

## Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Distinguir os experimentos aleatorios dos que non o son.
- Achar o espazo da mostra e distintos sucesos dun experimento aleatorio.
- Realizar operacións con sucesos.
- Determinar si dous sucesos son compatibles ou incompatibles.
- Calcular a probabilidade dun suceso mediante a regra de Laplace.
- Calcular probabilidades mediante a experimentación.
- Coñecer e aplicar as propiedades da probabilidade.

Antes de empezar

1. Experimentos aleatorios..... páx. 4  
Espazo da mostra e sucesos  
Técnicas de reconto  
Operacións con sucesos  
Propiedades
2. Probabilidade ..... páx. 7  
Probabilidade dun suceso  
Regra de Laplace  
Propiedades da probabilidade  
Probabilidade experimental  
Simulación

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumen

Autoavaliación

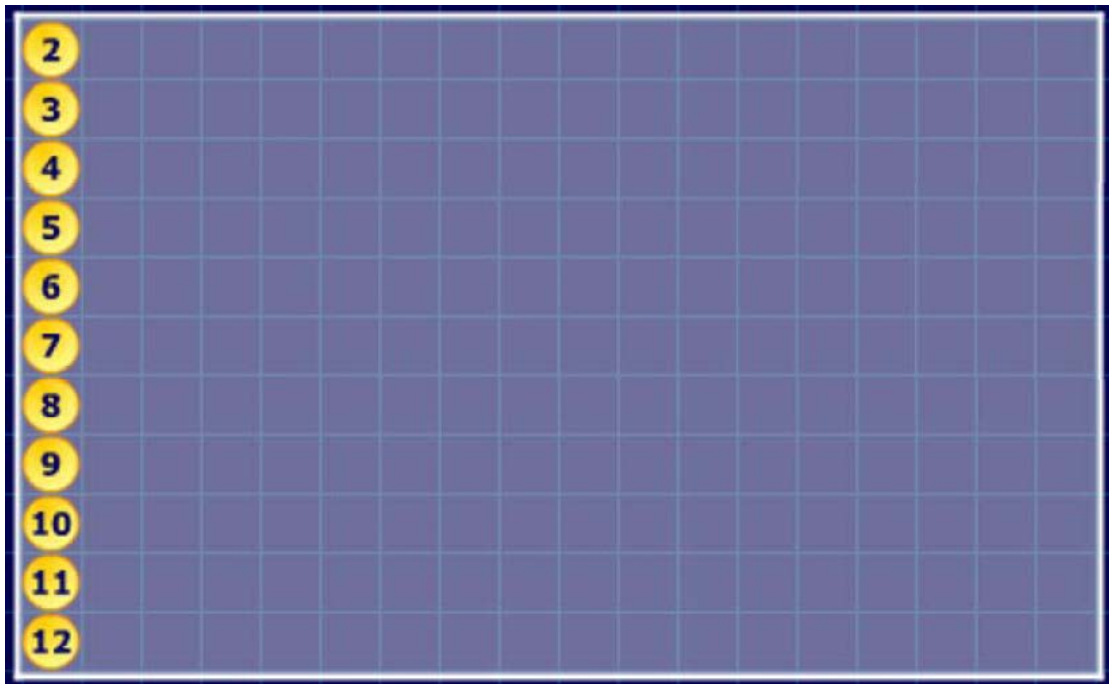
Actividades para enviar ao titor



## Antes de empezar

*"No fondo a teoría da probabilidade é só sentido común expresado con números".*

Pierre Simón de Laplace



### Investiga xogando

Tíranse dous dados, a ficha cuxo número coincide coa suma dos resultados avanza un lugar. Todas teñen a mesma probabilidade de gañar? , por cal apostarías?, tira os dados e compróbaos.

A palabra azar procede do árabe "al zhar", nome co que se designaban os dados pola flor de azahar que levaban nas súas caras.



## 1. Experimentos aleatorios

### Espazo da mostra e sucesos

Un **experimento aleatorio** é aquel que antes de realizalo non se pode predicir o resultado que se vai a obter. En caso contrario dise determinista.

Aínda que nun experimento aleatorio non saibamos o que ocorrerá ao realizar unha "proba", si que coñecemos de antemán todos os seus posibles resultados.

- O **espazo da mostra** é o conxunto de todos os resultados posibles dun experimento aleatorio. Adoitase designar coa letra **E**. Cada un destes posibles resultados chámase **suceso elemental**.
- Chamaremos **suceso** a calquera subconxunto do espazo da mostra. O mesmo espazo da mostra é un suceso chamado **suceso seguro** e o conxunto baleiro,  $\emptyset$ , é o **suceso imposible**.

$\emptyset$ : símbolo co que se designa o conxunto baleiro, o que non ten ningún elemento.

### Técnicas de recuento

En moitas ocasións un experimento aleatorio está formado pola sucesión de outros máis sinxelos, dise **composto**, é o caso de "tirar dous dados", "lanzar dúas ou máis moedas", "extraer varias cartas dunha baralla",... Nestes casos para obter o espazo da mostra pódese utilizar algunha destas técnicas:

- Construír unha **táboa de dobre entrada**, se se combinan dous experimentos simples.
- Facer un **diagrama de árbore**, máis útil se se combinan dous ou máis experimentos simples.

Observa que se o primeiro experimento ten **m** resultados distintos e o segundo **n**, o número de resultados para a combinación de ambos experimentos é **m·n**.

