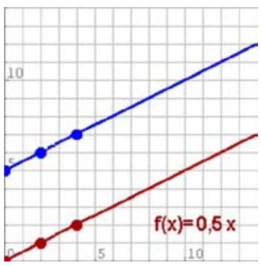


c) f(-1)

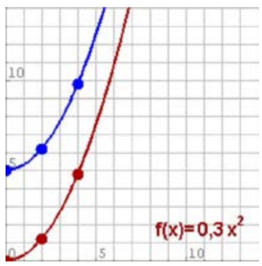


9. Calculeu les TVM de les funcions de la gràfica en els intervals [0,4] i [2,4].

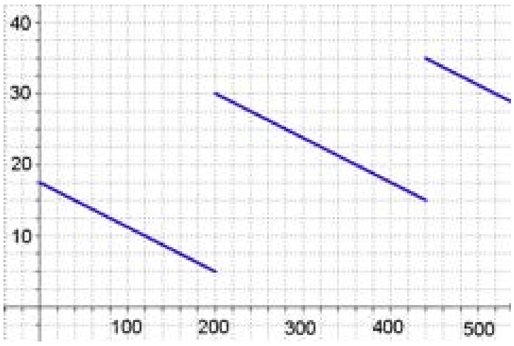
a)



b)



10. El gràfic mostra com varia la gasolina que hi ha al meu cotxe durant un viatge de 520 km per una autovia.

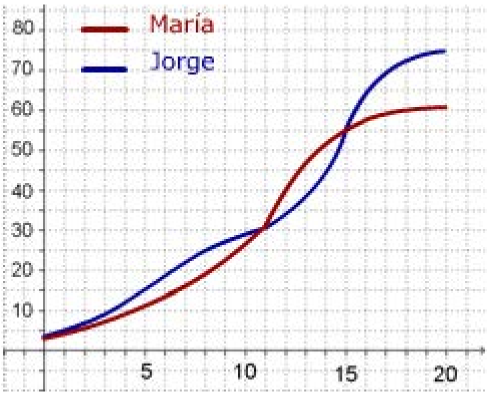


a) Quanta gasolina hi havia al cap de 240 km?. En el dipòsit caben 40 litres, quan és que hi havia més de mig dipòsit ple?

b) A quantes gasolineres vaig parar?, a quina gasolinera vaig fer més gasolina?. Si no hagués parat, on m'hauria quedat sense gasolina?

c) Quanta gasolina vaig fer servir en els primers 200 km? Quanta en tot el viatge?. Quanta gasolina gasta el cotxe cada 100 km en aquesta autovia?

11. La Maria i en Jordi són dues persones més o menys típiques. En la gràfica podeu comparar com ha crescut el seu pes en els seus primers 20 anys

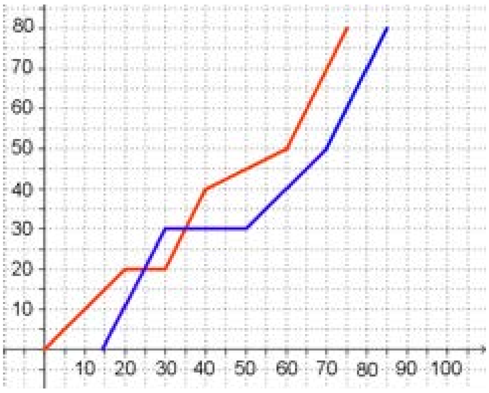


Quant pesava en Jordi als 8 anys?, i la Maria als 12?. Quan va superar en Jordi els 45 kg?

b) A quina edat pesaven tots dos el mateix? Quan pesava en Jordi més que la Maria?, i la Maria més que en Jordi?

c) Quina va ser la mitjana en kg/any d'augment de pes de tots dos entre els 11 i els 15 anys? En quin període va créixer cada un més ràpidament?

12. El gràfic dóna l'espai recorregut per dos cotxes que realitzen un mateix trajecte.



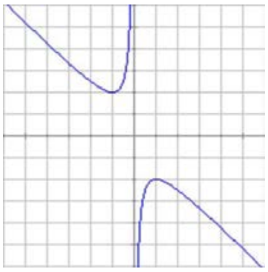
a) Quina és la distància recorreguda? Si el primer cotxe va sortir a les 10:00, a quina hora va sortir el 2n? Quant li va costar a cada un fer el recorregut?

b) Quant temps i on va estar aturat cada cotxe? En quin km va avançar el 2n al 1r?, i el 1r al 2n?

c) Quina velocitat mitja van portar en el trajecte total?, en quin tram la velocitat de cada cotxe va ser major?

