

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Identificar, representar ordenar números racionais.
- Efectuar operacións con fraccións.
- Expresar fraccións como números decimais e números decimais como fraccións.
- Calcular potencias con expoñente enteiro e efectuar operacións con potencias.
- Aproximar números e calcular o erro absoluto e relativo.
- Como se expresa un número en notación científica e como se realizan operacións con números nesta notación.
- Utilizar os números racionais para resolver problemas relacionados con a vida cotiá.

Antes de empezar

1. Números racionais	páx. 4
Decimais periódicos	
Fracción xeratriz	
Ordenación e representación	
2. Operacións con fraccións	páx. 7
Sumas e restas	
Produtos e cocientes	
Operacións combinadas	
3. Potencias de expoñente enteiro	páx. 10
Definición	
Operacións	
4. Notación científica	páx. 12
Introdución	
Números extremos	
Operacións	
5. Medida de erros	páx. 14
Aproximacións	
Erro absoluto e relativo	
6. Aplicacións	páx. 15
Problemas da aplicación	

Exercicios para practicar

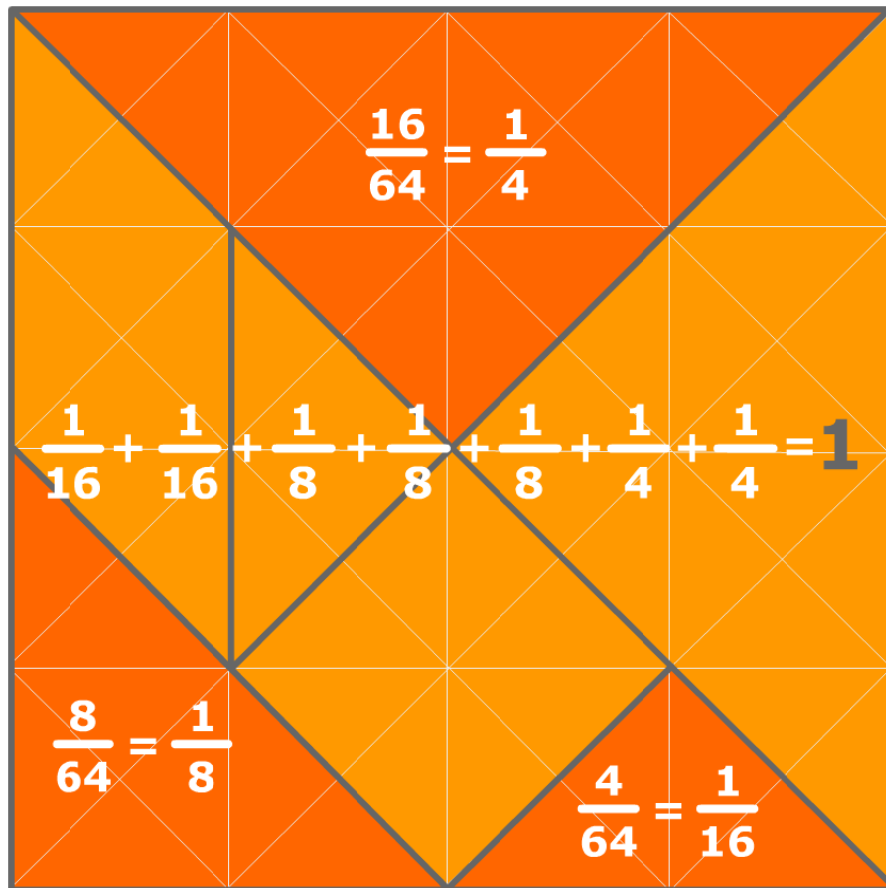
Para saber máis

Resumo

Autoavaliación

Actividades para enviar ao titor

Antes de empezar

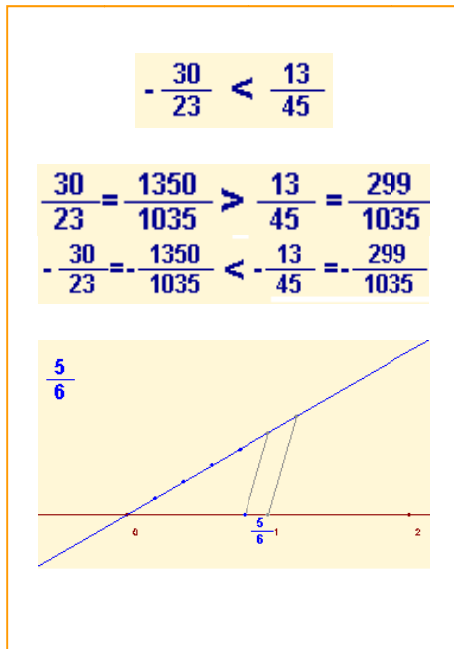


Investiga

Cos números enteiros é fácil calcular o seguinte dun número: O seguinte de -3 é -2, o seguinte é -1, o seguinte é 0, o seguinte é 1, o seguinte é 2, e así sucesivamente.

A cousa non é tan clara se os números son fraccionarios ou decimais. Intenta atopar o seguinte destes números:

$\frac{2}{3}$ 1,6 1,675 1,67555... 1,6799....



Ordenación e representación gráfica

Os números racionais están ordenados, de maneira que sempre podemos comparar dous calquera e podemos representalos como puntos dunha recta.

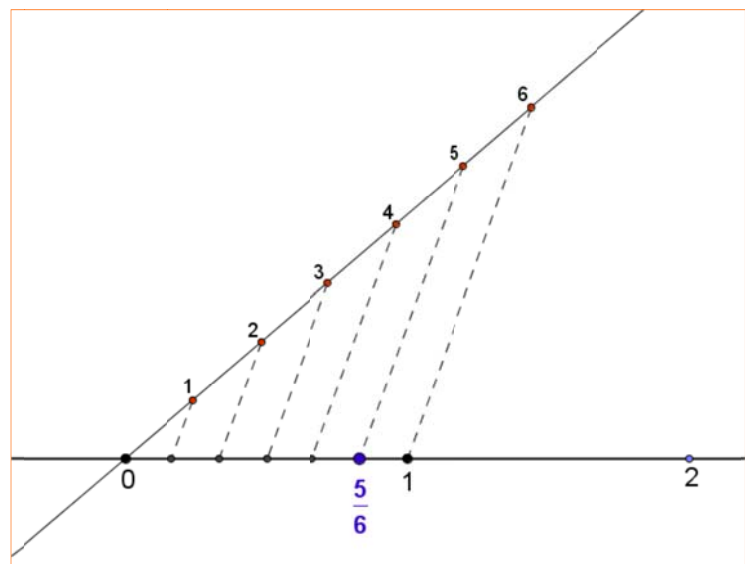
Para **comparar** dous números racionais escribímoslos en forma de fracción, reducímoslos a común denominador e comparamos os numeradores, tendo en conta que:

- ◉ Calquera fracción negativa é menor que calquera fracción positiva.
- ◉ De dúas fraccións positivas con igual denominador é menor a que teña o menor numerador.
- ◉ De dúas fraccións negativas con igual denominador é menor a que teña o maior valor absoluto.