No experimento aleatorio de "tirar un dado cúbico" hai 6 posibles resultados:

**Espazo da mostra**

$E = \{ \text{1 cara, 2 caras, 3 caras, 4 caras, 5 caras, 6 caras} \}$

**Algúns sucesos:**

$A = \{ \text{1 cara, 3 caras, 5 caras} \}$  "saír impar"

$B = \{ \text{2 caras, 4 caras, 6 caras} \}$  "saír múltiplo de 3"

$C = \{ \text{6 caras} \}$  "saír un 6"

No experimento aleatorio de "lanzar dous moedas" hai 4 posibles resultados:

**Espazo da mostra**

$E = \{ \text{cara cara, cara cruz, cruz cara, cruz cruz} \}$

**Algúns sucesos:**

$A = \{ \text{cara cara, cara cruz, cruz cara} \}$  "polo menos unha cara"

$B = \{ \text{cara cara, cara cruz, cruz cara} \}$  "a 1ª é cara"

$C = \{ \text{cara cara, cara cruz} \}$  "ningunha é cara"

### TÁBOA de dobre entrada

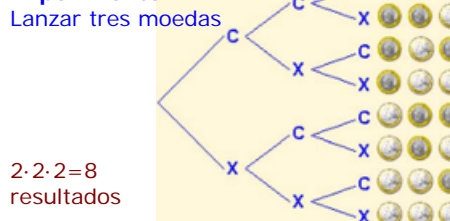
Experimento: Tirar dous dados

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

6·6=36 resultados

### Diagrama de ÁRBORE

Experimento: Lanzar tres moedas



Chamamos **permutacións** de **n** elementos ( $P_n$ ) ás distintas formas de ordenar eses **n** elementos. Coñecer o seu número é útil para realizar determinados problemas de recuento.

Vexamos como se calcula cun exemplo no que queremos ordenar **n** bólas de distintas cores:

- 1 bóla so se pode ordenar de 1 maneira.  $P_1 = 1$
- 2 bólas pódense ordenar de 2 maneiras.  $P_2 = 2 \cdot 1 = 2$
- 3 bólas, hai 6 formas de ordenalas. A 1ª posición pódese ocupar de 3 maneiras, en cada caso a 2ª de 2 e a 3ª de 1.  $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- 4 bólas poderanse ordenar de  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  formas e seguindo con este razoamento **n** bólas pódense ordenar de  $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

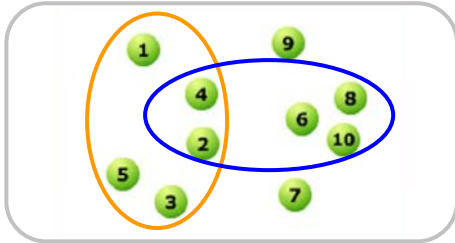
Este produto escríbese de forma máis simplificada **n!** e dise **factorial de n**.

$$P_n = n!$$

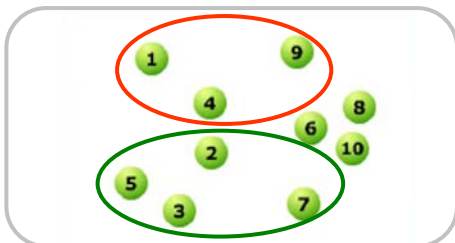
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

lese "factorial de n"

Experimento aleatorio: *Extraer unha bóla e anotar o número.*



$A = \text{"saír menor que 6"}$      $B = \text{"saír par"}$   
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$      $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$   
 $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$      $\bar{B} = \{1, 2, 3\}$   
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$   
 $A \cap B = \{2, 4\}$



$C = \text{"saír cadrado perfecto"}$   
 $D = \text{"saír n° primo"}$   
 $A$  e  $B$  incompatibles

## Operacións con sucesos

Dados dous sucesos  $A$  e  $B$  dun espazo da mostra  $E$ , chamaremos:

- Suceso **contrario** de  $A$  ao que ocorre cando non ocorre  $A$ , o indicaremos  $\bar{A}$ .  
Fórmano os sucesos elementais que non están en  $A$ .
- Suceso **unión** de  $A$  e  $B$ ,  $A \cup B$ , é o que ocorre cando ocorre  **$A$  o  $B$** , polo menos un dos dous.  
Fórmase xuntando os sucesos elementais de  $A$  e  $B$ .
- Suceso **intersección** de  $A$  e  $B$ ,  $A \cap B$  ao **suceso** que ocorre cando ocorren  **$A$  e  $B$**  á vez.  
Fórmase cos sucesos elementais comúns.

Cando a intersección de dous sucesos é o suceso imposible, é dicir, que non poden ocorrer simultaneamente, dise que ambos son **incompatibles**.

**$A$  e  $B$  incompatibles se  $A \cap B = \emptyset$**

*Atención: Non hai que confundir os sucesos contrarios e os sucesos incompatibles; un suceso e o seu contrario sempre son incompatibles, non poden ocorrer á vez, pero dous sucesos incompatibles non teñen por que ser contrarios.*

## Propiedades das operacións con sucesos

A unión e a intersección de sucesos e o suceso contrario cumpren as seguintes propiedades:

- A unión dun suceso e o seu contrario é o suceso seguro; a intersección é o suceso imposible.

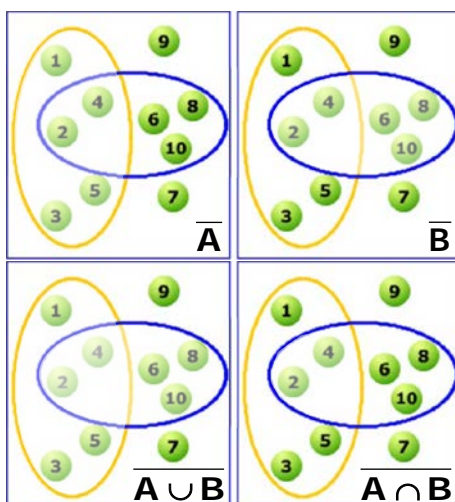
$$A \cup \bar{A} = E \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

- O contrario de  $\bar{A}$  é  $A$
- O contrario da unión é a intersección dos contrarios.

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- O contrario da intersección é a unión dos contrarios.

