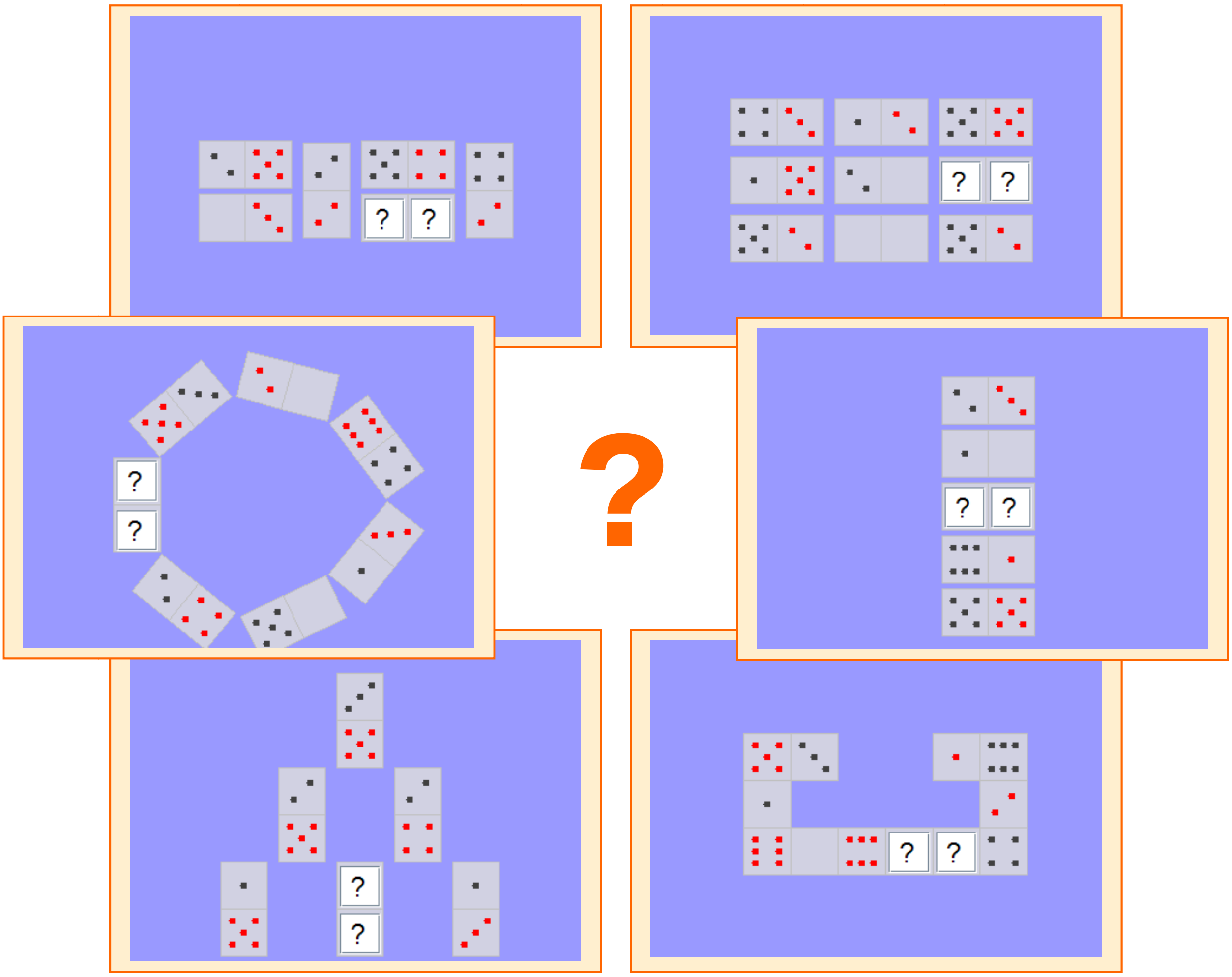
5 Progresións

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Recoñecer unha sucesión de números.
- Recoñecer e distinguir as progresións aritméticas e xeométricas.
- Calcular o termo xeral dunha progresión aritmética e xeométrica.
- Achar a suma dos termos dunha progresión aritmética finita e xeométrica finita ou infinita.
- Achar o produto dos termos dunha progresión xeométrica finita.
- Resolver problemas coa axuda das progresións.
- Resolver problemas de interese composto.