Para **representalos** graficamente utilizaremos a técnica descrita na imaxe adxunta.

Para dividir un segmento en partes iguais, débúxase unha recta auxiliar desde un extremo do segmento, sobre ela tómase unha medida arbitraria e co compás trasládase tantas veces á dereita como partes se queiran facer.

Únese o último punto así obtido co outro extremo do segmento, e trázanse paralelas a este último segmento. Estas paralelas dividen o segmento inicial nas partes desexadas.



EXERCICIOS resoltos

1. Determina de que tipo son os decimais que resultan das fraccións seguintes:

a) $\frac{92}{73}$ b) $\frac{57}{22}$ c) $\frac{27}{36}$

Solución: a) 1.260273972602739726027397260274... Periódico puro
 b) 2.590909090... Periódico mixto
 c) 0.75 Decimal exacto

2. Calcula as fraccións xeratrices dos seguintes decimais:

a) $x = 2,375 \Rightarrow 1000x = 2375 \Rightarrow x = \frac{2375}{1000}$

b) $x = 43,666... \Rightarrow 10x = 436,666... \Rightarrow 9x = 436 - 43 = 393 \Rightarrow x = \frac{393}{9} = \frac{131}{3}$

c) $x = 4,3666... \Rightarrow 10x = 43,666... \Rightarrow 100x = 436,666... \Rightarrow 90x = 436 - 43 \Rightarrow x = \frac{393}{90} = \frac{131}{30}$

3. Ordena de menor a maior as seguintes fraccións: $\frac{-5}{10}, \frac{3}{12}, \frac{-9}{9}, \frac{9}{5}, \frac{-9}{2}$

O mínimo común múltiplo dos denominadores é 180. Reducimos as fraccións a denominador común:

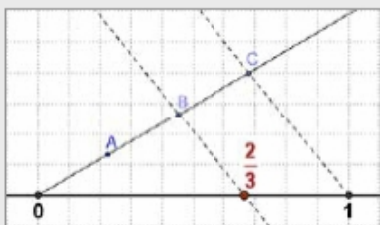
$$\frac{-5}{10} = \frac{-90}{180}, \frac{3}{12} = \frac{45}{180}, \frac{-9}{9} = \frac{-180}{180}, \frac{9}{5} = \frac{324}{180}, \frac{-9}{2} = \frac{-810}{180}.$$

Agora ordenamos: primeiro os negativos de maior a menor numerador en valor absoluto e logo os positivos de menor a maior numerador:

$$\frac{-9}{2} < \frac{-9}{9} < \frac{-5}{10} < \frac{3}{12} < \frac{9}{5}$$

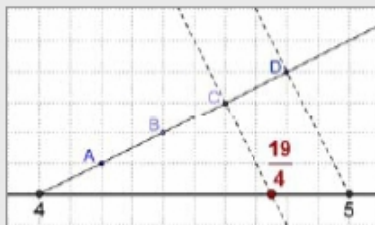
4. Representa na recta as seguintes fraccións:

a) $\frac{2}{3}$



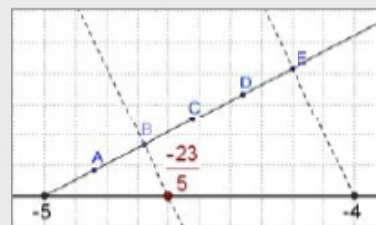
Divídese o segmento (0,1) en 3 partes iguais e tómanse 2.

b) $\frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4}$



Posto que $\frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4}$, divídese o segmento (4,5) en 4 partes iguais e tómanse 3.

c) $-\frac{23}{5} = -5 + \frac{2}{5}$



Posto que $-\frac{23}{5} = -5 + \frac{2}{5}$, divídese o segmento (-5,-4) en 5 partes iguais e tómanse 2.

Propiedades da suma

Conmutativa: A orde dos sumandos non cambia o resultado:

$$\frac{-12}{11} + \frac{-9}{4} = \frac{-48}{44} - \frac{99}{44} = \frac{-147}{44}$$

$$\frac{-9}{4} + \frac{-12}{11} = \frac{-99}{44} - \frac{48}{44} = \frac{-147}{44}$$

Asociativa: Cando hai varios sumandos pódense agrupar en calquera orde:

$$\frac{-12}{11} + \left(\frac{-9}{4} + \frac{6}{13} \right) = \frac{-12}{11} + \frac{-93}{52} = \frac{-1647}{572}$$

$$\left(\frac{-12}{11} + \frac{-9}{4} \right) + \frac{6}{13} = \frac{-147}{44} + \frac{6}{13} = \frac{-1647}{572}$$

Elemento neutro: Calquera fracción sumada con cero da a mesma fracción. (Ten en conta que $0 = 0/1 = 0/2 = 0/3 = \dots$)

$$\frac{-12}{11} + \frac{0}{11} = \frac{-12+0}{11} = \frac{-12}{11}$$

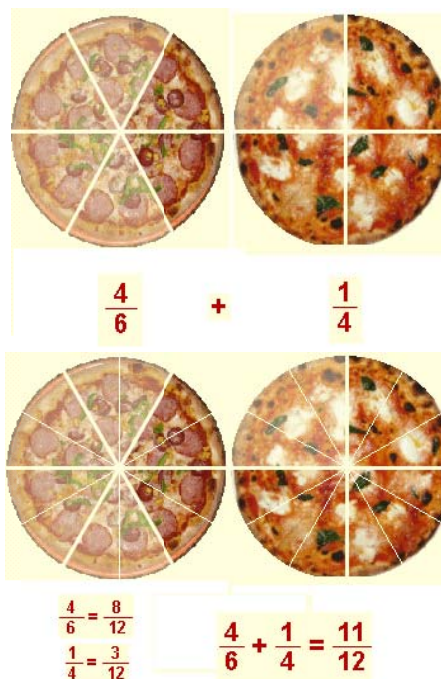
Elemento oposto: Dada unha fracción calquera existe outra (a súa oposta) que sumada con ela da cero:

$$\frac{-12}{11} + \frac{12}{11} = \frac{-12+12}{11} = \frac{0}{11} = 0$$

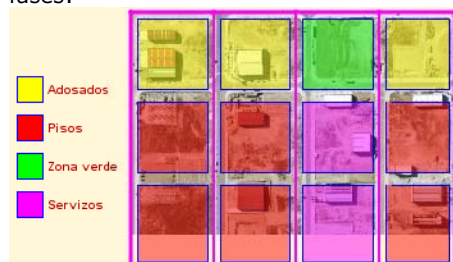
2. Operacións con fraccións

Suma e diferenza

Para **sumar** fraccións redúcense a denominador común, deixase o mesmo denominador e súmanse os numeradores.



O produto de fraccións pode entenderse como o resultado de calcular unha fracción de outra fracción. No exemplo temos unha parcela dividida en catro fases:



As zonas de adosados representan $3/12$ do total da parcela, pero esa fracción pódese interpretar así: hai adosados en 3 fases das 4 ($3/4$) e en cada fase ocupan 1 parte de cada 3 ($1/3$). Total

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$$

Para **restar** fraccións súmase a primeira coa oposta da segunda.