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



$\bar{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$      $\bar{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$   
 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{7, 9\} = \overline{A \cup B}$   
 $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \overline{A \cap B}$

## EXERCICIOS resoltos

1. Indica cales dos seguintes experimentos son aleatorios e en caso afirmativo acha o espazo da mostra:
- Extraer unha carta dunha baralla española e anotar o pau.
  - Pesar un litro de aceite.
  - Medir a hipotenusa dun triángulo rectángulo coñecidos os catetos.
  - Elixir sen mirar unha ficha de dominó.
  - Pescudar o resultado dun partido de fútbol antes de que se xogue.
  - Sacar unha bóla dunha bolsa con 4 bólas vermellas.
  - Sacar unha bóla dunha bolsa con 1 bóla vermella, 1 verde, 1 azul e 1 branca.
  - Lanzar ao aire unha moeda e observar o tempo que tarda en chegar ao chan.

SOLUCIÓN: Son aleatorios, posto que non podemos coñecer de antemán o resultado, os seguintes:

a) Espazo da mostra:  $E = \{OUROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS\}$

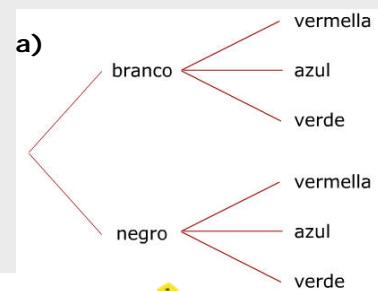
d) O espazo da mostra está formado por cada unha das 28 fichas que compoñen o dominó.

e) Espazo da mostra:  $E = \{1, X, 2\}$

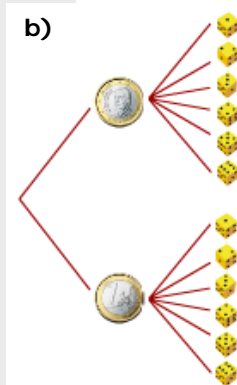
g) Espazo da mostra:  $E = \{VERMELLA, VERDE, BRANCA, AZUL\}$

2. Calcula as posibilidades mediante un diagrama de árbore:

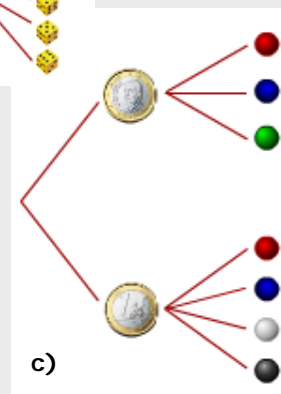
a) Nun equipo de fútbol - sala dispoñen para xogar de pantalóns brancos ou negros, e de camisetas vermellas, azuis ou verdes. De cantas maneiras se poden vestir para un partido?



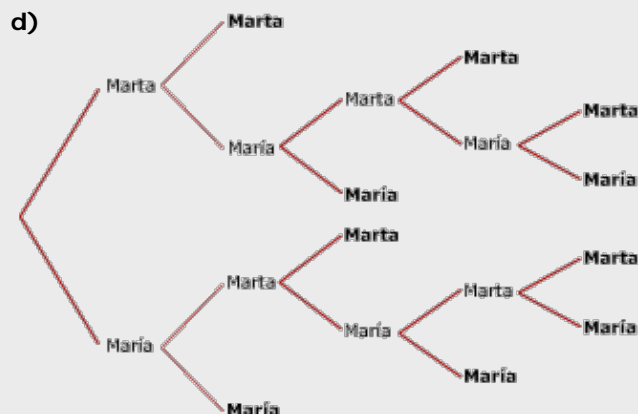
b) Tírase unha moeda e un dado, cales son os resultados posibles?



c) Tírase unha moeda, se sae cara sácase unha bóla da urna A que contén unha bóla vermella, unha azul e unha verde; e se sae cruz sácase da urna B na que hai unha bóla vermella, unha azul, unha branca e unha negra. Escribe os posibles resultados.



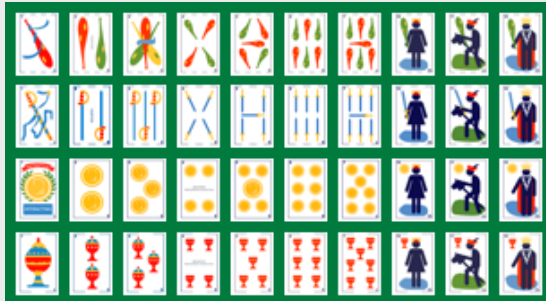
d) Marta e María xogan un campionato de parchís, vence a primeira que gañe dúas partidas seguidas ou tres alternas. De cantas maneiras se pode desenvolver o xogo?





## EXERCICIOS resoltos

3. Considera o experimento aleatorio de extraer unha carta da baralla. Expressa con unións e interseccións de A e de B, ou co contrario, os seguintes sucesos:



- a) A = "saír figura"      B = "saír bastos"  
"Que saía figura ou sexa de bastos" =  $A \cup B$
- b) A = "saír un rei"      B = "saír copas"  
"Saír copas pero que non sexa rei" =  $\overline{A} \cap B$
- c) A = "saír un as"      B = "saír ouros"  
"Que non saía un as nin de ouros" =  $\overline{A} \cap \overline{B}$
- d) A = "saír un rei"      B = "saír espadas"  
"Saír o rei de espadas" =  $A \cap B$

4. Extráense dúas cartas da baralla e mírase o pau. Indica cal, a, b ou c, é o suceso contrario a S?

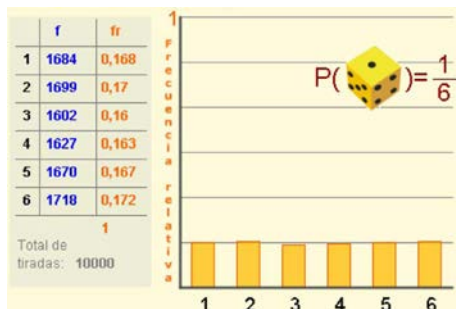
S = "As dúas son de ouros"

- a) "Ningunha é de ouros"  
b) "Polo menos unha é de ouros"  
c) "Polo menos unha non é de ouros"

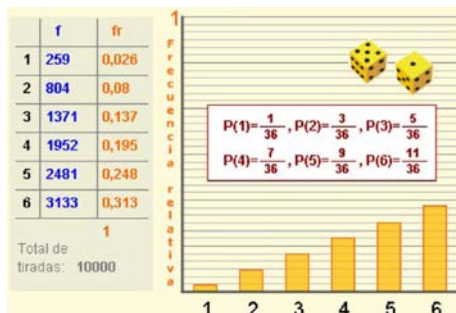
S = "Ningunha é de copas"

- a) "As dúas son de copas"  
b) "Polo menos unha é de copas"  
c) "Polo menos unha non é de copas"

No primeiro caso a solución é a opción c, o contrario de que as dúas sexan de ouros que polo menos unha non o sexa.  
No segundo, b é a opción correcta.