Antes de empezar



Para empezar, propóñoche un xogo sinxelo, trátase de descubrir a ficha de dominó que falta en cada caso.

1. Sucesións

Definición.

Unha **sucesión** é un conxunto ordenado de números reais:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$

Cada elemento da sucesión chámase **termo** da sucesión. Para designalos empréganse subíndices.

Os termos das sucesións pódense determinar a partir de certo criterio, este criterio denomínase **regra de formación**.

Termo xeral

O **termo xeral** dunha sucesión é o que ocupa un lugar calquera, n, **desta**, escríbese a_n

- Hai sucesións o termo xeral das cales é unha expresión alxébrica, que nos permite saber calquera termo da sucesión sabendo o lugar que ocupa, **n**.
- Noutras, cada termo obtense a partir dos anteriores, dise que están dadas en forma recorrente. Unha **relación de recorrencia** é unha expresión alxébrica, que expresa o termo **n** en función dos anteriores.

4, 7, 10, 13,...

Primeiro termo: $a_1=4$
Segundo termo: $a_2=7$
Terceiro termo: $a_3=10$
Cuarto termo: $a_4=13$

Cada termo obtense do anterior sumándolle 3.

$a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7$
$a_3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10$
$a_4 = a_3 + 3 = 10 + 3 = 13$

4, 8, 12, 16,...

Cada termo obtense multiplicando o lugar que ocupa por 4

$a_1 = 1 \cdot 4 = 4$ $a_2 = 2 \cdot 4 = 8$
$a_3 = 3 \cdot 4 = 12$ $a_4 = 4 \cdot 4 = 16$

EXERCICIOS resoltos

1. O primeiro termo dunha sucesión é 4, escribe os catro primeiros termos dela se: "Cada termo é igual ao anterior máis o lugar que ocupa":

Sol: $a_1 = 4 \quad a_2 = 4+2 = 6 \quad a_3 = 6+3 = 9 \quad a_4 = 9+4 = 13$

2. Escribe a regra de formación da seguinte sucesión: 3, 8, 13, 18, ...

Sol: *"Cada termo é igual ao anterior máis 5"*

3. Escribe os cinco primeiros termos da sucesión formada polos cadrados dos números naturais a partires do 1.

Sol: $a_1 = 1 \quad a_2 = 2^2 = 4 \quad a_3 = 3^2 = 9 \quad a_4 = 4^2 = 16 \quad a_5 = 5^2 = 25$

4. Calcula os 4 primeiros termos da sucesión de termo xeral: $a_n = \frac{n}{n+1}$

Sol: $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \quad a_3 = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} \quad a_4 = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$

5. Escribe os 5 primeiros termos dunha sucesión a regra de formación da cal é*: "Cada termo é a suma dos dous anteriores"* $a_1 = 3$ e $a_2 = 7$

Sol: $a_1 = 3 \quad a_2 = 7 \quad a_3 = 3+7 = 10 \quad a_4 = 7+10 = 17 \quad a_5 = 10+17 = 27$

6. Escribe o termo xeral destas sucesións:

a) $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ Sol: $a_n = 1+n$ b) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ Sol: $a_n = 2^n$

2. Progresións Aritméticas

Definición

$2, 5, 8, 11, \ldots \to d = 3 > 0$

Crecente

$7, 5, 3, 1, \ldots \to d = -2 < 0$

Decrecente

Unha **progresión aritmética** é unha sucesión en que cada termo (menos o primeiro) obtense sumando ao anterior unha cantidade fixa **d**, chamada **diferenza** da progresión.

- Se **d>0** os números cada vez son maiores, dise que a progresión é **crecente**.
- Se **d<0** os números cada vez son menores, dise que a progresión é **decrecente**

Termo xeral

3, 5, 7, 9, 11, ...

$a_1=3 \quad d=2$

$\mathbf{a_n = 3 + (n-1)\cdot 2}$

Así por exemplo:
$a_{10} = 3 + 9\cdot 2 = 21$
$a_{100} = 3 + 99\cdot 2 = 201$

Nunha progresión aritmética cada termo é igual ao anterior máis a diferenza. Observa:

$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2\cdot d$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2\cdot d + d = a_1 + 3\cdot d$
$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3\cdot d + d = a_1 + 4\cdot d$

e seguindo así sucesivamente, chégase a:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

O **termo xer** **tmética** é:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$$

onde $\mathbf{a_1}$ é o primeiro termo e **d** a diferenza.