Produto e cociente

Para **multiplicar** dúas ou máis fraccións multiplícanse os numeradores e multiplícanse os denominadores.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Para multiplicar unha fracción por un número enteiro, multiplícase o numerador polo número e déixase o mesmo denominador.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

Se o número polo que se multiplica é -1 o resultado pódese poñer de varias maneiras.

$$\frac{a}{b} \cdot (-1) = \frac{a \cdot (-1)}{b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Números racionais

A **inversa** dunha fracción é outra fracción que se constrúe intercambiando na fracción inicial o denominador co numerador. **Se o numerador inicial é cero a fracción non ten inversa.**

$$A \text{ inversa de } \frac{a}{b} \text{ é } \frac{b}{a} \text{ e represéntase } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Para **dividir** fraccións multiplícase a primeira pola inversa da segunda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Operacións combinadas

Cando se van efectuar operacións combinadas (con fraccións ou outro tipo de números) hai que ter en conta as seguintes **reglas de prioridade**:

- **Se non hai parénteses:**
 - Efectúanse en primeiro lugar todos os produtos e cocientes de esquerda a dereita.
 - Cos resultados obtidos fanse as sumas e restas, tamén de esquerda a dereita.
- **Se hai parénteses:**
 - Efectúanse primeiro as operacións dos parénteses de acordo coas regras anteriores.
 - Se hai parénteses aniñados vanse facendo as operacións do interior cara ao exterior.
 - Debe terse en conta que as parénteses poden estar implícitas, por exemplo, se no numerador ou no denominador dunha fracción hai operacións, debe considerarse que están dentro dunhas parénteses aínda que estas non se escribisen.

Propiedades do produto

Conmutativa: A orde dos factores non cambia o resultado:

$$\frac{-5}{2} \cdot \frac{-13}{7} = \frac{-5 \cdot (-13)}{2 \cdot 7} = \frac{65}{14}$$
$$\frac{-13}{7} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{-13 \cdot (-5)}{7 \cdot 2} = \frac{65}{14}$$

Asociativa: Cando hai varios factores pódense agrupar en calquera orde:

$$\frac{-5}{2} \cdot \left(\frac{-13}{7} \cdot \frac{-10}{5}\right) = \frac{-5}{2} \cdot \frac{130}{35} = \frac{-650}{70}$$
$$\left(\frac{-5}{2} \cdot \frac{-13}{7}\right) \cdot \frac{-10}{5} = \frac{65}{14} \cdot \frac{-10}{5} = \frac{-650}{70}$$

Elemento neutro: Calquera fracción multiplicada por un da a mesma fracción.

$$\frac{-5}{2} \cdot 1 = \frac{-5}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{-5 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{-5}{2}$$

Elemento inverso: Dada unha fracción calquera (*excepto as de numerador igual a cero*) existe outra (a súa inversa) que multiplicada con ela da un:

$$\frac{-4}{3} \cdot \frac{3}{-4} = \frac{-4 \cdot 3}{3 \cdot -4} = \frac{-12}{-12} = 1$$

$\frac{3}{-4}$ é a **fracción inversa** de $\frac{-4}{3}$

Distributiva: Cando se multiplica unha fracción por unha suma de fraccións pódese multiplicar a fracción por cada sumando e realizar a suma despois:

$$\frac{10}{3} \cdot \left(\frac{14}{9} + \frac{-14}{8}\right) = \frac{10}{3} \cdot \frac{-14}{72} = \frac{-140}{216}$$
$$\frac{10}{3} \cdot \frac{14}{9} + \frac{10}{3} \cdot \frac{-14}{8} = \frac{140}{27} + \frac{-140}{24} = \frac{-140}{216}$$

A propiedade contraria da propiedade distributiva é **sacar factor común**. Esta propiedade consiste en que cando hai varios sumandos e todos eles van multiplicados por un mesmo factor, pódese facer primeiro a suma de eses sumandos e multiplicar o resultado polo factor.

EXERCICIOS resoltos

5. Calcula $\frac{-1}{11} + \frac{9}{8}$ $\text{mcm}(11,8) = 88$, logo $\frac{-1}{11} + \frac{9}{8} = \frac{-8}{88} + \frac{99}{88} = \frac{91}{88}$

6. Calcula $\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12}$ $\text{mcm}(5,12) = 60$, logo $\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12} = \frac{-108}{60} - \frac{-35}{60} = \frac{-108+35}{60} = \frac{-73}{60}$

7. Calcula $\frac{-9}{5} - 7$ $\frac{-9}{5} - 7 = \frac{-9}{5} - \frac{35}{5} = \frac{-44}{5}$

8. Calcula $\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12} + \frac{2}{10} + 9 - \frac{-8}{5}$ $\text{mcm}(5,12,10)=60$ logo

$$\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12} + \frac{2}{10} + 9 - \frac{-8}{5} = \frac{-108}{60} + \frac{35}{60} + \frac{12}{60} + \frac{540}{60} + \frac{96}{60} = \frac{575}{60} = \frac{115}{12}$$

9. Calcula $\frac{-1}{7} \cdot \frac{-6}{-5}$ $\frac{-1}{7} \cdot \frac{-6}{-5} = \frac{6}{-35} = -\frac{6}{35}$

10. Calcula $\frac{-1}{7} : \frac{-6}{-5}$ $\frac{-1}{7} : \frac{-6}{-5} = \frac{(-1) \cdot (-5)}{7 \cdot (-6)} = \frac{5}{-42} = -\frac{5}{42}$

11. Calcula $\frac{-1}{7} \cdot (-6)$ $\frac{-1}{7} \cdot (-6) = \frac{6}{7}$

12. Calcula $(-6) \cdot \frac{-1}{7}$ $(-6) \cdot \frac{-1}{7} = \frac{6}{7}$

13. Calcula $\frac{-1}{7} : (-6)$ $\frac{-1}{7} : (-6) = \frac{-1}{7 \cdot (-6)} = \frac{-1}{-42} = \frac{1}{42}$

14. Calcula $(-6) \cdot \frac{-1}{7}$ $(-6) \cdot \frac{-1}{7} = \frac{(-6) \cdot 7}{-1} = \frac{-42}{-1} = 42$

15. Calcula $\frac{4}{6} : 4 + \frac{1}{7} - \frac{6}{4} \cdot 3 - \frac{2}{6} - 2$

Antes de facer ningunha operación simplificamos. Logo facemos os produtos e cocientes de esquerda a dereita e despois as sumas e restas. Lémbrate simplificar sempre antes de operar.

$$\frac{2}{3} : 4 + \frac{1}{7} - \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{3} - 2 = \frac{2}{12} + \frac{1}{7} - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{7+6-189-14-84}{42} = \frac{-274}{42} = -\frac{137}{21}$$

16. Calcula $\frac{4}{6} + \left(\frac{1}{7} \cdot 7\right) \cdot 7 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} : \frac{7}{6}\right)$