Ao tirar un dado moitas veces, as frecuencias relativas de cada cara estabilízanse en torno a  $1/6$ .



O gráfico mostra as frecuencias relativas de cada resultado obtido ao tirar dous dados e elixir o n° maior, ao repetir o experimento moitas veces.

## 2. Probabilidade

### Probabilidade dun suceso

A probabilidade dun suceso, S, indica o grao de posibilidade de que ocorra dito suceso. Exprésase mediante un número comprendido entre 0 e 1, e escríbese **P(S)**.

Se P(S) está próximo a 0 o suceso é pouco probable e será máis probable canto máis se aproxime a 1, que é a probabilidade do suceso seguro,  $P(E) = 1$ .

Cando se repite un experimento aleatorio moitas veces, a **frecuencia relativa** coa que aparece un suceso tende a estabilizarse cara un valor fixo, a medida que aumenta o número de probas realizadas.

Este resultado, coñecido como **lei dos grandes números**, lévanos a definir a probabilidade dun suceso como o número cara ao que tende a frecuencia relativa ao repetir o experimento moitas veces.

# Probabilidade

## A regra de Laplace

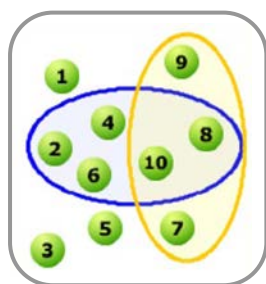
Cando dous sucesos teñen a mesma probabilidade de ocorrer ao realizar un experimento aleatorio dinse **equiprobables**.

Se nun espazo da mostra todos os sucesos elementais son equiprobables, o experimento dise regular e a probabilidade dun suceso calquera A, pódese calcular mediante a **Regra de Laplace**, segundo a cal basta contar, e facer o cociente entre o nº de sucesos elementais que compoñen A e o nº de sucesos elementais do espazo da mostra.

Adoitase enunciar así:

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}$$

*EXEMPLO: Nunha urna hai 10 bólas numeradas do 1 ol 10, extráese unha ao chou.*



✓ Cal é a probabilidade de que sexa un nº par?

Casos posibles: 10

Casos favorables: 5

$$P(\text{nº par}) = \frac{5}{10} = 0,5$$

✓ Cal é a probabilidade de que sexa un nº maior que 6?

Casos favorables: 4

$$P(\text{nº maior que } 6) = \frac{4}{10} = 0,4$$

## Propiedades da probabilidade

Ao asignar probabilidades mediante a regra de Laplace ou utilizando a frecuencia relativa podes comprobar que se cumpre:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ . A probabilidade dun suceso é un número comprendido entre 0 e 1.
- $P(E) = 1$ ,  $P(\emptyset) = 0$ . A probabilidade do suceso seguro é 1 e a do suceso imposible 0.
- A probabilidade da unión de dous sucesos **incompatibles** é  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Ademais, destas propiedades dedúcense outras que resultan moi útiles para calcular probabilidades:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

No experimento de lanzar tres moedas, hai 8 casos posibles:



A = "saír tres caras"

Casos favorables: 1

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

B = "saír dúas caras"

Casos favorables: 3

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

C = "polo menos unha cara"

Casos favorables: 7

$$P(C) = \frac{7}{8}$$

Tiranse dous dados e elíxese o maior dos números obtidos.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	6
3	3	3	4	5	6	6
4	4	4	4	5	6	6
5	5	5	5	5	6	6
6	6	6	6	6	6	6

Hai 36 casos posibles.

$$P(1) = \frac{1}{36}$$

$$P(2) = \frac{3}{36}$$

$$P(3) = \frac{5}{36}$$

$$P(4) = \frac{7}{36}$$

$$P(5) = \frac{9}{36}$$

$$P(6) = \frac{11}{36}$$

A = "Sacar un nº menor que 5"

B = "Sacar un nº múltiplo de 5"

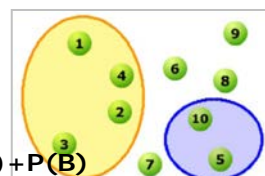
A e B son incompatibles

$$P(A) = 0,4$$

$$P(B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = 0,6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



A = "Sacar un nº menor que 5"

B = "Sacar un nº par"

A e B son compatibles

$$P(A) = 0,4$$

$$P(B) = 0,5$$

$$P(A \cap B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = 0,7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

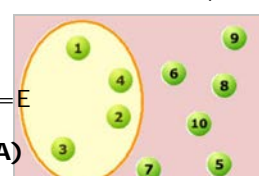
A = "Sacar un nº menor que 5"

$$P(A) = 0,4$$

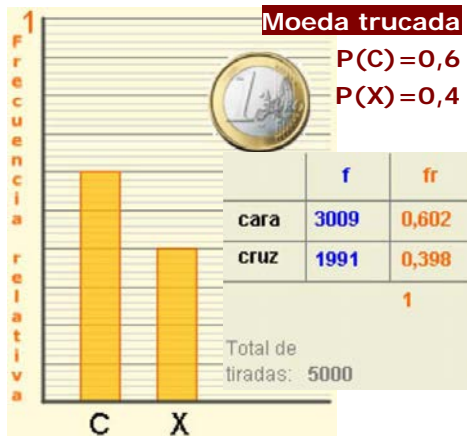
$$P(\bar{A}) = 0,6$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad A \cup \bar{A} = E$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$