Suma de n termos

2, 4, 6, 8, 10, 12

$2+12=14$
$4+10=14$
$6+8=14$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2+12}{2}\cdot 6 = 42$$

Nunha progresión aritmética finita de n termos, a suma de termos equidistantes dos extremos é igual á suma deles:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

A partir desta propiedade obtense que a suma $S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ dos n primeiros termos dunha progresión aritmética é:

$$\boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n}$$

EXERCICIOS resoltos

7. Determina a diferenza das seguintes progresións aritméticas:

a) $1, 4, 7, 10, 13....$ Sol: $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$
$d = 13 - 10 = 10 - 7 = 7 - 4 = 4 - 1 = 3$

b) $8, 6, 4, 2, 0, ...$ Sol: $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$
$d = 0 - 2 = 2 - 4 = 4 - 6 = 6 - 8 = -2$

c) $2, 6, 10, 14, 18, ...$ Sol: $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$
$d = 18 - 14 = 14 - 10 = 10 - 6 = 6 - 2 = 4$

8. Escribe o termo xeral das seguintes progresións aritméticas:

a) $4, 6, 8, 10, ...$ Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 2$

b) $3, -1, -5, -9, ...$ Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)\cdot(-4) = -4n + 7$

c) $5, 8, 11, 14, ...$ Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)\cdot 3 = 3n + 2$

9. Calcular a suma dos 10 primeiros termos da progresión aritmética: $2, 4, 6, 8, 10, ...$

Sol:
$$a_{10} = a_1 + (10-1)d = 2 + 9\cdot 2 = 20$$
$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2 + 20}{2}\cdot 10 = 11\cdot 10 = 110$$

10. Calcular a suma dos 20 primeiros termos da progresión aritmética: $3, 7, 11, 15, 19, ...$

Sol:
$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = 3 + 19\cdot 2 = 41$$
$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{3 + 41}{2}\cdot 20 = 22\cdot 20 = 440$$

11. O primeiro termo dunha progresión aritmética de diferenza 5 é 4 e o último termo é 499.Acha a suma de todos eles.

$$a_1 = 4 \quad d = 5 \rightarrow 4, 9, 14, 19, ...$$

Hay que calcular el número de términos

Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 499 = 4 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 1$

$$5n = 500 \rightarrow n = 100$$
$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{4 + 499}{2}\cdot 100 = \frac{503}{2}100 = 25150$$

3. Progresións Xeométricas

Definición

3, 6, 12, 24, 48, ...

razón=2

$$r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = 2$$

Unha **progresión xeométrica** é unha sucesión en que cada termo (menos o primeiro) obtense multiplicando o anterior por unha cantidade fixa **r**, chamada **razón** da progresión.

A razón obtense ao facer o cociente entre dous termos consecutivos:

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots \frac{a_n}{a_{n-1}} = r}$$

Termo Xeral

1, 3, 9, 27, 81, ...

$r=3 \qquad a_1=1$

$\mathbf{a_n = 3^{n-1}}$

Nunha progresión xeométrica cada termo é igual ao anterior pola razón. Observa:

$a_2 = a_1 \cdot r \qquad a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 = a_1 \cdot r^3$

e seguindo así sucesivamente, chégase a:

O **termo xeral** dunha **progresión xeométrica** o primeiro termo da cal é $\mathbf{a_1}$ e a razón é **r** é

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Suma de n termos

$1, 2, 4, 8, 16, 32 \qquad r = 2 \;\; ; \;\; n = 6$

$$S = \frac{a_n \cdot r - 1}{r - 1} = \frac{32 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = \frac{63}{1} = 63$$

$$S = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{63}{1} = 63$$

A **suma** dos n **primeiros termos** dunha **progresión xeométrica** de razón **r** é:

$$\boxed{S = \frac{a_n \cdot r - 1}{r - 1}} \text{ ou ben } \boxed{S = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}}$$

Suma de todos os termos

$16, 8, 4, 2, 1, \ldots\ldots; \qquad r = \frac{1}{2}$

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32$$

A **suma** dos **infinitos termos** dunha **progresión xeométrica** de razón **r,** é:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - r}}$$