Igual que antes, pero agora as parénteses alteran as prioridades.

$$\frac{2}{3} + 1 \cdot 7 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3} + 7 - \frac{9}{14} = \frac{28+294-27}{42} = \frac{295}{42}$$

17. Calcula $\frac{\frac{5}{7} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{2}} : \frac{\frac{2}{7} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}}$

$$\frac{\frac{5}{7} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{2}} : \frac{\frac{2}{7} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{10+21}{14}}{\frac{2+7}{14}} : \frac{\frac{2}{8}}{\frac{2}{2}} = \frac{31}{9} : \frac{2}{4} = \frac{31}{9} : \frac{2}{20} = \frac{31}{9} : \frac{1}{10} = \frac{310}{9}$$

3. Potencias de expoñente enteiro

Definición

Sexa **a** un número racional distinto de cero e **n** un número enteiro. Chámase **potencia** de **base a** e **expoñente n** ao número:

$$a^n = \begin{cases} a & \text{se } n=1 \\ a \cdot a \cdot \dots \text{ n veces } \dots a & \text{se } n>1 \\ 1 & \text{se } n=0 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^{-n}} & \text{se } n<0 \end{cases}$$

Operacións con potencias

Cando se van efectuar operacións combinadas e entre esas operacións hai potencias, ás **regas de prioridade** que coñecemos hai que engadirlle unha nova e no primeiro lugar:

- Efectúanse en primeiro lugar todas as potencias de esquerda a dereita.
- A continuación, todos os produtos e cocientes de esquerda a dereita.
- Cos resultados obtidos fanse as sumas e restas, tamén de esquerda a dereita.

As prioridades anteriores poden alterarse con paréntese, ou tamén poden aplicarse algunhas das propiedades vistas na páxina anterior (produtos ou cocientes de potencias de igual base)

Propiedades das potencias

Para multiplicar potencias de igual base déixase a mesma base e súmanse os expoñentes:

$$\left(\frac{-6}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{-6}{9}\right)^2 = \left(\frac{-6}{9}\right)^5$$

Para dividir potencias de igual base déixase a mesma base e réstanse os expoñentes:

$$\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^5}{\left(\frac{2}{6}\right)^3} = \left(\frac{2}{6}\right)^2$$

Para elevar unha potencia a outra potencia, déixase a base e multiplícanse os expoñentes:

$$\left(\left(\frac{-5}{6}\right)^5\right)^3 = \left(\frac{-5}{6}\right)^{15}$$

Para elevar un produto a unha potencia pódese elevar cada factor a esa potencia e multiplicar despois:

$$(5 \cdot 9)^4 = 5^4 \cdot 9^4$$

Para elevar unha fracción a unha potencia elévanse á mesma o numerador e o denominador:

$$\left(\frac{-1}{9}\right)^4 = \frac{(-1)^4}{9^4}$$

Ollo:

$$(-5)^4 = 625$$

$$-5^4 = -625$$

EXERCICIOS resoltos

18. Calcula $\left(\frac{5}{9}\right)^4$ $\left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{5^4}{9^4} = \frac{625}{6561}$

19. Calcula $-\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}$ $-\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2} = -\left(\frac{5}{-2}\right)^2 = -\frac{25}{4}$

20. Calcula 3^{-4} $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

21. Calcula $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

22. Calcula $-\frac{5}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \frac{6}{7} : \frac{3}{4} : (-1)^0$

Facemos primeiro as potencias e logo aplicamos as prioridades anteriores:

$$-\frac{5}{3} - \frac{1}{8} : \frac{6}{7} : \frac{3}{4} : 1 = -\frac{5}{3} - \frac{3}{28} : \frac{3}{4} : 1 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{7} : 1 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{7} = -\frac{38}{21}$$

23. Transforma 1000 en potencia de 10 $1000 = 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$

24. Transforma 0,00001 en potencia de 10 $0,00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$

25. Transforma 16 en potencia de 2 $16 = 2^4$

26. Transforma 0,0016 en potencia de 5 $0,0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1}{625} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

27. Expresa cada termo como potencia de 10 e simplifica

$$\frac{(-0,1)^{-2} : (-1000)^2 \cdot (0,01)^2}{0,01^{-2} \cdot 10^{-2}} = \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^2 : (-10^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{10^2}\right)^{-2} \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-2} : 10^6 \cdot 10^{-4}}{10^4 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-4}}{10^2} = \frac{10^{-12}}{10^2} = 10^{-14}$$

28. Expresa cada termo como potencia de 4 e simplifica

$$\frac{16 \cdot \frac{1}{(-64)^{-2}} \cdot \frac{1}{64^{-2}}}{(-64) : 4} = \frac{4^2 \cdot \frac{1}{(-4^3)^{-2}} \cdot \frac{1}{(4^3)^{-2}}}{(-4^3) : 4} = \frac{4^2 \cdot 4^6 \cdot 4^6}{-4^3 : 4} = -\frac{4^{14}}{4^2} = -4^{12}$$

29. Simplifica todo o posible a fracción seguinte de maneira que o resultado quede en forma de produtos e cocientes de potencias de expoñente positivo.

$$\left(\frac{(2^{-2} \cdot 3)^2 \cdot 5^3}{2^3 \cdot (3 \cdot 7^3)^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-6}}\right)^2 = \left(\frac{3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6}{2^7}\right)^2 = \frac{3^8 \cdot 5^6 \cdot 7^{12}}{2^{14}}$$

Números racionais

4. Notación científica

Produtos e cocientes por potencias de 10

Sexa n un número enteiro positivo. Estas son as regras para multiplicar ou dividir un número racional por 10^n :

- **Multiplicar por 10^n** (equivale a dividir por 10^{-n})
 - Se o número é enteiro engádense á dereita tantos zeros como indique o expoñente.

Se non é enteiro desprázase a coma cara á dereita tanto como indique o expoñente, completando con zeros se é preciso.

Números moi grandes ou moi pequenos

Dise que un número está escrito en **notación científica** se ten o seguinte aspecto:

$$c_0, c_1 c_2 \dots c_p \cdot 10^n$$

onde c_0 é unha cifra distinta de cero, c_1, c_2, \dots, c_p son cifras decimais e n é un número enteiro (positivo, cero ou negativo). Dise que n é a **orde de magnitude** do número.

Este tipo de notación é especialmente adecuada para o tratamento de números moi grandes ou moi pequenos porque, a causa da súa lonxitude, é doado equivocarse coas súas cifras e desta maneira a orde de magnitude infórmanos con claridade do seu tamaño.

O nome é debido a que este tipo de números aparecen con frecuencia no ámbito da ciencia.

Operacións en notación científica

Chega ter en conta as operacións con potencias. Fíxate nos exemplos seguintes:



A galaxia de Andrómeda ten un diámetro de 100.000 anos-luz e está situada a uns 2000000 de anos luz: cal é o seu diámetro e canto dista en Km?