## Probabilidade experimental

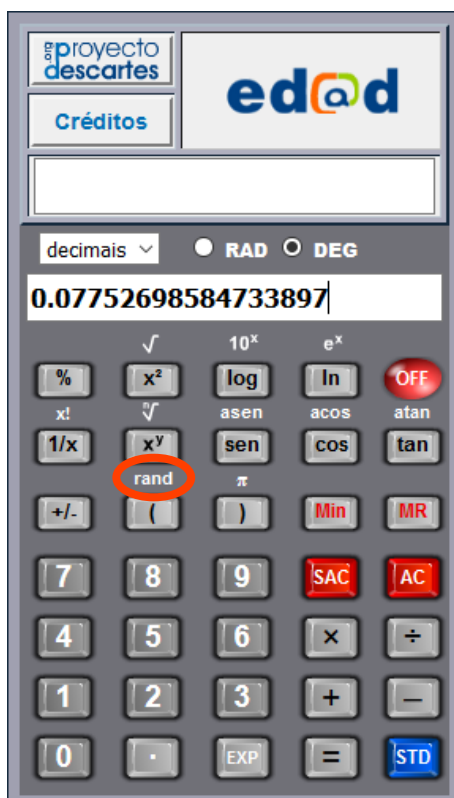
A lei de Laplace permítenos calcular a probabilidade de sucesos regulares, pero se a experiencia é irregular descoñecemos a probabilidade de cada un dos casos, entón é preciso recorrer á experimentación.

A probabilidade **experimental** é a probabilidade asignada a un suceso mediante o cálculo da frecuencia relativa do mesmo ao repetir o experimento moitas veces.

Canto maior é o número de probas realizadas máis se aproxima o valor obtido ao valor descoñecido da probabilidade teórica. O número de probas a realizar dependerá do experimento e do  $n^\circ$  dos seus posibles resultados.

Observa os exemplos da esquerda.

- ✓ Unha moeda está trucada de maneira que a probabilidade de saír cara non é a mesma que a de saír cruz, para pescudar estas probabilidades lanzouse moitas veces obtendo os resultados da táboa. Á vista destes asignaremos a "saír cara" a probabilidade 0,6 e a "saír cruz" 0,4.
- ✓ Un dado está cargado de forma que a probabilidade dunha das súas caras é cinco veces a das demais. De que cara se trata?. Cal é a súa probabilidade?. Ao repetir o lanzamento moitas veces obsérvase que a cara cargada é a do  $n^\circ$  6, a súa probabilidade é 0,5 e a do resto das caras 0,1.



## Simulación de experimentos

En moitas ocasións realizar un experimento aleatorio un número elevado de veces non resulta fácil, entón recorreremos á simulación.

**Simular** un experimento aleatorio consiste en substituílo por outro máis sinxelo e capaz de reproducir os mesmos resultados.

As calculadoras científicas dispoñen da tecla **RAND**, RAN# ou RANDOM que, ao activala, xera un número ao chou comprendido entre 0 e 1, chamado **número aleatorio**. Estes números resultan de gran utilidade na simulación de experimentos.



Para simular o lanzamento dun dado coa calculadora utilizando estes números:

Na túa calculadora preme sobre a tecla rand, ran# ou random, multiplica por 6 ( $n^\circ$  de resultados) o número que aparece, colle a parte enteira e súmalle 1, xa que os resultados van de 1 a 6.

$$\text{ent}(0,2932063716784 \cdot 6) + 1 = 2$$

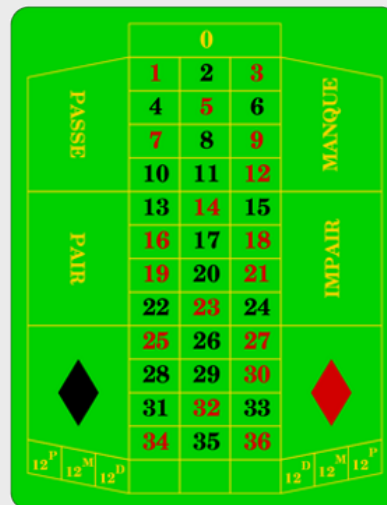
## EXERCICIOS resoltos

5. A ruleta é un coñecido xogo dos casinos. Consiste nunha roda equilibrada, dividida en 37 cadriños numerados do 0 ao 36. O 0 é de cor verde e cando sae gaña a banca.

Hai diferentes tipos de apostas, a un número só, a "par", a "impar", a "vermello", a "negro", a "passe" ( $n^{\circ} > 18$ ), a "falte" ( $n^{\circ} < 18$ ), a unha columna, ...

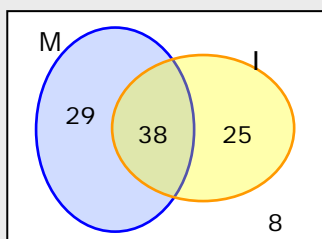
Calcula as seguintes probabilidades:

- a)  $P(17) = \frac{1}{37}$                       b)  $P(\text{"impar"}) = \frac{18}{37}$   
 c)  $P(\text{"2ª columna"}) = \frac{12}{37}$       d)  $P(\text{"par e vermello"}) = \frac{8}{37}$   
 e)  $P(\text{"impar e falte"}) = \frac{9}{37}$       f)  $P(\text{"vermello"}) = \frac{18}{37}$



6. Na última avaliación, na miña clase as Matemáticas aprobounas o 67%, o Inglés o 63% e o 38% aprobou as dúas materias. Elixido un estudante da clase ao chou, calcula a probabilidade de que:

- a) Aprobara algunha das dúas                      b) Non aprobara ningunha das dúas  
 c) Aprobara só as Matemáticas                      d) Aprobara só unha das dúas



Facer un diagrama facilita moito a resolución do problema.