Produto de n termos

1, 2, 4, 8, 16, 32

$1 \cdot 32 = 32$

$2 \cdot 16 = 32$

$4 \cdot 8 = 32$

$$P = \sqrt{(1 \cdot 32)^6} = \sqrt{2^{30}} = 2^{15}$$

Nunha progresión xeométrica o produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto deles: $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \ldots$

A partir desta propiedade obtense que o produto dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica é:

$$\boxed{P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

EXERCICIOS resoltos

12. Determina a razón das seguintes progresións xeométricas:

a) $1, 2, 4, 8, 16....$ Sol: $r=\frac{a_5}{a_4}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$

$r=\frac{16}{8}=\frac{8}{4}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$

b) $81, 27, 9, 3, 1, ...$ Sol: $r=\frac{a_5}{a_4}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$

$r=\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{9}{27}=\frac{27}{81}=\frac{1}{3}$

13. Escribe o termo xeral das seguintes progresións xeométricas:

a) $4, 12, 36, 108, ...$ Sol: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$

b) $8, 16, 32, 64, ...$ Sol: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^3 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$

14. Calcula a suma dos 10 primeiros termos da progresión xeométrica: $1, 2, 4, 8, 16, ...$

Sol: $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}=2 \rightarrow S=\frac{a_1\cdot(r^n-1)}{r-1}=\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=\frac{1024-1}{1}=1023$

15. Calcula a suma dos termos dunha progresión xeométrica finita de primeiro termo 1, razón 3 e último termo 243:

Sol: $a_1 = 1$; $a_n = 243$; $r = 3$ $\rightarrow S=\frac{a_n\cdot r-a_1}{r-1}$ $=\frac{243\cdot 3-1}{3-1}=\frac{728}{2}=364$

16. Calcula a suma de todos os termos da progresión xeométrica: $8, 4, 2, 1, ...$

Sol: $a_1 = 8$; $r=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \rightarrow S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=16$

17. Calcula o produto dos 8 primeiros termos da progresión xeométrica: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, ...$

Sol:

$a_1=\frac{1}{8}$; $r=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=2$; $a_8=\frac{1}{8}2^7=2^4=16$

$P=\sqrt{(a_1\cdot a_8)^8}=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\cdot 16\right)^8}=\sqrt{2^8}=2^4=16$

4. Aplicacións

Interpolación

Interpolar significa colocar outros números entre dous dados. Dados dous números a e b,

- **Interpolar n medios diferenciais** entre a e b é atopar x_1, x_2, ..., x_n números de forma que a, x_1, x_2, ..., x_n, b formen unha progresión **aritmética**.
- **Interpolar n medios proporcionais ou xeométricos** entre a e b é atopar x_1, x_2, ...,x_n números de forma que a, x_1, x_2, ..., x_n, b formen unha progresión **xeométrica**.

Interpolar 4 medios diferenciais entre 4 e 44.

4, x_1, x_2, x_3, x_4, 44

Progresión aritmética

$44=4+(6-1)\cdot d \to 40=5d \to \mathbf{d=8}$

4, 12, 20, 28, 36, 44

Interpolar 2 medios proporcionais ou xeométricos entre 3 e 24.

3, x_1, x_2, 44

Progresión xeométrica

$24=3\cdot r^3 \to 8=r^3 \to \mathbf{r=2}$

3, 6, 12, 24

Xuro composto

Se ao inverter un capital durante un período de tempo, t, a un rédito, r%, non se retiran os intereses ao finalizar o período de inversión senón que se engaden ao capital dicimos que é un **xuro composto**.

O capital final $\mathbf{C_f}$ obtido ao inverter un Capital C, ao rédito **r %**, durante **t** anos, a **xuro composto** vén dado pola fórmula:

$$C_f = C_0 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Se o tempo vén dado en meses ou días, abonda substituír r polo rédito mensual ou diario e t polo nº de meses ou días.

En canto se converten 2000 € ao 4% anual durante 5 anos?

$$C_f = C_0 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

$$C_f = 1000 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^5 = 1216,65\ €$$

Resolución de problemas

Observa algúns exemplos de problemas resoltos con progresións.