13. Les gràfiques següents corresponen a les funcions I i II.

I) $f(x)=x^3-6x^2+9x$ II) $f(x)=-\dfrac{x^2+1}{x}$



Calculeu-ne de cada una:

a) El domini.

b) Els punts de tall amb els eixos.

c) Els valors de x per als quals la funció és positiva i negativa.

d) Els intervals de creixement i decreixement.

e) Els màxims i mínims.

f) Quants punts d'inflexió tenen?

g) Els intervals de concavitat i convexitat.

Per saber-ne més

La primera funció

El primer en construir una funció va ser **Galileu** (1564-1642). Des de dalt de la torre inclinada de Pisa va tirar dues boles, una de ferro i una altra de fusta i va comprovar que malgrat la diferència de pes, ambdues arribaven a terra alhora. Havia descobert la llei de caiguda dels cossos.

Continuant el seu estudi i utilitzant un artefacte curiós, va comprovar que l'espai recorregut depèn del quadrat del temps, i així va escriure la primera funció de la història. Fent clic aquí podeu llegir més sobre el tema.

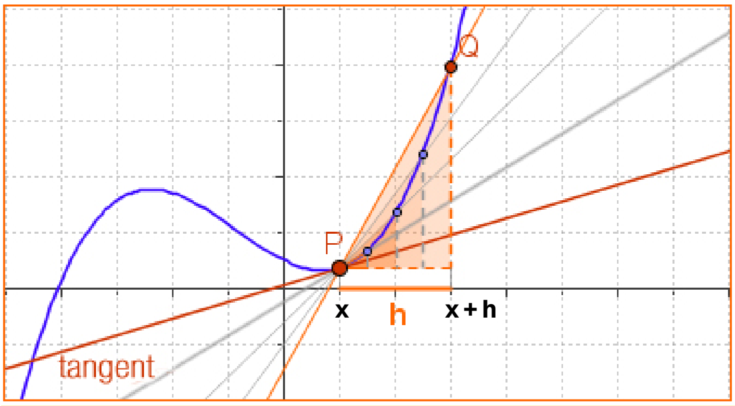
La primera definició formal de funció és gràcies a **Euler**, que en el llibre *Introductio in analysis infinitorum*, publicat el 1748, diu:
"Una funció d'una quantitat variable és una expressió analítica composta de qualsevol manera a partir de la quantitat variable i de nombres o quantitats constants".
El 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, torna a tractar el tema apropant-se més a la que utilitzem avui.

Una funció curiosa

L'anomenada funció de Dirichlet, és la que a cada nombre real li assigna l'1 si és racional i el 0 si és irracional. És discontínua en tots els seus punts.

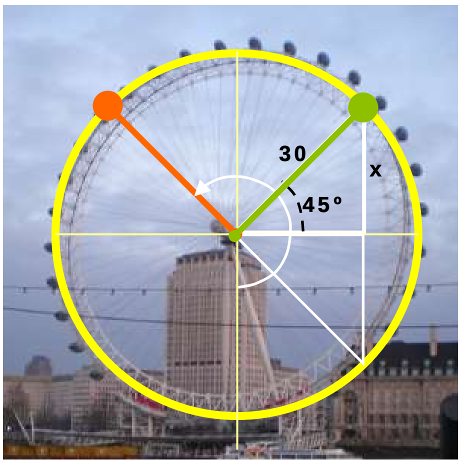
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R - Q \end{cases}$$

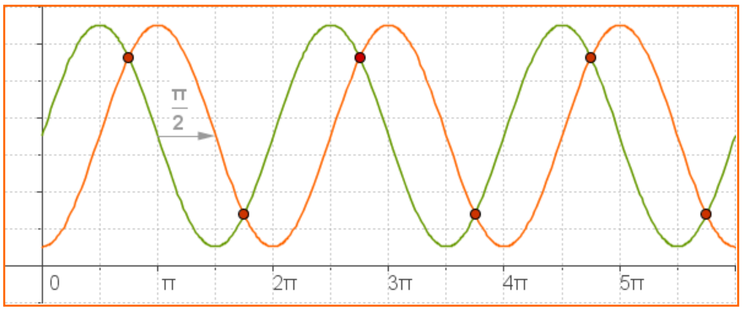
Tangent, taxa de variació mitja i derivada



Quan el punt →PQ, la recta secant PQ tendeix a la recta **tangent** a la corba y=f(x) en P. La pendent de la secant és la TVM[P,Q] que tendeix a la de la tangent.
És la **derivada** de la funció que Estudiareu en cursos posteriors.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$





Observeu les dues gràfiques, ambdues funcions són periòdiques de període 2π, la gràfica verda està desfasada $\pi/2$ respecte a la taronja; fixeu-vos on assoleixen els màxims i els mínims. Quan coincideixen les dues gràfiques, a quina altura estan?,
x=r·sen 45º=21,21 m; 1) 35-21,21=13,79 2)35+21,21=56,21

Recordeu el més important

✓ Una **funció** és una relació entre dues variables x i y, de manera que a cada valor de la variable independent, **x**, se li associa un únic valor de la variable **y**, la dependent.