$P(M) = 0,67$                        $P(I) = 0,63$                        $P(M \cap I) = 0,38$

- a) "A algunha das dúas" é o suceso unión,  
 $P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,67 + 0,63 - 0,38 = 0,92$   
 b) Non aprobar ningunha é o suceso contrario a aprobar algunha das dúas (polo menos unha).  
 $P(\text{algunha das dúas}) = 1 - 0,92 = 0,08$   
 c)  $P(\text{"só M"}) = P(M \cap \bar{I}) = 0,67 - 0,38 = 0,29$   
 d)  $P(\text{"só M ou só I"}) = 0,29 + 0,25 = 0,54$  (ó  $0,92 - 0,38$ )

7. Ao tirar unha chincheta pode caer coa punta cara arriba ou cara abaixo. Para pescudar a probabilidade de cada un destes sucesos, realizouse o experimento moitas veces obtendo os resultados dados na táboa. Á vista deles, que probabilidade asignarías ao suceso "caer coa punta cara abaixo"?



Nº de tiradas	10	50	100	500	1000
Punta cara arriba	7	29	65	337	668

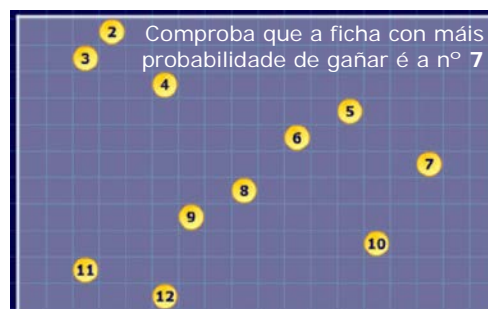
Na táboa obsérvase que a frecuencia relativa do suceso "caer coa punta cara arriba" tende a 0,67.

Caer coa "punta cara abaixo" é o suceso contrario, pódese considerar  $P(\text{"punta cara abaixo"}) = 1 - 0,67 = 0,33$

### Carreira con dados



- $P(2) = 1/36$   
 $P(3) = 2/36$   
 $P(4) = 3/36$   
 $P(5) = 4/36$   
 $P(6) = 5/36$   
 **$P(7) = 6/36$**   
 $P(8) = 5/36$   
 $P(9) = 4/36$   
 $P(10) = 3/36$   
 $P(11) = 2/36$   
 $P(12) = 1/36$





## Para practicar

1. Escollemos unha ficha de dominó ao chou,

a) Describe os sucesos:

A="sacar unha ficha dobre"

B="sacar unha ficha cuxos números sumen 5 ou múltiplo de 5"

b) Escribe  $A \cup B$  e  $A \cap B$

2. Escribe o espazo da mostra do experimento resultante de tirar 3 moedas. Considera os sucesos:

A="Saír unha cara"

B="Saír polo menos unha cara"

Escribe  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  e o suceso contrario de B.

3. Nunha urna hai 15 bólas numeradas do 1 ao 15, extráese unha de elas; considera os sucesos:

A="Sacar un  $n^\circ$  par"

B="Sacar un múltiplo de 4"

Escribe  $A \cup B$  e  $A \cap B$ .

4. Lanzamos un dado dodecaédrico e anotamos o  $n^\circ$  da cara superior. Describe os sucesos:

A="Sacar un  $n^\circ$  par"

B="Sacar un  $n^\circ$  maior que 5"

Escribe  $A \cap B$ ,  $A \cap \bar{B}$  e  $\bar{A} \cap \bar{B}$

5. Nunha caixa hai 5 bólas vermellas, 4 verdes e 3 azules. Extráese unha bóla e anótase a cor, calcula a probabilidade de que sexa verde.

6. Escóllese ao chou un  $n^\circ$  entre os primeiros 50 naturais (a partir do 1). Calcula a probabilidade dos sucesos:

A="saír un  $n^\circ$  maior que 4 e menor que 17".

B="Saír un cadrado perfecto"

7. Dunha baralla española extráese unha carta, calcula a probabilidade dos sucesos:

A="Saír bastos"

B="Non saír nin bastos nin as"

8. Lanzamos dous dados e fixámonos na menor das puntuacións. Calcula a probabilidade de que sexa un 3.

9. Encima da mesa temos as cartas dunha baralla que aparecen abaixo, sacamos outra carta e fixámonos no seu número, calcula a probabilidade de que a suma dos números das tres cartas sexa 15.



10. Extraemos unha ficha de dominó, calcula a probabilidade de que a suma dos puntos sexa menor que 7.

11. Cun 1, un 2 e un 3, formamos todos os números posibles de 3 cifras. Escollemos un ao chou, que probabilidade hai de que acabe en 3?

12. Ao xirar a ruleta da figura, calcula a probabilidade de que saia vermello e maior que 3.



13. A probabilidade dun suceso é 0,21, calcula a do suceso contrario.

14. A probabilidade dun suceso A é  $P(A)=0,55$ , a de outro suceso B é  $P(B)=0,45$  e a da intersección de ambos é  $P(A \cap B)=0,20$ . Calcula a probabilidade de  $A \cup B$ .

15. Considera dous sucesos A e B dun experimento aleatorio. Se  $P(A)=0,37$ ;  $P(A\cup B)=0,79$  e  $P(A\cap B)=0,06$ ; calcula a  $P(\bar{B})$ .

16. Un dado está trucado de maneira que a probabilidade de sacar un nº par é 0,67; ademais  $P(1)=P(3)=P(5)$ . Calcula a probabilidade de sacar un 5.

17. Nunha urna hai bólas brancas e negras.

María di: "A probabilidade de sacar unha bóla branca é  $5/26$ "

Serxio di: "A probabilidade de sacar unha bóla negra é  $11/13$ "

- Poden ser correctas ambas afirmacións?
- Se María ten razón, cal é a probabilidade de sacar bóla negra?

18. Nun restaurante ofrecen un menú que consta de primeiro prato a escoller entre ensalada, pasta ou legumes; un segundo prato a escoller entre carne ou peixe; e sobremesa a escoller entre froita o xeadó. Ana escolle o seu menú ao chou, calcula a probabilidade de que coma:

- Ensalada, carne e froita.
- Pasta e peixe.