EXEMPLO 1

Atopa a fracción xeratriz de $0,\widehat{2}$

✓ SOLUCIÓN

$$0,\widehat{2} = 0,2+0,02+0,002+\ldots = \frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots$$

É a suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica de primeiro termo 0,2 e razón 0,1.

$$S = \frac{0,2}{1-0,1} = \frac{0,2}{0,9} = \frac{2}{9}$$

EXEMPLO 2

Unha persoa dá esmola durante 17 días, cada día da 1€ máis que el anterior; o primeiro día deu 10€ e o último 26€, canto deu en total?

✓ SOLUCIÓN

As cantidades dadas 10, 11, 12,...., 26 forman unha progresión aritmética de primeiro termo 10 e diferenza 1.

O total é a suma dos 17 termos:

$$S = \frac{10+26}{2}\cdot 17 = 306\ €$$

EXERCICIOS resoltos

18. Interpola 3 medios aritméticos entre 5 e 29

$$5, x_1, x_2, x_3, 29$$

Sol: $29 = 5 + (5-1)\cdot d \rightarrow 24 = 4d \rightarrow d = 6$

$$x_1 = 5 + 6 = 11 \quad x_2 = 11 + 6 = 17 \quad x_3 = 11 + 6 = 17$$

19. Interpola 4 medios xeométricos entre 1 e 243:

$$2, x_1, x_2, x_3, x_4, 486$$

Sol: $486 = 2\cdot r^5 \rightarrow 243 = 2\cdot r^5 \rightarrow r = 3$

$$x_1 = 2\cdot 3 = 6 \quad x_2 = 6\cdot 3 = 18 \quad x_3 = 18\cdot 3 = 54 \quad x_4 = 54\cdot 3 = 162$$

20. Calcular o capital obtido invertendo 2000 € ao 3% de interese composto anual durante 5 anos.

Sol: $C_f = C_0\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 2000\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 = 2318,55\ €$

21. Unha árbore de rápido crecemento multiplica a súa altura por 1'2 cada ano.Se ao comezar o ano medía 0'75 m,que altura terá dentro de 8 anos?

Sol: $a_1 = 0'75\ ;\ a_2 = 0'75\cdot 1'2\ ;\ a_3 = 0'75\cdot 1'2^2 ...... \rightarrow a_8 = 0'75\cdot 1'2^8 = 3'22\ m$

22. Lanzamos unha pelota ao longo dun corredor. En cada bote que dá avanza unha distancia igual á metade da distancia anterior. Se ao oitavo bote cae nun foso de terra e a para ¿que distancia percorrería se antes do primeiro bote percorreu 2 m?

$$a_1 = 2\ ;\ a_2 = 1;\ a_3 = \frac{1}{2};\ a_4 = \frac{1}{4}, ...;\ a_8 = \frac{1}{64}$$

Sol: La distancia que ha recorrido es la suma de todas

$$S = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \frac{2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^8-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{2\left(\frac{1}{256}-1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{2\frac{(-255)}{256}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot 255\cdot 2}{256} = \frac{255}{64} = 3'98\,m$$