Velocidade da luz: 300000 km/sg

Nun ano:

$$300000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9.460.800.000.000 \text{ km} = 9,4608 \cdot 10^{12}$$

$$\text{Diámetro da galaxia: } 10^5 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} = 9,4608 \cdot 10^{17}$$

$$2 \cdot 10^6 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} = 1,8922 \cdot 10^{19}$$



Cantos átomos de osíxeno caben ao longo dunha bacteria?

$$\frac{1,59 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-7}} = 1,325 \cdot 10^4$$

Cantos núcleos de osíxeno caben ao longo dun átomo?

$$\frac{1,2 \cdot 10^{-7}}{6,55 \cdot 10^{-12}} = 0,1832 \cdot 10^5$$

en notación científica = $1,832 \cdot 10^4$

$72639 \cdot 10^7 = 726390000000$

$\frac{72639}{10^7} = 72639 \cdot 10^{-7} = 0,0072639$

$12,88003 \cdot 10^7 = 128800300$

$\frac{50,83}{10^7} = 50,83 \cdot 10^{-7} = 0,000005083$

Coa calculadora

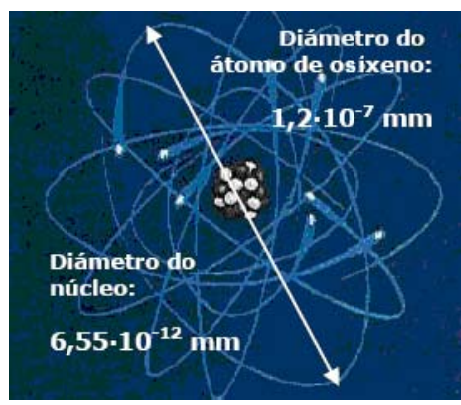
Para introducir na calculadora números en notación científica como:

- ▶ $9,0043 \cdot 10^{13}$
Teclaea 9 . 0043 EXP 13
Aparecerá: 9.0043 ¹³
- ▶ $6,0743 \cdot 10^{-18}$
Teclaea 6 . 0743 EXP +/- 18
Aparecerá: 6.0743 ⁻¹⁸

Se introduces :

- ▶ $900,43 \cdot 10^{13}$
Teclaea 900 . 43 EXP 13
Aparecerá: 900.43 ¹³

E premendo = sae o n^o en notación científica: 9.0043 ¹⁵



EXERCICIOS resoltos

- 30.** Calcula $63.785 \cdot 10^8$ $6.378.500.000.000$
- 31.** Calcula $133,75078 \cdot 10^{10}$ $1.337.507.800.000$
- 32.** Calcula $30189 \cdot 10^{-2}$ $\frac{30189}{100} = 301,89$
- 33.** Calcula $626,2 \cdot 10^{-5}$ $\frac{626,2}{100000} = 0,006262$
- 34.** Pasa a forma científica o número 94494000 $9,4494 \cdot 10^7$
- 35.** Pasa a forma científica o número 0,0000007308 $7,308 \cdot 10^{-7}$
- 36.** Efectúa as seguintes operacións deixando o resultado en notación científica:
 $(5,6733 \cdot 10^2) \cdot (1,6258 \cdot 10^{-6})$ $9,22365114 \cdot 10^{-4}$
- 37.** Efectúa as seguintes operacións deixando o resultado en notación científica:
 $(1,2319 \cdot 10^{-9}) \cdot (8,4798 \cdot 10^{-1})$
 $10,44626562 \cdot 10^{-10} = 1,044626562 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 1,044626562 \cdot 10^{-8}$
- 38.** Efectúa as seguintes operacións deixando o resultado en notación científica:
 $\frac{9,9989 \cdot 10^{11}}{1,6422 \cdot 10^{-10}}$ $6,0887224455 \cdot 10^{21}$
- 39.** Efectúa as seguintes operacións deixando o resultado en notación científica:
 $\frac{1,3472 \cdot 10^{-10}}{3,217 \cdot 10^4}$
 $0,4187752564501 \cdot 10^{-14} = 4,187752564501 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-14} = 4,187752564501 \cdot 10^{-15}$

Números racionais

5. Medida de erros

Aproximacións

Na vida real adoitan presentarse situacións nas que non se pode, ou non interesa realizar cálculos con valores exactos, ben porque estes non se coñecen, ben porque a información que ofrece o resultado exacto é irrelevante. Nestas situacións recórrese ao cálculo con aproximacións. Nas imaxes da dereita móstranse algunhas destas situacións na vida real.

A maneira máis habitual de efectuar unha aproximación é a denominada **redondeo**. Esta operación pódese aplicar a números enteiros ou a decimais. O concepto de redondeo é bastante intuitivo e entenderalo perfectamente a partir dos exemplos e dos exercicios resoltos.

Hai outras formas de aproximación, pero veralas con máis detalle o próximo curso.

Aprox. por defecto: 2,7 Aprox. por exceso: 2,8
 Valor máis probable: 2,75



Erro absoluto e erro relativo

Presentamos aquí unha serie de medidas que se usan para controlar os erros nos cálculos aproximados.

- **Erro absoluto:** É a diferenza (en valor absoluto) entre o valor exacto e o aproximado. Ten as mesmas unidades que os valores que se usan.
- **Cota de erro:** É a lonxitude do intervalo, en torno ao valor aproximado, no que pode atoparse o valor exacto. Esta medida úsase cando non se coñece o valor exacto.
- **Erro relativo:** É o cociente entre o erro absoluto e o valor exacto. Non ten unidades e pode expresarse tamén en forma de porcentaxe. Cando o valor exacto non se coñece, o erro relativo pódese calcular dividindo a cota de erro polo valor aproximado.

Realizamos unha consulta en Internet usando varios buscadores e obtemos os resultados que veis abaixo. Observa que en case todos se usa a palabra **aproximadamente**.

Google: 120 000 000. Redondeo nas decenas de millón. O valor exacto estará entre 115 000 000 e 125 000 000
 Ask: 26 900 000. Redondeo nas centenas de millón. O valor exacto estará entre 26 850 000 e 26 950 000
 Yahoo: 269 000 000. Redondeo nas unidades de millón. O valor exacto estará entre 268 500 000 e 269 500 000

O valor exacto non é importante aquí. O valor aproximado é suficiente e permítenos comparar uns buscadores con outros.

Abaixo tes unha factura dunha editorial pola venda dun libro. Nela infíricase que o prezo do exemplar sen IVE é de 34'62€ ao que hai que sumarlle un 4% de IVE.