✓ El **domini** d'una funció és el conjunt de tots els possibles valors que pot prendre x.

✓ La **gràfica** d'una funció és el conjunt de punts **(x,f(x))** representats en el pla.

✓ Una funció és **contínua** si pot representar-se amb un sol traç. És **discontínua** en un punt si presenta un "salt" o no està definida en aquest punt.

✓ Una funció és **periòdica** de període t, si la seva gràfica es repeteix cada t unitats, f(x+t)=f(x).

✓ Una funció és **simètrica** respecte a l'eix OY, funció parella, si f(x)=f(-x); i és simètrica respecte a l'origen, funció senar, si f(-x)=-f(x).

✓ La **taxa de variació** d'una funció entre dos punts és la diferència: $\mathbf{TV[x_1,x_2]=f(x_2)-f(x_1)}$
La **taxa de variació mitjana** és:

$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

✓ Una funció és **creixent** en un interval, quan donats dos punts qualssevol del mateix

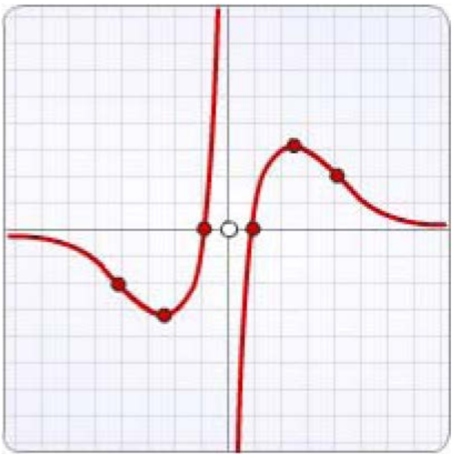
- Si $x_1<x_2$, llavors $f(x_1)<f(x_2)$

I és **decreixent**

- Si $x_1<x_2$, llavors $f(x_1)>f(x_2)$

✓ Una funció contínua en un punt x=a, presenta un **màxim** relatiu, si a l'esquerra de l'esmentat punt és creixent i a la dreta és decreixent. Si, al contrari, és decreixent abans i creixent després, hi ha un **mínim** relatiu.

✓ La gràfica d'una funció pot ser **còncava** (avall) o **convexa** (amunt). Els punts del domini en què canvia la concavitat s'anomenen **punts d'inflexió**.



Domini
Todos los reales excepto el 0

Continuïtat
No es continua, en 0 presenta una discontinuidad de salto infinito.

Simetria
És simètrica respecte a l'origen de coordenades, funció **senar.**

Talls amb els eixos
A l'eix d'abscisses en (-1,0) i (1,0); No talla l'eix d'ordenades.

Creixement i decreixement
És creixent en (∞-, -2,5)U(2,5 ,+∞)
I decreixent en (-2,5 ,0)U(0, 2,5)

Màxims i mínims
Màxim a (2,5 ,3);
Mínim a (-2,5 ,3)

Concavitat i convexitat
Punts d'inflexió
És còncava a (∞-, -3)U(0, 3)
I convexa a (-3 ,0)U(3, +∞)
(-3,0) i (3,0) són punts d'inflexió. A x=0 canvia la concavitat però no hi ha punt d'inflexió ja que no és del domini.

Autoavaluació

1. Calculeu la imatge de x=0 en la funció:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ 5 & x>3\end{cases}$$

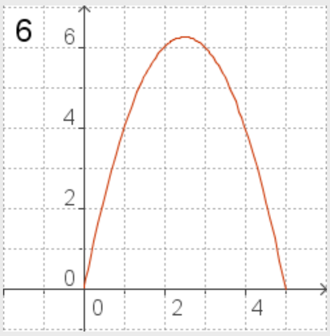
2. Calculeu el domini de la funció:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$$

3. Quin dels punts sigüents: (1,-2) (3,-15) (4,-26) no pertany a la gràfica de la funció $f(x)=-x^2-3x+2$?.

4. Calculeu els punts de tall amb els eixos coordenats de la recta $y=-0{,}25x-0{,}75$.

5. Si $y=f(x)$ és una funció senar i $f(3)=-2$, quant val $f(-3)$?

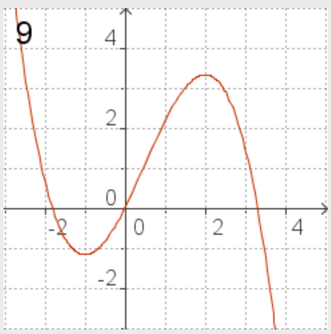


6. La gràfica mostra el primer tram d'una funció periòdica amb període 5 i expressió $f(x)=-x^2+5x$ ($0\le x<5$). Calculeu f(28).