Para practicar

1. Completa as sucesións cos termos que faltan:

a) $3, 7, 11, 15, \_\_, \_\_, \dots$

b) $3, 6, 12, 24, \_\_, \_\_, \dots$

c) $32, 16, 8, 4, \_\_, \_\_, \dots$

d) $5, 10, 17, 26, \_\_, \_\_, \dots$

2. Calcula os 4 primeiros termos da sucesión de termo xeral:

a) $a_n = n + 5$

b) $a_n = 2^{n-1}$

c) $a_n = \sqrt[n+1]{n+2}$

d) $a_n = 5n$

3. Calcula o termo xeral das sucesións:

a) $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

b) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

4. Acha o termo 100 da sucesión de termo xeral:

a) $a_n = 3n + 2$

b) $a_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

5. Descobre a lei de recorrencia de cada unha das sucesións:

a) $3, 7, 10, 17, 27, \dots$

b) $3, 6, 12, 24, 48, \dots$

c) $3, 7, 11, 15, 19, \dots$

d) $9, 3, 6, -3, 9, \dots$

6. Calcula o termo xeral das seguintes progresións aritméticas.

a) $4, 7, 10, 13, 16, \dots$

b) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

c) $7, 11, 15, 19, 23, \dots$

d) $3, 4, 5, 6, 7, \dots$

7. Calcula o termo xeral das seguintes progresións xeométricas.

a) $4, 8, 16, 32, 64, \dots$

b) $1, 3, 9, 27, 81, \dots$

c) $16, 8, 4, 2, 1, \dots$

d) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \dots$

8. Calcula a diferenza dunha progresión aritmética se se coñecen:

a) $a_{10} = 30$ e $a_1 = -6$

b) $a_{30} = 95$ e $a_{20} = 45$

9. Calcula a razón dunha progresión xeométrica se se coñece

a) $a_9 = 80$ e $a_8 = 16$

b) $a_{10} = 40$ e $a_7 = 5$

10. Calcula o primeiro termo dunha progresión aritmética se se coñece:

a) $a_{20} = 34$ e $d = 7$

b) $a_{31} = 13$ e $d = 3$

11. Calcula o primeiro termo dunha progresión xeométrica se se coñece:

a) $a_7 = 320$ e $r = 2$

b) $a_6 = 915$ e $r = 3$

12. Calcula o número de termos dunha progresión aritmética finita se o primeiro é 100 o último 420 e a diferenza é 4.

13. Calcula a suma dos primeiros 101 termos da progresión: $1, 4, 7, 17, 20, \ldots$

14. Calcula a suma dos múltiplos de 3 menores de 1000 e maiores que 100

15. Calcula a suma dos primeiros 8 termos da progresión: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

16. Calcula o produto dos primeiros 8 termos da progresión: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots$

17. Calcula a suma dos infinitos termos da progresión: $16, 8, 4, 2, 1, \ldots$

18. Calcula o produto dos primeiros 10 termos da progresión $16, 8, 4, 2, 1, \ldots$

19. Depositamos 6000 € ao 5% de xuro composto anual. Canto diñeiro terei despois de 3 anos?

20. Determina o capital que cun xuro composto do 5% anual, produce 200 € en 4 anos.

21. Acha o capital obtido invertendo 100 € ao 3% de xuro composto anual durante 4 anos?

22. Interpola 6 termos entre 1 e 10 para que formen unha progresión aritmética.

23. Interpola 3 termos entre 1 e 16 para que formen unha progresión xeométrica

24. Nun exame a primeira pregunta valía dous puntos e cada unha das seguintes valía tres puntos máis que a anterior. Se en total hai 50 preguntas, cantos puntos vale o exame?

25. O número inicial de moscas dunha poboación é de 50 e cada tres días o número de moscas duplícase, ¿cantas moscas haberá aos 30 días?

26. Escribe a fracción xeratriz de $1'\widehat{2}$,utilizando a suma dunha progresión.

27. Nunha progresión xeométrica o termo sexto vale 64 e o cuarto é 16. Acha o termo xeral.

28. Os ángulos dun triángulo están en progresión aritmética, se o máis pequeno mide 40º ¿cal é a medida dos outros dous?

Para saber máis

A sucesión de Fibonacci

Unha das sucesións máis coñecidas é a **sucesión de Fibonacci**.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

A sucesión é a solución ao problema que se formula na súa obra ***Liber Abaci***

Unha parella de coellos tarda un mes en alcanzar a idade fértil. Cada vez xera unha parella de coellos que, á súa vez, tras ser fértiles xeran cada mes unha parella de coellos Cantas parellas haberá despois dun número determinado de meses?

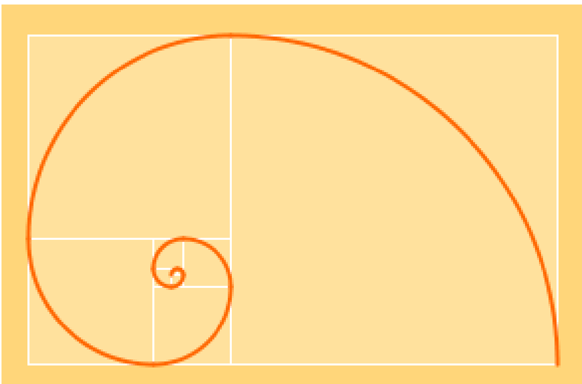
Fórmula de recorrencia:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Termo Xeral:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Espiral de Fibonacci



Número de ouro:

Se dividimos cada número polo anterior a sucesión de cocientes achégase ao número de ouro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Lembra o máis importante

Sucesión:
É un conxunto de infinitos números dados de forma ordenada.