34'62 · 0'04 = 1'3848, pero como a menor unidade monetaria é o céntimo, na factura **redondéase a cantidade nas centésimas**, é dicir a 1'38€

EDITORIAL AVD				FACTURA	
Número factura		Data		Referencia	
000000		dd/mm/aaaa		000000	
CLIENTE: Nome e apelidos				Dirección	
N.I.F.:					
Cantidad	Código	Artículo	Precio por unidad	% IVE	Subtotal sen IVE
1	84-609-1019-9	CÓDIGO CIVIL. (L. con máisaxes)	34'62	4	34'62
Total sen IVE:					34'62
Descuento	%	Dto P. Pago	IVE %	Base Imponible	Importe IVE
			4	34'62	1'38
TOTAL FACTURA					36'00 €

EXEMPLO 1

No exemplo da factura o IVE era o 4% de 34'62 €, é dicir,

$$0'04 \cdot 34'62 = 1'3848 \approx 1'38 \text{ €}$$

Valor exacto do IVE: 1'3848
 Valor aproximado: 1'38

ERRO ABSOLUTO = $|1'3848 - 1'38| = 0'0048 \text{ €}$
ERRO RELATIVO = $\frac{0'0048}{1'3848} \approx 0'003466 \approx 0'35 \%$

O erro relativo é máis significativo:

se o valor exacto fose 0'0148 e o aproximado 0'01, o erro absoluto sería o mesmo: 0'0048, pero

$$\text{erro relativo sería } \frac{0'0048}{0'01} = 0'48 = 48 \%$$

EXEMPLO 2

Resultados Google:
 Valor exacto: DESCOÑECIDO
 Valor aproximado: 120 000 000

Resultados Ask:
 Valor exacto: DESCOÑECIDO
 Valor aproximado: 26 900 000

Sen coñecer o valor exacto non podemos atopar o erro absoluto, pero as colas de ceros suxiren un redondeo nas decenas de millón en Google e nas centenas de millón en Ask. Os valores exactos estarán entre 115 000 000 e 125 000 000 para Google e entre 26 850 000 e 26 950 000 para Ask.

Google
COTA DE ERRO = $|125\,000\,000 - 120\,000\,000| = 5\,000\,000$
ERRO RELATIVO = $\frac{5\,000\,000}{120\,000\,000} \approx 0'0417 \approx 4'17 \%$

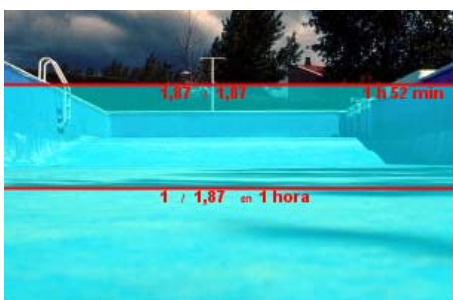
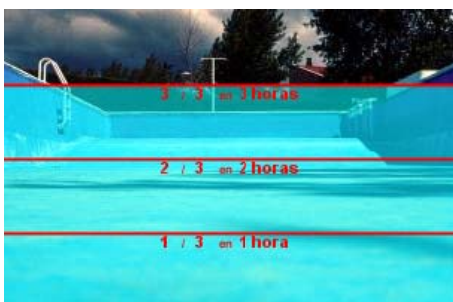
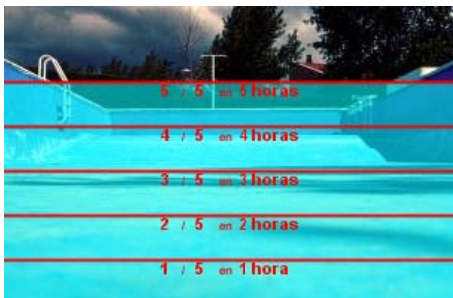
Ask
COTA DE ERRO = $|26\,950\,000 - 26\,900\,000| = 50\,000$
ERRO RELATIVO = $\frac{50\,000}{26\,900\,000} \approx 0'001859 \approx 0'19 \%$

EXERCICIOS resoltos

40. Redondea nas centésimas 171,39664703 171,40
41. Redondea nas dezmilésimas e pasa a notación científica 0,0065439
 $0,0065 = 6,5 \cdot 10^{-3}$
42. Redondea nas decenas de millar e pasa a notación científica 859.417.590
 $859.420.000 = 8,5942 \cdot 10^8$
43. 460.000.000 é un redondeo nas decenas de millón de 456.099.072. Calcula o erro absoluto e o relativo.

$$\text{Erro absoluto} = |460.000.000 - 456.099.072| = 3.900.928$$

$$\text{Erro relativo} = 3.900.928 / 456.099.072 \approx 0,0085528085 \approx 0,86\%$$



6. Aplicacións

Problemas de aplicación

PROBLEMA 1

Para encher a piscina dun chalé dispónse de dúas entradas de auga. Se só se usa a primeira, a piscina tarda 5 horas en encherse. Se só se usa a segunda tarda 3 horas. Canto tardará en encherse coas dúas billas abertas á vez?

SOLUCIÓN:

Se tarda 5 horas en encherse ca primeira billa, cada hora encherá $1/5$ do total da piscina.

Se coa segunda tarda 3 horas, cada hora encherá $1/3$ da piscina.

Si están abertas as dúas, cada hora encherá

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

da piscina, polo que tardará en enchela $15/8$ de hora, é dicir, 1,87 horas = **1 hora 52 minutos**.

Números racionales

PROBLEMA 2.

O **triángulo de Sierpinski** é unha figura xeométrica dun tipo especial denominado **fractal**. Constrúese en forma recursiva a partir dun triángulo equilátero.

O triángulo de Sierpinski de **nivel 1** obtense quitándolle ao triángulo anterior o triángulo equilátero que se obtén unindo os puntos medios de cada lado.

O de **nivel 2** obtense repetindo o proceso sobre os tres triángulos que forman o triángulo de Sierpinski de nivel 1.

O de **nivel 3** é o mesmo aplicado ao nivel 2 e o proceso continúa de forma indefinida. *De feito, o auténtico triángulo de Sierpinski é a figura xeométrica que resulta de aplicar este proceso infinitas veces.*

Se a área do triángulo inicial é de 1 m^2 , Cal é a área do triángulo de Sierpinski de nivel 4?

SOLUCIÓN:

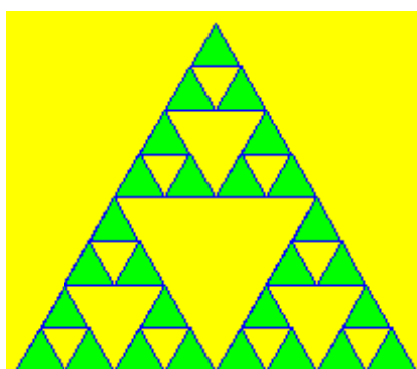
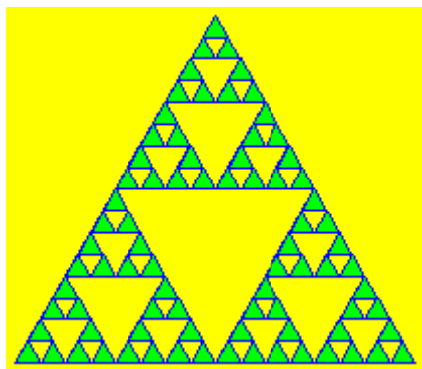
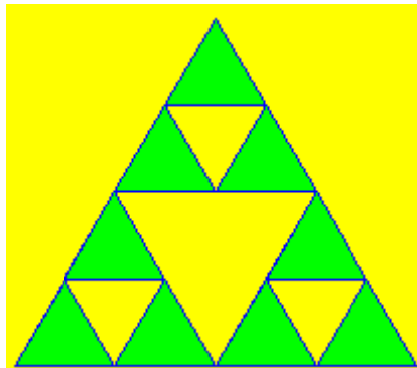
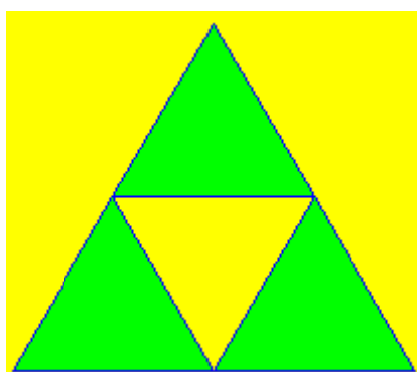
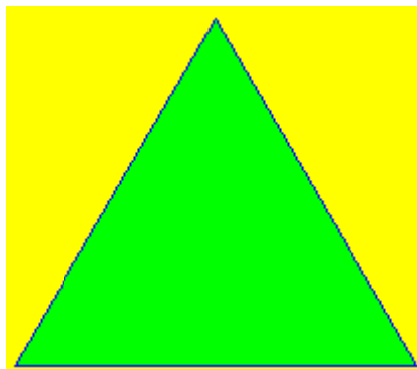
É doado de ver que a área do triángulo de cada nivel son as tres cuartas partes da área do nivel anterior, así,