*Suxestión: Fai un diagrama de árbore*

19. Levo no peto 2 moedas de 50 céntimos, dúas de 20 céntimos e dúas de 10 céntimos. Tamén levo un burato polo que me caen dúas e pérdoas. Calcula a probabilidade de perder:

- 1 euro
- Menos de 40 céntimos.
- Máis de 50 céntimos.

*Suxestión: Fai unha táboa de dobre entrada*

20. Nun instituto o 66% dos estudantes son afeccionados ao fútbol e o 42% ao baloncesto. Hai un 27% que son afeccionados a ambos deportes. Calcula a probabilidade de que elixido un estudante ao chou non sexa afeccionado ao fútbol nin ao baloncesto.

21. A unha reunión asisten 32 homes e 48 mulleres. A metade dos homes e a cuarta parte das mulleres teñen 40 anos ou máis. Elixida unha persoa ao chou calcula a probabilidade de que:

- sexa muller e menor de 40 anos
- sexa menor de 40 anos.

*Suxestión: Completa a táboa*

	40 o máis	<40	
HOME			32
MULLER			48

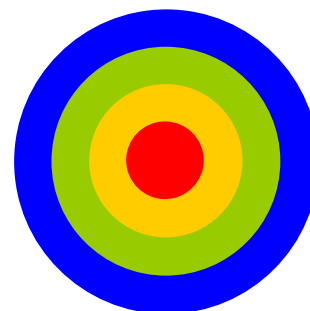
22. Perdín algunhas cartas dunha baralla. Se entre as que me quedan saco unha ao chou, a probabilidade de que sexa de copas é 0,20, de que sexa un rei é 0,13 e de que sexa un rei ou de copas é 0,30. Está o rei de copas entre as cartas que me quedan?.

*Suxestión: Calcula a probabilidade da intersección*

23. A un humidal chegan todos os anos bandadas de grúas no seu camiño a zonas cálidas. Para observar cantas hai, capturouse e anelouse unha mostra de 40 grúas. Posteriormente obsérvanse 50 das que 3 levan anel, cantas grúas estimaremos que hai?.

*Suxestión: A probabilidade de que unha grúa estea anelada será a mesma en todas as mostras, e calculámola a partir da frecuencia relativa.*

24. Suponse que a probabilidade de acertar ao tirar un dardo en calquera punto da diana é a mesma. Calcula a probabilidade de acertar na zona de cor verde.





Para saber máis



**Probabilidade e xenética**  
**As leis de Mendel**

Gregor Mendel (1822-1884), foi un monxe e naturalista nacido en Heizendorf (actual Hencice, República Checa).

A través dos seus traballos, que levou a cabo con distintas variedades da planta do chícharo, foi o primeiro en describir las leis que rexen a herdanza xenética. Para elo aplica a probabilidade como describe na súa obra "A Matemática da herdanza".

Ao cruzar dúas liñas puras, distintas para algún carácter, o 100% dos descendentes son iguais entre si e iguais ao parental dominante. (1ª Lei de Mendel)

Mendel combinou chícharos de distinta cor (amarelo e verde) e distinta textura (lisos e rugosos).

**1ª xeración**  
RRAA + rraa

**2ª xeración**

	RA	RA
ra		
ra		

**3ª xeración**

	RA	Ra	rA	ra
RA				
Ra				
rA				
ra				

**COR**  
A: amarela  
a: verde

**TEXTURA**  
R: liso  
r: rugoso

*dominantes*  
*recesivos*

Na 3ª xeración:

$$P(\text{amarelo liso}) = \frac{9}{16}$$

$$P(\text{amarelo rugoso}) = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{verde liso}) = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{verde rugoso}) = \frac{1}{16}$$



**Probabilidade condicionada**  
**Dependentes ou independentes?**

En ocasións a probabilidade dun suceso varía se se calcula coa condición de que ocorreu outro anteriormente. Imaxina que xogando á ruleta sabemos que non saíu o 0, podemos considerar entón que  $P(\text{par}) = 1/2$ .

- Se ademais sabemos que saíu "vermello"

$$P(\text{par sabendo que é vermello}) = \frac{\text{nº de pares e vermellos}}{\text{nº pares}} = \frac{8}{18}$$

Con esta condición a probabilidade de "par" xa non é  $1/2$ , os sucesos "par" e "vermello" son DEPENDENTES.

- Pero si sabemos que saíu "passe"

$$P(\text{par sabendo que é passe}) = \frac{\text{nº resultados pares e passe}}{\text{nº resultados pares}} = \frac{9}{18}$$

A probabilidade de "par" segue sendo  $1/2$ , non cambiou, os sucesos "par" e "passe" son INDEPENDENTES.



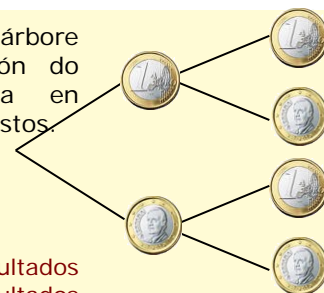


## Lembra o máis importante

### Espazo da mostra e sucesos

- **Experimento aleatorio**, o que no se pode predicir o resultado.
- **Espazo da mostra** conxunto de todos os resultados posibles.
- Chamaremos **suceso** a calquera subconxunto do espazo da mostra.
- Sucesos **incompatibles** se non se poden realizar á vez.

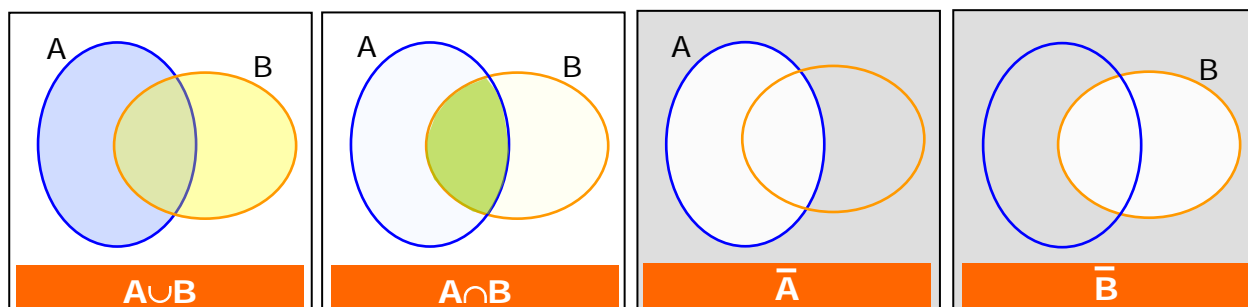
Un diagrama de árbore facilita a construción do espazo da mostra en experimentos compostos.