Termo dunha Sucesión:
Cada un dos números que forman a sucesión.

Sucesión decrecente:
É aquela en que cada termo é menor que o anterior.

Sucesión crecente:
É aquela en que cada termo é maior que o anterior.

Progresión Aritmética
É aquela sucesión en que cada termo é igual ao anterior máis unha cantidade constante chamada diferenza da progresión.

Termo xeral $a_n = a_1 + (n-1)d$

Termos equidistantes dos extremos
$a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = a_{n-2} + a_2 = \ldots$

Suma de n termos $S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

Progresión Xeométrica
É aquela sucesión en que cada termo é igual ao anterior multiplicado por unha cantidade constante chamada razón da progresión.

Termo xeral $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Suma de n termos $S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$

Suma dos infinitos termos

$S = \frac{a_1}{1 - r} \qquad -1 < r < 1$

Termos equidistantes dos extremos
$a_n \cdot a_1 = a_{n-1} \cdot a_2 = a_{n-2} \cdot a_2 = \ldots$

Produto de n termos $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

Interpolación
Dados números a e b, interpolar n medios (diferenciais ou xeométricos) entre a e b é atopar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números de forma que $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$ formen unha progresión (aritmética ou xeométrica)

Xuro composto
O capital final C_f obtido ao inverter un Capital C, ao rédito r %, durante t anos, a xuro composto vén dado pola fórmula:
$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

Autoavaliación

1. Escribe o termo 95 da sucesión: $\frac{10}{3}, \frac{11}{4}, \frac{12}{5}, \frac{13}{6}, \ldots$

2. Escribe o termo xeral da sucesión: $-4, -7, -10, -13, \ldots$

3. Escribe o termo xeral da sucesión: $1, 2, 4, 8, \ldots$

4. Escribe o termo 6 da sucesión: $1, 4, 16, 64, \ldots$

5. Acha a suma de todos os termos da progresión: $8, 4, 2, 1, \ldots$

6. Acha a suma dos 100 primeiros termos da progresión: $1, 4, 7, 10, \ldots$

7. Acha o produto dos 8 primeiros termos da progresión: $4096, 512, 64, 8, \ldots$

8. Cánto diñeiro me devolverá o banco se fago unha imposición de 3000 € aprazo fixo durante 5 anos ao 3% de interese composto anual.

9. Calcula a suma de todos os múltiplos de 3 de tres cifras.

10. O pai de Xan decide gardar un euro o día que Xan fai un ano. Irá duplicando a cantidade en todos os aniversarios do seu fillo. Canto diñeiro aforraría o día que faga 13 anos?

Solucións dos exercicios para practicar

1. a) 19 e 23 b) 48 e 96
   c) 2 e 1 d) 37 e 50
2. a) 6, 7, 8, 9, ... b) 1, 2, 4, 8, ...
   c) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, ...$
   d) 5, 10, 15, 20, ...
3. a) $a_n = n$ b) $a_n = n^2$
   c) $a_n = \frac{1}{n}$ d) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$
4. a) $a_{100} = 302$ b) $a_n = \frac{201}{99}$
   c) $a_n = \frac{1}{101}$
5. a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ b) $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$
   c) $a_{n+1} = a_n + 4$ d)
   $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$
6. a) $a_n = 3n + 1$ b) $a_n = 2n - 1$
   c) $a_n = 4n + 3$ d) $a_n = n + 2$
7. a) $a_n = 2^{n+1}$ b) $a_n = 3^{n-1}$
   c) $a_n = 2^{5-n}$ d) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
8. a) 4 b) 5
9. a) 5 b) 2
10. a) -99 b) -77
11. a) 5 b) 5
12. 81
13. 15100
14. 165150
15. 511
16. 16
17. 32
18. 1/32
19. 6945´75
20. 928´05
21. 112´55
22. $\frac{16}{7}, \frac{25}{7}, \frac{34}{7}, \frac{43}{7}, \frac{52}{7}, \frac{61}{7}$
23. 2, 4, 8
24. 3775
25. 16000
26. 11/9
27. $a_n = 2^n$
28. 60 y 80

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. 104/97
2. $a_n = -1 - 3n$
3. $a_n = 2^{n-1}$
4. 1024
5. 16
6. 14950
7. 4096
8. 3477'82
9. 165150
10. 8191