a área do triángulo de nivel 1 será $\frac{3}{4} \text{ m}^2 = 0,75 \text{ m}^2$

a área do triángulo de nivel 2 será: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ m}^2$

a de nivel 3 será $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \text{ m}^2$ e o de nivel 4 será

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256} \text{ m}^2 = 0,3164 \text{ m}^2$$



PROBLEMA 3.

O aire fai presión sobre cada cm^2 da superficie terrestre coa forza de 1 kg. Se a superficie do planeta é duns 510 millóns de km^2 , canto pesa a atmosfera?.

Se o planeta pesa unhas $6 \cdot 10^{21}$ Tm, cantas veces é máis pesado o planeta ca a atmosfera?

SOLUCIÓN:

$$1 \text{ km}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2$$

$$510.000.000 \text{ km}^2 = 5,1 \cdot 10^8 \text{ km}^2 = 5,1 \cdot 10^8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = 5,1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^2.$$

Como o peso sobre cada cm^2 é de 1 kg,

a atmosfera pesa $5,1 \cdot 10^{18}$ kg

$$1 \text{ Tm} = 1000 \text{ kg} = 10^3 \text{ kg}$$

$$6 \cdot 10^{21} \text{ Tm} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}. \quad 10^{24}/10^{18} = 10^6 = 1.000.000$$

O planeta é, aproximadamente, un millón de veces máis pesado que a atmosfera.

Con algo máis de precisión:

$$(6/5,1) \cdot 10^6 = 1,18 \cdot 10^6 \text{ veces.}$$



PROBLEMA 4.

En xoiería úsase a **onza troy (oz)** como unidade de peso para o ouro. Unha onza troy pesa 31,1034768 g. Se o prezo do ouro é de 273 €/oz, calcula o prezo dun gramo de ouro.

Certo xoieiro que traballa o ouro dispón dunha balanza que comete un erro máximo de 5 centésimas de gramo por gramo. Co prezo anterior, canto pode gañar ou perder por cada onza e por cada gramo a causa do erro?

SOLUCIÓN:

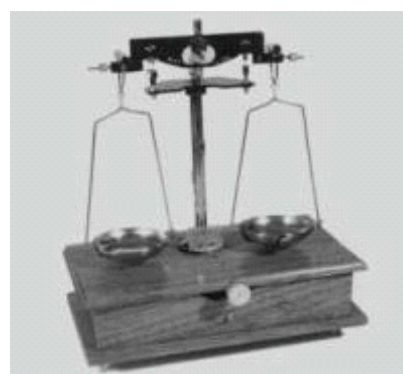
1 gramo custa $273/31,1034768 \approx 8,78$ €

(Redondeamos nos céntimos)

Un erro de 0,05 g por gramo dá un erro relativo de $0,05/1 = 0,05 = 5\%$, por tanto, o xoieiro pode gañar o 5% de 273€ nunha onza e o 5% de 8,78€ nun gramo:

$$5\% \text{ de } 273\text{€} = 0,05 \cdot 273 \approx \mathbf{13,65 \text{ €/oz}}$$

$$5\% \text{ de } 8,78\text{€} = 0,05 \cdot 8,78 \approx \mathbf{0,44\text{€/g}}$$



Números racionais



Para practicar

1. O concello dunha cidade vende $\frac{1}{3}$ dun solar a unha empresa construtora e $\frac{3}{4}$ do resto a outra, quedando aínda 5 Ha sen vender. Que superficie ten o solar?
2. O importe da reparación dun coche nun taller é de 382€ sen IVA. A canto ascende a reparación cun IVA do 16%?
3. Pagamos por un vestido 280€ e, na etiqueta, indicánnos que se lle aplicou unha rebaixa do 20%. Cal era o prezo do vestido antes do desconto? (*Redondea o resultado nos céntimos*).
4. Que cantidade de viño hai almacenado en once caixas e un terzo se cada caixa ten 24 botellas de tres cuartos de litro cada unha?
5. Unha billa enche un depósito en 4 horas e outra faino en 13 cuartos de hora. Que fracción do depósito enche cada unha por separado nunha hora? E as dúas xuntas? Canto tardarán en encher o depósito as dúas ao mesmo tempo?
6. Nun almacén venden café en paquetes de $\frac{1}{4}$ kg e descafeinado en paquetes de $\frac{1}{3}$ kg. O prezo por kg de ambas variedades é o mesmo. Un bar mercou 23 paquetes de café normal e 21 de descafeinado, pagando un total de 71,46€. Cal é o prezo dun kg de café?
7. Quero facer unha copia de seguridade dos arquivos do meu PC que ocupan 188 GB Cantos DVD's de 4,5 GB necesito polo menos para facelo? E se uso CD's de 700 MB? Cantos dos antigos disquetes de 1,4 MB serían necesarios? E dos aínda máis vellos que eran de 360 KB? (Utiliza a táboa adxunta).
8. Sabendo que o raio do planeta Xúpiter é de 71492 km, calcula o seu volume. Se a súa masa é de $1,9 \cdot 10^{27}$ kg, calcula a súa densidade en g/cm^3 .
9. En condicións normais, nun mol de nitróxeno hai $6,022 \cdot 10^{23}$ moléculas de nitróxeno e pesan 28 gramos. Calcula o peso en gramos dunha molécula de nitróxeno.
10. Medimos unha parcela rectangular cunha longa corda con marcas cada metro. (Ver medidas no cadro adxunto). Repetimos a medida cun teodolito, mellorando a precisión. Calcula as cotas de erro que se cometen ao calcular a superficie en cada caso. Co prezo que se indica, calcula as maiores diferenzas de custe en cada caso segundo a medida que tomemos.
11. Unha empresa de demoscopia realizou unha enquisa de intención de voto, obtendo os resultados que ves abaixo. Con estes datos, a cadea de televisión ABCD informa de que o PBP* gañará as eleccións. Pola súa banda, a cadea DCBA di que hai un empate técnico entre o PBP e o PTC*. Quen cres que ten razón?