1º: m resultados  
2º: n resultados  
Total: m·n resultados

### Operacións con sucesos

- Suceso **unión** de A e B,  $A \cup B$ , é o que ocorre cando ocorre A ou B, algún dos dous.
- Suceso **intersección** de A e B,  $A \cap B$ , suceso que ocorre cando ocorren A e B á vez.
- Suceso **contrario** de A ao que ocorre cando non ocorre A, indicáremolo  $\bar{A}$ .



### Calcular probabilidades

- En experimentos regulares, cando os sucesos elementais son equiprobables, coa **Regra de Laplace**

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}$$

- Se o experimento non é regular recórrase á experimentación, tomando a probabilidade de A como a súa frecuencia relativa ao repetir o experimento moitas veces.



### Propiedades da probabilidade

- $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- $P(E) = 1$ ,  $P(\emptyset) = 0$ .
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

### Probabilidade da unión

- A e B incompatibles:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A e B compatibles:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



## Autoavaliación



	aproban	suspenden
Grupo A	15	6
Grupo B	16	13

1. Escribimos cada unha das letras da palabra ALEATORIO nun papel e sacamos unha ao chou. Escribe o suceso "saír vogal".
2. Escribe o suceso contrario do calculado no exercicio anterior.
3. Nunha bolsa hai 100 bólas numeradas do 0 ao 99. Extráese unha ao chou, calcula a probabilidade de que nas súas cifras estea o 7.
4. Nunha bolsa hai 2 bólas vermellas, 4 bólas verdes e 4 azules. Sácase unha bóla ao chou, calcula a probabilidade de que NON sexa verde.
5. Calcula a probabilidade de vermello na ruleta da figura.
6. Sácase unha carta dunha baralla de 40, calcula a probabilidade de que sexa de OUROS ou un AS.
7. Se A e B son dous sucesos tales que  $P(A)=0,64$ ,  $P(B)=0,36$  e  $P(A \cap B)=0,12$ . Calcula  $P(A \cup B)$ .
8. Os resultados dun exame realizado por dous grupos de 3º ESO móstranse na táboa adxunta. Seleccionado un estudante ao chou calcula a probabilidade de que sexa do grupo B e aprobe.
9. Un dado cúbico está trucado de xeito que a probabilidade de sacar un catro é catro veces a probabilidade de calquera das outras caras. Calcula a probabilidade de obter un catro.
10. Lánzanse unha moeda e un dado, calcula a probabilidade de que saía CARA e nº PAR.

## Solucións dos exercicios para practicar

- $A = \{00, 11, 22, 33, 44, 55, 66\}$   
 $B = \{05, 14, 23, 55\}$   
 $A \cup B = \{00, 05, 11, 14, 22, 23, 44, 55, 66\}$   
 $A \cap B = \{55\}$
- $A = \{cxx, xc x, xxc\}$   
 $B = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xc x, xxc\}$   
 $A \cup B = A$      $A \cap B = B$      $\bar{B} = \{xxx\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$   
 $A \cap B = \{4, 8, 12\}$
- $A \cap B = \{8, 12\}$      $A \cap \bar{B} = \{4\}$      $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 2, 3, 5\}$
- $P(\text{verde}) = 4/12 = 1/3$
- $P(A) = 12/50 = 0,24$      $P(B) = 7/50$
- $P(A) = 1/4$      $P(B) = 27/40$
- $P(3) = 7/36$
- Debe saír un 6, como xa hai un:  
 $P = 3/38$
- En 16 das 28 fichas,  $P = 16/28 = 0,57$
- Hai 6 casos posibles,  $P = 2/6 = 1/3$
- $P = 0,3$
- $P(\bar{A}) = 1 - 0,21 = 0,79$
- $P(A \cup B) = 0,55 + 0,45 - 0,20 = 0,80$
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,39 = 0,61$
- $P(\text{impar}) = 0,33$      $P(1) = P(3) = p(5) = 0,11$
- a) Non poden ser certas ambas xa que son sucesos contrarios e  $5/26 + 11/13 \neq 1$   
 b)  $P(\text{"negra"}) = 21/26$
- Hai 12 posibles menús  
 a)  $P(A) = 1/12$     b)  $P(B) = 1/6$
- a)  $P(1) = 4/36 = 1/9$   
 b)  $P(\text{menos de } 0,40) = 12/36 = 1/3$   
 c)  $P(\text{"máis de } 0,50") = 20/36 = 5/9$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,81 = 0,19$
- Asisten 80 persoas  
 a)  $P(\text{muller e menor de } 40) = 12/80 = 0,15$   
 b)  $P(\text{menor de } 40) = 28/80 = 0,35$
- $P(R \cap C) = P(R) + P(C) - P(R \cup C) = 0,03$   
 A probabilidade de sacar o "Rei de Copas" non é 0, logo si que está.
- $P(\text{grúa con anel}) = 4/50 = 0,08$   
 $n^\circ \text{ estimado} = 40/0,08 \approx 500$
- $\text{Superficie da diana} = \pi \cdot (4r)^2 = 16\pi r^2$   
 $\text{Superficie verde} = \pi \cdot (3r)^2 - \pi \cdot (2r)^2 = 5\pi r^2$   
 $P = 5/16$

## Solucións AUTOAVALIACIÓN

- $\{A, E, I, O\}$
- $\{L, T, R\}$
- 19/99
- $6/10 = 0,6$
- $4/12 = 1/3$
- 13/40
- 0,88
- $15/50 = 0,3$
- 4/9
- $3/12 = 0,25$