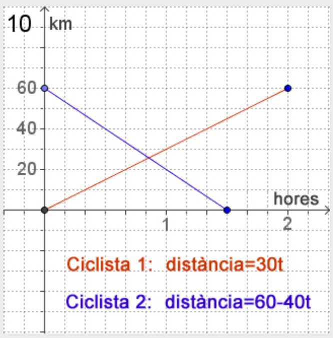
7. Esbrineu el valor de a perquè la funció sigui contínua a x=3.

$$f(x)=\begin{cases}2x+k & x\le 3\\ 6 & x>3\end{cases}$$

8. Calculeu la TVM[-3,0] de la funció $f(x)=-0{,}25x^2-3x+1$.



9. Determineu l'interval en què la funció de la gràfica és creixent.



10. Un ciclista surt d'un punt A cap a un altre B que dista 60 km a una velocitat constant de 30 km/h. Alhora un altre ciclista surt de B en direcció a A, a 40 km/h. Observeu la gràfica i calculeu a quants km del punt A es creuen a la carretera.

Solucions dels exercicis per practicar

1. $f(x)=x^2-1$ f(-1)=0, f(2)=3, f(1)=0
Tall OY: -1   Tall OX: 1 i -1

2. $y=\frac{x}{2}+3$
f(-1)=2,5 f(1)=3,5 f(3)=4,5
Tall OY: 3   Tall OX: -6

3. f(x)=2x-5
f(-2)=-9, f(-1)=-7, f(1)=-5
Tall OY: -5   Tall OX: 2,5

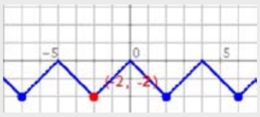
4. a) És un polinomi, Dom(f)=IR
b) Tots els reals excepte el 2
c) $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$
d) Tots els reals
e) $(2, +\infty)$

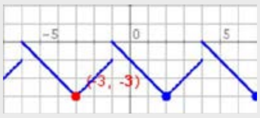
5. És discontínua en x=3
b) És discontínua en x=-3

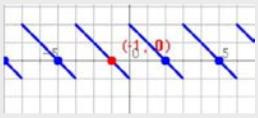
6. a) Discontínua en 1.
A l'esquerra: 3; A la dreta: 1
b) Contínua en 0.
A l'esquerra: 2; A la dreta: 2
c) Contínua en -1.
A l'esquerra: 4; A la dreta: 4
c) Contínua en -1.
A l'esquerra: 4; A la dreta: 4

7. a) i) són senars; b) c) i f) són parells; d) no és parell ni senar

8. a) TVM[0,4]=TVM[2,4]=0,5
b) TVM[0,4]=1,2; TVM[2,4]=1,8

9. a)


b)


c)


10. a) 27,5 litres; entre els km 200 i 360 i del 440 fins al 520.
b) En dos, una en el km 200 i una altra en el 440; en vaig posar més a la 1a; als 280 km
c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km

11. a) J. 25 kg, M. 35 kg ; als 14 anys
b) Als 11 (30 kg) i als 15 (55 kg)
J més que M: fins als 11 i des dels 15;
M més que J: dels 11 a 15
c) 25 kg; 6,25 kg/any; M entre els 11 i 12 (10 kg/any); J entre els 12-14 (10 kg/any)

12. a) 80 km; a les 10:15; 75 i 70 min
b) 10 min en km 20, 20 min en km 30; en el km 20 i en 30 respectivament.
c) 64 km/h i 68,6 km/h; 1º: min 60-75
2n: min 15-30 i min 70-85

13. I) a) IR;   b) (0,0)(3,0)
c) y>0 $(0,+\infty)$; y<0 $(-\infty,0)$;
d) creix:(-,1)U(∞3,∞+), decreix:(1,3);
e) max x=1, mín x=3;
f) Un; conc:$(-\infty,2)$ conv: $(2,+\infty)$
II) a) IR-{0};   b)
No talla c) y<0 $(0, +\infty)$; y>0 $(-\infty,0)$;
d) decreix:(-,-1)U(∞1,∞+), creix:(-1,0)U(0,1);
e) max x=1, mín x=-1;
f) Cap; conv:$(-\infty,0)$ conc: $(0,+\infty)$

Solucions de l'autoavaluació

1. f(0)= –1

2. IR - { 2, -2}

3. (3, -15)

4. (0, -0,75) (-3,0)

5. f(-3)=2

6. f(28)=f(3)=6

7. k=0

8. TVM[-3,0] = -2,25

9. (-3, 1)

10. A partir de 4,25 min l'A