Coa corda:
b está entre 652 m e 653 m
h está entre 503 m e 504 m

Co teodolito:
b está entre 65236 cm e 65237 cm
h está entre 50365 cm e 50366 cm

Prezo do $\text{m}^2 = 944 \text{ €}$

A unidade mínima de información é o bit (1 b) (*Con b minúscula*)

1 Byte = 1 B (*Con B maiúscula*) = 8 b

1 KiloByte = 1 KB = 2^{10} B = 1024 Bytes
(aproximadamente mil)

1 MegaByte = 1 MB = 2^{10} KB = 2^{20} B
(aproximadamente un millón)

1 GigaByte =
1GB = 2^{10} MB = 2^{20} KB = 2^{30} B
(aproximadamente mil millóns)

* PBP: Partido para Baixar o Paro
* PTC: Partido polo Traballo na Casa

Intención de voto:

PBP = 42,46 %
PTC = 39,80 %

Marxe de erro na enquisa: 2,66 %

Para saber máis



Cal é o seguinte dun número racional?

Recorda que esta era a pregunta que propúñamos ao iniciar o tema. Para aclarar ideas podemos tomar o cero. Cal é o seguinte do cero? Se alguén dixera que é o un, poderíaselle contestar que o $0,5 = \frac{1}{2}$ é un número racional que está entre o cero e o un. Podemos afirmar que o $0,1$ é o seguinte. Pero, de novo, podemos argumentar que o $0,05 = \frac{1}{20}$ é un número racional que está entre cero e $0,1$. E así poderíamos seguir indefinidamente.

De feito, pódese demostrar que dadas dúas fraccións

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

a fracción que se obtén sumando os numeradores e sumando os denominadores está entre ambas, é dicir:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Polo tanto, parece claro que é imposible saber cal é o seguinte dun número racional calquera.

Ou será posible para algúns? Non parece obvio que o seguinte do número $9,129999999999\dots$ é o número $9,13$?

Analicemos isto con máis detalle. O primeiro é un decimal periódico mixto e o segundo é un decimal exacto.

A fracción xeratriz de $9,129999\dots$ é $\frac{9129-912}{900} = \frac{8217}{900} = \frac{913}{100}$

Pola súa banda, a fracción xeratriz de $9,13$ é $\frac{913}{100}$

Polo tanto, resulta que **non é o seguinte, é o mesmo número.**

Números racionais



Lembra o máis importante

Os números racionais

Un **número racional** é unha fracción e todas as súas equivalentes.

Todo nº racional se pode expresar como un **decimal periódico** e viceversa.

Os números racionais están ordenados e pódense representar nunha recta. Os números enteiros tamén son números racionais.

Operacións con fraccións

Para **sumar e restar** redúcese a denominador común, déixase ese denominador e súmanse ou réstanse os numeradores.

Para **multiplicar e dividir**:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Para **eleva a potencias**:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

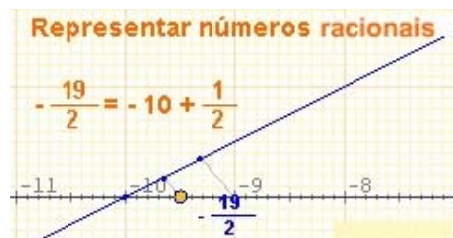
Prioridades nas operacións

- Primeiro efectúanse as potencias de esquerda a dereita.
- Despois os produtos e cocientes, tamén de esquerda a dereita.
- Por último, as sumas e restas de esquerda a dereita.
- As prioridades pódense alterar con parénteses.

Notación científica

Os números moi grandes ou moi pequenos exprésanse en notación científica $x \cdot 10^n$

Para operar con números en notación científica aplicamos as propiedades das potencias.



Potencias

Se $n > 0$, $a^n = \overset{n \text{ veces}}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}$

Se $a \neq 0$, $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

En particular:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Medida de erros

O **erro absoluto** é a diferenza positiva entre o valor exacto e o valor aproximado.

O **erro relativo** é o cociente entre o valor aproximado e o exacto, adoita expresarse en %.

A **cota de erro** dunha aproximación é o erro absoluto máximo posible.

Autoavaliación



1. Escribe a fracción xeratriz de 6,292929....

2. Ordena de menor a maior as seguintes fraccións:

$$\frac{-9}{4}, \frac{-1}{11}, \frac{3}{5}, -1, \frac{-9}{10}$$

3. Calcula o resultado das seguintes operacións:

$$\frac{-9}{4} + \frac{3}{7} \cdot \frac{-1}{11}$$

4. Calcula o resultado das seguintes operacións:

$$\left(\frac{-9}{4} + \frac{3}{7}\right) \cdot \frac{-1}{11}$$

5. Calcula o resultado das seguintes operacións:

$$\frac{\frac{-9}{4}}{\frac{3}{7} + \frac{-1}{11}}$$

6. Calcula o resultado de $\left(\frac{-11}{12}\right)^{-2}$

7. Simplifica a seguinte expresión deixando o resultado como produtos ou cocientes de potencias de expoñente positivo:

$$\left(\frac{11^{-9} \cdot 12^{-1}}{11^{-7} \cdot 12^3}\right)^{-9}$$

8. Calcula $(5,4 \cdot 10^{-9}) \cdot (7,2 \cdot 10^{-7})$

9. Redondea nas dez milésimas 35407,03048664.

10. Un obreiro tarda 4 días en levantar un valo. Outro tardaría 7 días. Canto tardarían traballando xuntos?

Solucións dos exercicios para practicar

1. 30 Ha.
2. 443,12 €
3. 350,00 €
4. 206 litros de viño.
5. a) A primeira enche $\frac{1}{4}$ do depósito nunha hora e a segunda $\frac{4}{13}$.
b) As dúas xuntas enchen $\frac{29}{52}$ nunha hora.
c) Tardan $\frac{52}{29}$ horas en enchelo (1 h 47 min aprox.)
6. 5,60 €/kg.
7. 42 DVD's, 276 CD's, 137.509 discos de 1,4 MB, 547590 discos de 360 KB.
8. $1,53 \cdot 10^{15}$ Km³. 1,24 g/cm³.
9. $4.65 \cdot 10^{-23}$ g
10. a) Coa corda a cota de erro é 1 m, co teodolito 1 cm.
b) O prezo varía en 1.091.264 € ca corda e en 10.912,83 € co teodolito.
11. Ten razón a cadea DCBA, porque o peor resultado posible do PBP (partido gañador a priori) é 39,80% dos votos, peor que o mellor resultado posible do PTC 42,46%.

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. 623/99
2. $-9/4 < -1 < -9/10 < -1/11 < 3/5$
3. -705/308
4. 51/308
5. -693/104
6. 144/121
7. $11^{18} \cdot 12^{36}$
8. $3,888 \cdot 10^{-15}$
9. 35407,0305
10. 2 días e 13 horas